E-lib.ch
Elektronische Bibliothek Schweiz
Bibliothèque électronique suisse
Swiss electronic library

e-rara.ch

Die Mathematik der Volksschule

Hug, Johann Kaspar

Zürich, 1854-1856

Zentralbibliothek Zürich

Signatur: NE 2261

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-28992

e-rara.ch
Das Projekt e-rara.ch wird im Rahmen des Innovations- und Kooperationsprojektes „E-lib.ch: Elektronische Bibliothek Schweiz“ durchgeführt. Es wird von der Schweizerischen Universitätskonferenz (SUK) und vom ETH-Rat gefördert.

e-rara.ch is a national collaborative project forming part of the Swiss innovation and cooperation programme E-lib.ch: Swiss Electronic library. It is sponsored by the Swiss University Conference (SUC) and the ETH Board.

www.e-rara.ch

Nutzungsbedingungen
Dieses PDF-Dokument steht für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Es kann als Datei oder Ausdruck zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Terms and conditions
This PDF file is freely available for non-commercial use in teaching, research and for private purposes. It may be passed to other persons together with these terms and conditions and the proper indication of origin.

Visual Library

BIBLIOTHEK
DER
NATURFORSCHENDEN
GESELLSCHAFT
IN
ZURICH.

Der
Naturforschenden Gesellschaft
in Zürich
durch Vermächtniss geschenkt
von
J. L. RAABE,
Professor.
1859.

NE-2261

Die

Mathematik der Volksschule.

Ein methodisches Handbuch

für

einen dem Wesen der Volksschule entsprechenden und alle ihre Stufen umfassenden Unterricht

von

J. C. Hug,
Lehrer der Mathematik.

I

Zürich,
Druck und Verlag von Friedrich Schultheß.
1854.

NATURFORSCHENDE
GESELLSCHAFT
IN
ZURICH.

Der

zürcherischen hohen Erziehungsdirektion,

Herrn Regierungspräsidenten Dr. A. Escher,

und dem

hohen Erziehungsrathe

als Beitrag zu einer vollständigen Organisation des Volksschulunterrichts

hochachtungsvollst zugeeignet

vom

Verfasser.

Vorwort.

Die Aufgabe, den mathematischen Unterricht der gesammten Volksschule — vom Eintritt des Schülers in diese Anstalt bis zu dessen Eintritt ins beruflich- und staatlich-bürgerliche Leben — sowohl für den Lehrer methodisch zu bearbeiten, als auch für die Schule praktisch in Lehrmitteln durchzuführen, so daß diese beiden Theile als ein gelungenes, vollständiges Ganzes und wiederum als ein proportionales und natürliches Glied im Gesammtorganismus des Schulunterrichts dastehen, ist keineswegs eine gar leichte.

Die Schulliteratur umfaßt eine zahllose Menge von Lehr- und Handbüchern und von größern oder kleinern Bearbeitungen einzelner Theile des mathematischen Unterrichts der Volksschule; allein auf der einen Seite fassen selbst die umfangsreichern und geachtetern unter denselben die Bedeutung und Aufgabe der Volksschule nicht so bestimmt auf, als es gegenwärtig gewünscht werden muß, und gehen in Folge davon entweder über die Gränzen ihres Bereiches hinaus, oder sind zu unvollständig in Festsetzung und Durchführung des nothwendigen Stoffes; auf der andern Seite beziehen sich die übrigen meist bloß auf eine gewisse Schulstufe und nicht auf die ganze Volksschule, oder auf einen gewissen Theil des Unterrichtsfaches und nicht auf dessen ganzen in die Volksschule gehörenden Unterrichtsstoff.

Ich will den geschätztesten unter den mathematischen Werken der Volksschule keineswegs zu nahe treten, im Gegentheil habe ich dieselben in vorliegendem Buche besonders hervorgehoben und deren Vorzüge anerkannt; allein die Aufgabe bleibt nach meinem Dafürhalten bis jetzt immer noch offen: einerseits dem mathematischen Unterricht eine natürlichere, dem Wesen der Volksschule wie demjenigen des Lehrgegenstandes entsprechendere Methode zu gewinnen, anderseits — diese Anstalt als Ganzes erfassend — den vollständigen Unterricht dieses Lehrfaches von den zartesten Anfängen an bis zum Eintritt des Schülers in den bürgerlichen Gesellschaftsverband zu verfolgen und durchzuführen.

In wie weit mir die Lösung dieser Aufgabe gelungen, muß ich dem unbefangenen und kompetenten Beurtheiler anheimstellen; doch bin ich fest überzeugt, daß diese Aufgabe selbst der besten Kräfte nicht unwürdig wäre, und es muß mich nur freuen, wenn ein Nachfolgender sie richtiger und erfolgreicher, als es mir vielleicht gelungen ist, lösen wird.

Ich hoffe indessen wenigstens in Etwas zur Erreichung einer pädagogisch und praktisch zweckmäßigern Methode mitgewirkt zu haben, durch welche sowohl dem begründenden als dem begründeten (angewandten) Theile des in Rede stehenden Lehrfaches mehr Einheit und Erfolg gesichert werden dürfte; ich hoffe ferner wenigstens zu einer bessern Sichtung des Stoffes und Begränzung des Gebietes, das bei einem zweckmäßigen Unterrichte so viele Hülfsmittel für das volkswirthschaftliche Leben darbieten kann, so wie zum Abschluß und zur Abrundung dieses Unterrichts für die obern zum Theil noch brach liegenden, zum Theil noch nicht organisirten Abtheilungen der Volksschule Hand geboten zu haben. Und hier wäre ich besonders belohnt, wenn die hohe Behörde, der ich ehrerbietigst dieses Buch widme, so wie dann auch ein geachteter und tüchtiger Lehrerstand bei einer kommenden Organisation dieser letzten Schulabtheilungen in meiner Arbeit einige benutzenswerthe Anhaltspunkte finden könnte.

Daß das vorliegende Handbuch erst auf Grundlage bestimmter, im wirklichen Schulleben angewendeter Schulbücher und Lehrmittel abgefaßt ist, dürfte demselben nur zum Vortheil gereichen, denn die Ausführung einer Idee muß im Allgemeinen um so besser gelingen, je mehr diese im Leben selbst schon Wurzeln gefaßt hat. Die günstigen Beurtheilungen und freundlichen Bemerkungen, die mir aus engern und weitern Kreisen über jene Lehrmittel zur Kunde gekommen sind, insbesondere auch die aufmunternden Urtheile der von mir hochgeachteten Lehrer und Freunde, der Herren Professoren Dr. Raabe und Dr. Gräffe, haben mich bei der Abfassung dieses Buches wesentlich ermuthigt.

Meinen verehrten Kollegen, die mich durch einige Beiträge für die Abtheilung des Unterrichts auf der Zivilschule unterstützten, so wie hauptsächlich meinem theuren Lehrer, Herrn Professor Dr. Raabe, dem ich so viele nützliche Winke und Belehrungen schuldig bin, statte ich hiemit öffentlich meinen wärmsten Dank ab.

Die Ausarbeitung des zweiten Theils dieses Handbuches, das den geometrischen Unterricht der Volksschule enthalten wird, ist schon ziemlich vorgeschritten, so daß derselbe im Laufe des nächsten Sommers wohl dem Drucke übergeben werden kann. Ich erachte alsdann diese dem Volksschulwesen gegenüber übernommene Pflicht für einstweilen erfüllt, um sodann in einem etwas ausgedehnteren Gebiete weiter arbeiten und wirken zu können.

Neujahr 1854.

J. C. Hug,

Privatdozent an der zürch. Hochschule.

Erster Theil.

Der Rechnungsunterricht der Volksschule.

Zugleich als Anleitung

zum

richtigen Gebrauche der „methodisch gegliederten Rechnungsaufgabensammlung“
als obligatorisches Lehrmittel eingeführt in der zürcherischen Volksschule.

Der Rechnungsunterricht

der

Volksschule.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Betrachtung des mathematischen, vorzugsweise des arithmetischen Unterrichts der Volksschule.

Einleitung.

§ 1.

Damit wir bei der speziellen Behandlung des vorgesetzten Gegenstandes freier verfahren und auf allgemeine Fragen, statt sie an verschiedenen Orten wiederholt zu besprechen, einfach zurückweisen können, wollen wir zum Voraus die Hauptgesichtspunkte erörtern, von denen aus der Gegenstand betrachtet und in seinen einzelnen Theilen ausgeführt werden wird. Diese Punkte betreffen vorzüglich den Zweck, die Methode, den Stoff und die Hülfsmittel des Rechnungsunterrichtes der Volksschule.

Ueber die Bedeutung der Mathematik, insbesondere des Rechnungsunterrichts der Volksschule.

§ 2.

Die Idee der Volksschule.

Es muß zunächst untersucht werden, ob, und bejahenden Falls in welchem Sinne man berechtigt sei, von einer Mathematik der Volksschule zu sprechen. Diese Frage wird hauptsächlich davon abhängen, was

man sich unter der Volksschule selbst denke. Der Begriff derselben wird nicht von allen Pädagogen gleich festgesetzt, noch viel weniger wird allerorts die äußere, praktische Durchführung der Volksschule auf die gleiche Idee dieser Anstalt gegründet *. Eine wirkliche Volksschule existirt eigentlich noch in wenigen Staaten; man findet selbst in solchen, deren Volksbildung hoch gerühmt wird, meist eher Volksschulen als eine Volksschule im einheitlichen Sinne. Und wie verschieden der Begriff der Volksschule genommen wird, geht besonders daraus hervor, daß Viele darunter bald eine Schule für die niedern Stände **, bald wieder Stadtschulen und Bürgerschulen für die höhern Stände, bald endlich auch Schulen für die Kinder aller Stände mit höhern oder geringeren Anforderungen an den Umfang und Geist des Unterrichtes verstehen.

In einigen der fortgeschrittenern Kantone der Schweiz hat eine gleichmäßigere Vorstellung und Verwirklichung der Volksschule in dem Sinne durchgedrungen, daß dieselbe die Jugend aller Volksklassen in sich fassen und nach übereinstimmenden Grundsätzen bilden solle. Nach Pestalozzi's Idee muß die Volksschule so organisirt und die Volksbildung so gegliedert

---

* Daher rührt hauptsächlich auch die auffallende prinzipielle Verschiedenheit so vieler (besonders auch mathematischer) Schul- und Handbücher, sowohl was deren Stoff und Ausdehnung, als deren Haltung (Höhe) und methodische Durchführung anbelangt. Es ist aber zur Beurtheilung eines Werkes unerläßlich, den Standpunkt genau zu kennen, von welchem aus es bearbeitet worden ist; es kann ja ein solches nach einem gewissen Maßstabe als ganz verfehlt erscheinen und dennoch ein gutes Werk sein. Mit Unrecht wird daher oft das Einzelne in seiner Ausführung getadelt, während man die dem Ganzen zu Grunde liegende Idee angreifen sollte; mancher Streit über Einzelnheiten würde von selbst wegfallen oder ganz anders geführt werden, würde man sich immer zum Voraus über das Allgemeine ins Klare setzen.

** Wie lange sich die einseitige Rücksicht der Schule auf die Forderungen von Staat und Kirche erhalten hat, zeigen leider noch zu viele Länder, in denen das rein menschliche Element im Volksschulunterrichte beharrlich niedergehalten wird. Das Rechnen ist da eine bloße Exempelmacherei; Lesen und Schreiben werden nur als Vorbereitung auf das »gewerbliche« Leben gelehrt, die Katechismuslehre beschäftigt nur das Gedächtniß; von Formenlehre und Gesang ist gar keine Rede. Es gibt da von vorn herein nur Berufsschulen für den Bauer und armen Städter (etwa „Trivialschulen" genannt), für den wohlhabenden Städter „Hauptschulen" (die aber so wenig als die erstern von Weltkunde, Formenlehre, Gesang Notiz nehmen), für den höhern Gewerbetreibenden „Realschulen" ꝛc. Aus A W. Grube: Psychologisches Studium des Volksschullehrers.

sein, daß die ganze Organisation dem menschlichen Entwicklungsgange entspricht; da aber derselbe ohne Unterschied von Stand und Geburt der nämliche ist, so gibt es grundsätzlich auch nur eine wahre Volksschulorganisation und die ächte Volksbildung muß auf übereinstimmenden, jenem Entwicklungsgange entsprechenden Grundsätzen beruhen.

Der Mensch hat aber seine Kräfte und Anlagen offenbar erhalten, damit sie entwickelt und ausgebildet werden und damit er durch diese Ausbildung seiner Bestimmung als Mensch und Bürger entgegen komme; darum hat er auch ein Recht darauf, daß ihm diese allgemeine Menschenbildung zu Theil werde, und der Staat hat die Pflicht, jene Bildung allen seinen Angehörigen zu Theil werden zu lassen; er hat aber deßwegen auch das Recht, anzuordnen, daß sie allen zu Theil werde.

Allein gleichwie die ächte Volksbildung den ganzen Menschen, d. h. alle seine Anlagen und Kräfte umfaßt, so umfaßt die Volksschule auch das ganze Volk, d. h. die Jugend aller Stände und Klassen, und sie ist zugleich die beste Schule für die Kinder aller Volksklassen.

Somit wäre die **Volksschule** diejenige von Staats wegen organisirte Anstalt, durch welche die Jugend des gesammten Volkes nach übereinstimmenden pädagogischen Grundsätzen zu geistig freien und thätigen, sittlich religiösen und bürgerlich tüchtigen, von vaterländischem Sinne beseelten Menschen herangebildet werden soll *.

Diese rein menschliche und bürgerliche Bildung ist subjektiv insofern eine vollständige, als sie sich auf alle geistigen Kräfte und Anlagen des Kindes erstreckt, objektiv kann sie natürlich nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen, da sie sich hauptsächlich auf das beziehen muß, was das Leben erfordert. Eine objektiv vollständige Bildung ist überdieß eine Unmöglichkeit. Eine Bildung aber, die nur einzelne Richtungen des Geistes verfolgt, während die übrigen hintangesetzt werden oder gar unberücksichtigt bleiben, ist eine einseitige Bildung und würde sie sich auch in die höchste und tiefste Wissenschaft versteigen.

---

* Das zürcherische Schulgesetz drückt die Aufgabe der Volksschule in der Fassungsweise von Seminardirektor Dr. Scherr einfach so aus: „Die Volksschule soll die Kinder aller Volksklassen nach übereinstimmenden Grundsätzen zu geistig thätigen, bürgerlich brauchbaren und sittlich religiösen Menschen bilden.“ Diese Aufgabe ist in Scherrs „Bildungsstufen und Lehrkurse, 1833 bei Orell, Füßli und Comp.“ mit großer Anschaulichkeit und Frische erläutert.

§ 3.

Begriff der Mathematik der Volksschule.

Das mathematische Gebiet ist vorzüglich das Gebiet der reinen Verstandesthätigkeit; es ist als solches ein sehr umfassendes und begreift die gesammte Logik der Anordnung, Eintheilung, Berechnung und Darstellung der Größen=, sowohl der Zahl= als Raumverhältnisse. Die Anlage für dieses Gebiet ist eine vom menschlichen Geiste unzertrennliche, ihm nothwendig inwohnende; sie ist daher eine allgemeine. Ein geistig gesunder Mensch ohne alle mathematischen Anlagen ist also gar nicht gedenkbar; bloß das Maß oder vielmehr die Intensität dieser Kraft ist bei den einzelnen Menschen verschieden. Oft ist es indessen Folge verabsäumter Anregung und Entwicklung dieses Sinnes, also die Wirkung einer vernachlässigten oder einseitigen Bildung, daß derselbe bei einzelnen Menschen in den Hintergrund tritt.

Da nun die Volksschule begriffsgemäß alle geistigen Kräfte des Kindes anregen und entwickeln soll, so ist die Bildung des mathematischen Sinnes in der allgemeinen Aufgabe der Volksschule eingeschlossen und das mathematische Bildungsfach ist daher ein für die Volksschule begriffsgemäß gegebenes und darum unmittelbar nothwendiges.

Es ist aber von selbst klar, daß das mathematische Bildungsfach im Dienste der allgemein menschlichen Bildung weder auf die Vollständigkeit, noch auf die Strenge der Mathematik als Wissenschaft Anspruch machen kann; allein eben so wenig wird es sich bloß auf einzelne abgerissene Stücke der Wissenschaft beschränken, um allenfalls diesen oder jenen Kunstgriff fürs Leben verstehen und mit Vortheil gebrauchen zu lehren. Auch ist dieser Bildungszweig keineswegs identisch mit den sogenannten „Elementen der Mathematik“ *, die man etwa zu populariſiren glaubt, indem man

---

* Nirgends so sehr wie im mathematischen Unterrichtsfache ist man geneigt, der Volksschule Lehrmittel zu spenden, die bloße Verkümmerungen irgend einer systematischen Bearbeitung der Elemente der Arithmetik oder Geometrie bilden. Unkenntniß des Wesens und der speziellen Bedürfnisse der Volksschule auf der einen, Mangel an tieferer Fachkenntniß auf der andern Seite haben uns den Schwarm verfehlter Lehrmittel hervorgebracht, die an manchen Orten das Unterrichtsfach selbst in Mißkredit brachten oder theilweise gar aus der Schule verdrängten. Wer mathematische Lehrmittel dieser Stufe schreiben oder beurtheilen will, muß nicht bloß die Mathematik als solche gründlich kennen, er muß insbesondere auch die Mathematik der Volksschule verstehen.

sie aus dem streng wissenschaftlichen Verbande herauslöst und so lange zustutzt, bis sie als ein dürres Gerippe von Erklärungen, Grundsätzen, Lehrsätzen, Nachweisen, Regeln und Beispielen einfach und trocken genug für die Schüler erscheinen (siehe die „Resumés", die „Abregés" ꝛc. der französischen Schulen, die „theoretischen und praktischen Kurse", die vielen „Leitfaden", „Uebungsbücher", „Versuche" ꝛc. der deutschen).

Die Mathematik der Volksschule bildet im Gegentheil einen vollständig eigenthümlichen Bildungsgang, der sich stufenweise aus und mit der Kindheit entwickelt, die ersten bestimmten Raum- und Zahl-Anschauungen und Vorstellungen vermittelt und mit dem geistigen Leben des Schülers als feste Begriffe verknüpft, dieselben allmälig erweitert und durch die Selbstthätigkeit der Schüler verarbeiten läßt, der nicht plötzlich ein anderer wird, sondern seinem Ursprunge treu mit der wachsenden Kraft des Zöglings sich selbst extensiv und intensiv steigert und in stetigem Fortschritte die begonnene vorherrschend formale (innere, rein geistige) Bildung mit der entsprechenden materialen (bezogen auf äußere, reale Zwecke) verbindet, indem die gewonnene Einsicht in die mathematischen Grundverhältnisse nach und nach auf die entsprechenden Verhältnisse des Lebens angewendet und mit denselben verflochten wird, so daß beide Richtungen, die formale und materiale, in harmonischem Zusammenhange das Größengebiet des Lebens umfassen *.

Das ist die Mathematik der Volksschule. Sie ist mitten im Garten der Volksbildung ein jugendlich kräftiger, wohl proportionirter Baum, der als mathematisches Samenkorn auf dem Boden der Pädagogik sich ent-

---

* Die gewohnten Ausdrücke »formale und materiale« Bildung werden von Einigen als Pleonasmen verworfen und die Benennungen »humanistische und praktische« Bildung als die richtigern vorgezogen. Der Name nun thut hier eigentlich nicht viel zur Sache, und es ist auch durch die vorgeschlagene zweite Ausdrucksweise dem gerügten Uebelstande nicht ganz vorgebogen; denn die »praktische Bildung« als **Bildung** für den Beruf uud das Leben überhaupt implizirt immer auch eine theilweise »humanistische (innere rein menschliche) Bildung« und umgekehrt. Die Bildung *als solche* ist eine *Einheit*, die nicht aus diskreten Theilen zusammengesetzt ist, also auch nie *zertheilt* werden kann. Dagegen kann man wohl eine gewisse Beziehung derselben als in einem bestimmten Grade *vorherrschend* ins Auge fassen, wie es in der That geschieht, wenn man von »formaler und materialer« oder von »humanistischer und praktischer« Bildung spricht.

wickelt und der Natur seines Pflanzortes angemessen eigenthümlich entfaltet und gekräftigt hat. Es bildet die Mathematik der Volksschule keine Profanirung der Wissenschaft, denn sie raubt der Hohen nicht die Weihe; sie steht in inniger Beziehung zu ihr, da sie ihr Same ist, und aus ihr geht die Wissenschaft verjüngt wieder hervor. Es ist wahr, der Mathematiker hat auf *seinem* Gebiete Abscheu vor Unwissenschaftlichkeit, vor roher Empirie, denn diese ist Ungenauigkeit und gränzt an Unwahrheit. Die Mathematik der Volksschule ist aber Entwickelung, Vorbereitung und geistige Kräftigung; sie beruht nicht auf bloßem Breittreten wissenschaftlicher Resultate; die wissenschaftliche Mathematik erforscht ihre Objekte unmittelbar in ihrem Wesen und nach ihrem Verhalten zu verwandten Objekten, ohne irgend welche subjektive Beziehung; jene dagegen faßt zunächst das Subjekt ins Auge und bildet die Entwicklung des Objektes der psychologischen Entwicklung des erstern analog. In Hinsicht auf *Stoff* gilt von beiden *dasselbe*, in Hinsicht auf *Ausdehnung* und *Behandlung* sind sie spezifisch *verschieden*. Wenn die eine an Vollständigkeit und Strenge hoch über der andern steht, ja einen gewissen Grad der Vollkommenheit erreicht hat, so muß diese andere sich mit ihrer keineswegs geringen Aufgabe eines „psychologisirten Bildungsmittels" bescheiden und ihren edeln Wetteifer in die *innigste intensive Wirksamkeit* setzen.

Der Ausdruck Mathematik der Volksschule ist also kein leerer Name, er ist weder zu hoch noch zu niedrig, weder zu vornehm noch zu gemein: er ist gerade recht, denn er bezeichnet was er soll.

§ 4.

Wichtigkeit des mathematischen Bildungsfaches.

Die hohe Wichtigkeit des mathematischen Bildungsfaches ist theilweise schon oben berührt worden; wir werden hier seine Bedeutsamkeit noch einläßlicher ins Auge fassen * und zwar

1. in Hinsicht auf intellektuelle Bildung,
2. in Hinsicht auf moralisch ästhetische Bildung,
3. in Hinsicht auf praktisch reale Bildung.

---

* Der Verfasser des mathematischen Theils in *Nacke's* Jahresbericht von 1847 und 1848 (Fr. Bartholomäi) ärgert sich, wenn man über die pädagogische Bedeutsamkeit der Mathematik spricht. Er äußert sich etwas burschikos über diejenigen, die sich entweder in einem Panegyrikus oder in einer Philippika über diesen Unterrichtsgegenstand ergießen. Nach ihm muß man die Sache

Diese Richtungen können beim Unterrichte natürlich nicht aus einander gehalten und getrennt verfolgt werden; sie müssen zu einem harmonischen Ganzen zusammenfließen, gerade wie die mathematische Bildung mit der gesammten Geistesbildung ebenfalls ein harmonisches Ganzes ausmachen soll.

1. Mit Beziehung auf intellektuelle Bildung ist die Wichtigkeit des mathematischen Unterrichts schon aus dem Alterthum anerkannt. Schulmänner und Gelehrte stimmen darin überein, daß die Mathematik alle Geistesbildung regulire.

Zunächst weckt und schärft sie den geistigen Blick im Unterscheiden, Ausscheiden, Sichten und Sondern, Anordnen und Eintheilen; sie führt zum Zusammenfassen und Trennen, zum sichern Erkennen und Ueberblicken von Raum- und Zahleigenschaften; sie leitet an zum Kombiniren, Konstruiren und Bilden, überhaupt zur genauen Berechnung und Größenbestimmung wie zur annäherungsweisen, zur Schätzung. Dadurch bildet sie vorzüglich den Scharfsinn, der sich äußert im Auffinden der verborgensten Verschiedenheiten an scheinbar gleichen und der verdecktesten Gleichheiten an scheinbar verschiedenen Gegenständen. Hiemit natürlich verbunden ist die Uebung und Bildung der entsprechenden Sinneswerkzeuge, durch welche die intellektuelle Entwicklung zum Theil vermittelt, zum Theil unterstützt wird. Auge und Hand besonders werden zu treuen und geschickten Organen dieser Verstandesthätigkeit, das eine mehr in rezeptiver, das andere mehr in produktiver Richtung; beide treten in so innigen Dienst und in so nahe Verbindung zum Geiste, daß es bisweilen scheinen möchte, die geistige Kraft habe sich in ihnen konzentrirt.

---

tiefer nehmen und das unwissenschaftliche Gerede von dem formalen und materialen Nutzen sein lassen. Er möchte fast »toll« werden, wenn er derartige unbeliebige Exklamationen hört. Doch sagt er: »Es ist nur ein Glück, daß man nicht wirklich toll wird. Ueber den Nutzen der Mathematik ist schon so oft geredet worden — bald dumm, bald nicht dumm, und Exklamationen wie: die Mathematik ist einer von den Unterrichtsgegenständen, welche das geeignetste Bildungsmittel des Verstandes bieten, u. dgl., liest man so oft und sogar von Männern, welche pädagogischen Ruf haben, daß man sich den Aerger ganz abgewöhnt.«

Indem wir nun gleichwohl über die Wichtigkeit des mathematischen Bildungsfaches etwas einläßlicher eintreten, wünschen wir, daß der geehrte Verfasser keinen Aerger an unserer Betrachtung nehmen und uns nicht einen übertreibenden Panegyristen heißen möge.

In höherer Stufe führt unser Bildungsfach zur Fähigkeit im Generalisiren und Spezialisiren. Das Vermögen, richtig zu schließen, die gefundenen Resultate zu prüfen und zu verifiziren, führt zu immer geübterer Abstraktionskraft; der Geist erlangt diejenige Elastizität, durch welche er im Stande ist, selbst über Materien Herr zu werden, die ihrer Natur nach zu den schwierigsten gehören. Aus speziellen Fällen, die als Folgeglieder zu einander in gesetzmäßiger Verbindung stehen, vermag er eine allgemeine Regel, eine Norm, aus vielen besondern Wahrheiten eine allgemeine Wahrheit herauszufinden und umgekehrt im Allgemeinen auch das Besondere zu denken und aus jenem dieses schlußgerecht abzuleiten. Hieran knüpft sich auch das Schlußverfahren auf dem Wege der Analogie, so wie die in höhere Kreise sich erhebende und verallgemeinernde Induktion.

Endlich folgt als höchste Potenz der intellektuellen Bildung die Anregung und Entwicklung der Erfindungskraft *, die alle Mittel der Erfahrung, des Versuchs, des Zufalls und Glücks, die Resultate der einfachen Beobachtung wie der Abstraktion zu Hülfe zieht, um das Reich des Wissens, Könnens, Vermögens zu erweitern. So erschließt die Mathematik dem Schüler das eigentlichste, das realste und höchste Wissen.

Der mathematische Unterricht in der Volksschule ist demnach neben dem Sprachunterrichte das wahre Hauptfach für intellektuelle Bildung. Wie tief innerlich der Schüler beim mathematischen Denken (z. B. beim Kopfrechnen) beschäftigt ist, wie sich sein Blick, sein ganzes Wesen gleichsam nach dem Innern zuwendet und sich gegen jedes Hinderniß und jede Zerstreuung von Außen wehrt, das hat der aufmerksame Lehrer, der das Walten der Seele zu erkennen sich bemüht, sehr oft zu beobachten die Gelegenheit.

Herbart spricht sich in seinem A=B=C der Anschauung über die Bedeutung des mathematischen Unterrichts in intellektueller und ethischer Hinsicht folgendermaßen aus: „Gestalt und Zahl liegen so recht in der Mitte unsers ursprünglichen Gesichtskreises. Die Grundanfänge des Messens und

---

* Erfinden und Entdecken sind verwandt. »Zum Entdecken gehört Glück, zum Erfinden Geist, und beide können beides nicht entbehren. Wir sehen das Erkennen und Erfinden als den vorzüglichsten selbsterworbenen Besitz an. Doch sind Entdecken, Erfinden, Mittheilen, Benutzen so nahe bei einander, daß oft Mehrere bei einer solchen Handlung als Eine Person können angesehen werden«. Göthe.

Rechnens sind die ersten, fast nicht auszulassenden Vorübungen, welche auch der schwächste Verstand sich selber schafft. Hier ist nichts, was sich der Sprache entzöge ꝛc. — hier, an der einen und gleichen Stelle, wo auch das Bildungsmittel für die Anschauung liegen muß, hat man zu suchen, was sonst nirgends zu finden ist: den Faden für einen frühen Kinderunterricht, der so beschaffen sei, daß er sowohl sich als aller andern Unterweisung eine Autorität schaffe, auf deren Geheiß die Zerstreuung entweiche, die Aufmerksamkeit komme und beharre."

2. Die Bedeutsamkeit des mathematischen Bildungsfaches in moralischer und ästhetischer Beziehung wird oft entweder gar nicht oder zu wenig berücksichtigt. Wenn sein Einfluß in dieser Richtung auch weniger in die Augen springt, so ist er deßwegen nicht um so unwichtiger. Schon die obigen Betrachtungen werfen einige Reflexe auf diese Seite.

Das Moment der Ordnung, der Richtigkeit, Gesetzmäßigkeit und Wahrheit, das sich in der Mathematik vorzüglich kundgibt, wirkt — wie das sittlich gute Beispiel — wohlthuend und fördernd auf die Willenskraft ein; es erweckt Freude, Lust und Begeisterung für das Wahre im Allgemeinen und spornt dadurch den Willen an, dasselbe zu suchen und zu finden. Es ist dieß von hohem pädagogischem Werthe; denn die Wißbegierde und die Hingebung an den Lehrgegenstand von Seite des Schülers machen eine Hauptbedingung aus für das rechte Gedeihen des Unterrichtes; sie wirken mehr als jede Strenge und sind besser als alle Disziplinarmittel *.

Die Sicherheit, mit welcher der Zögling allmälig seine Messungs- und Rechnungsresultate, seine Konstruktionen ꝛc. löst, gibt ihm Vertrauen in seine Kraft und ermuthigt ihn, sich an gesteigerte Probleme zu wagen und Hindernisse und Schwierigkeiten zu überwinden, um zum Ziele des Erkennens und Könnens zu gelangen und die eigene Kraft immer mehr zu stählen. Was aber sittlich Bildendes in diesem Ringen liegt, muß nicht erst erläutert werden. Ein zu hohes Selbstvertrauen von Seite des Schülers wird indessen der Lehrer leicht durch erhöhte Anforderungen zügeln können.

---

* Grube sagt in seinem Leitfaden für den Elementarrechnungsunterricht sehr gut: »Nur aus der Vertiefung in das Lehrobjekt kann die Liebe zu demselben entstehen und nur das, was der Mensch liebt, will er auch. — Wo aber die Liebe zur Arbeit nicht durch die Arbeit selbst hervorgerufen wird, da bleiben alle Zuchtmittel und Ermahnungen vergeblich.«

Die Erfahrung, daß seine Kräfte oft nicht ausreichen, daß ihm trotz seiner errungenen schönen Hülfsmittel noch Vieles verborgen bleibt, kann den Schüler indessen nicht entmuthigen; sie gibt ihm nur die nöthige Bescheidenheit, die, mit jenem Selbstvertrauen gepaart, die Willenskraft zu einer sittlich würdigen macht und ihn um so inniger an den leitenden Lehrer fesselt.

Es kreist in der Jugend ein leichtes, heißes Blut: Hastigkeit und Uebereilung sind mit ihrer Natur verknüpft. Der erziehende Einfluß des mathematischen Unterrichts macht sich nun auch da sehr wohlthätig geltend: das gesetzmäßige Denken, die ruhige Berechnung und Messung dämpfen die Hitze, sie führen zum Ermessen und tragen so zur Verhütung leichtsinniger Ueberstürzung bei. Die Mathematik, die das Selbstdenken und Selbsthandeln des Schülers, bestehe es im bloßen Versuchen oder im bestimmten Operiren und Konstruiren, in solcher Weise in Anspruch nimmt, wie kaum ein anderes Unterrichtsfach, die dem Schüler seine Irrthümer und Fehler eben so schonungslos aufdeckt, als sie ihm anderseits sein richtiges Verfahren offen als solches herausstellt, also Strafe und Belohnung gleich zweckmäßig in sich selbst enthält, muß besonders dazu geeignet sein, den Schüler zu immer größerer Selbstständigkeit zu führen, und einen allgemein sittlich bildenden Einfluß auf ihn ausüben. Deutlich drängt sich die Lehre hervor: Erwäge, prüfe! — dann schreite besonnen, beharrlich zur That! *

---

* In obigem Sinne hat aller Schulunterricht in höherem oder geringerem Grade Theil an der sittlichen Ausbildung des Schülers. Den Einfluß des mathematischen Unterrichts auf die sittliche und so mittelbar auf die religiöse Bildung des Schülers hat man schon oft in ganz sonderbaren, ja lächerlichen Aeußerlichkeiten gesucht. Dieß geschah meistens, wenn man durch den Unterricht nicht wirklich bilden und erheben, sondern abrichten und darniederhalten wollte. So wurde von bekannter Seite her, um dem mathematischen Unterrichte mit Gewalt eine sittlich religiöse Richtung von außen zu geben, in der That schon empfohlen, die Kinder eigene religiös- und sittlich-mathematische Beispiele lösen zu lassen. Es sollte z. B. berechnet werden: wie viele Kinder Jakob von seinen verschiedenen Weibern hatte; wie viele Männer aus Israel bei Gibea von den Benjamiten erschlagen wurden; wie viele Quadratfuß des Tempels Vorschopf hatte, welcher 20 Ellen lang und 10 Ellen breit war; wie viele Egypter elendiglich im rothen Meere ertranken; wie viel ein Verschwender alljährlich seinem Beutel Schaden anthut u. s. f. Solchen absurden Zumuthungen wird hoffentlich die Volksschule in Zukunft nicht mehr ausgesetzt sein!

Die Mathematik erforscht stets nur das Wahre, alle ihre Gebilde sind auf Wahrheit gebaut; die Wahrheit aber erweckt Gefallen, Lust und Freude, weil sie *schön* ist. Die Beziehung der Mathematik auf das *ästhetische Gebiet* ist somit keine erzwungene, unnatürliche. Die Schönheit der mathematischen Darstellung, ihre „Eleganz" ist zu einer wissenschaftlichen Redensart geworden. Wenn die Mathematik sich auch damit begnügt, ihre Wahrheiten in ästhetischer Weise auszudrücken, wenn sie dagegen die Gesetze des Schönen selbst *nicht* untersucht, so werden *diese* doch sehr oft durch mathematische Hülfsmittel aufgesucht und dargestellt. Ob diese Gesetze sich stets mathematisch ausdrücken lassen, oder auf diesem Wege ausgedrückt werden sollten, kann hier nicht in untersuchende Betrachtung fallen.

Wie aber die Mathematik dem lebendig feurigen Geiste eine wohlthätige Milderung und ruhigere Reflexion überhaupt verleiht, so wirkt sie vorzüglich auch regelnd auf die Phantasie; sie gibt deren Gebilden Ordnung und Maß, damit dieselben nicht in zügelloser Laune die Gesetze des Ebenmaßes überschreiten und in Disproportion ausarten. Der Sinn für Symmetrie findet überhaupt in der Mathematik, die manchen von ihren Gebilden insbesondere den Namen „symmetrische" beilegt, eine wesentliche Anregung und Unterstützung, indem sie die Haupthülfsmittel zur symmetrischen Anordnung und Ausgleichung darbietet.

Endlich sind Schärfe und Reinheit der Darstellung zwei hervorstechende mathematische Momente, die sich in die Sphäre des ästhetisch Wirkenden übertragen.

Lesenswerth — obwohl wir nicht mit allen Punkten vollständig einverstanden sind — ist in den beiden eben besprochenen Richtungen, was *Stern* in der Vorrede zu seinem „Lehrgang des Rechnungsunterrichtes" über den geistig und sittlich bildenden Einfluß zunächst des Unterrichtes in der Zahlenlehre sagt:

„Es ist schon unzählige Mal gesagt worden, daß das Rechnen nicht bloß für die Bedürfnisse des gemeinen Lebens gelehrt und geübt werde, sondern daß es auch ein ganz vorzügliches Bildungsmittel der Denkkraft des Menschen sei. Zwar muß der Verstand des Menschen für *jedes* Gebiet menschlicher Thätigkeit, mit dem er sich zu beschäftigen hat, besonders gebildet werden; denn man versteht nur das, in welches man besondere Einsichten hat. Aber es wird nur derjenige Mensch Streben und Bedürfniß haben, sich um die Wahrheiten der menschlichen Geistesthätigkeit und deren

Einsicht zu bekümmern, der aus der stumpf hinbrütenden Gedankenlosigkeit, in die er durch den Strudel des Lebens und verkehrtes Einwirken von Andern versetzt worden ist, erwacht ist und sich von der Befangenheit der ihn beschäftigenden Gegenwart frei gemacht hat. Anstoß aber zu diesem Freimachen und zu dieser geistigen Entfesselung kann ganz vorzüglich der Rechnungsunterricht geben, indem der Mensch gezwungen wird, sich aus der Zerstreutheit zu sammeln und sich mit den inhaltlosen Zahlen, die nur Vorstellungen seiner inneren Verstandesthätigkeit sind, zu beschäftigen. Nur um so viel er innerlich bei sich nachdenkend und überlegend ist, kann er an dieser Beschäftigung Theil nehmen; sonst sind ihm die Zahlenbilder und deren Geschäftszeichen todt und bedeutungslos. Indem er sich nun hierbei urtheilend und schließend thätig erweist, erlangt er dadurch auch das Vermögen, sich mit andern nichtsinnlichen Vorstellungen und Wahrheiten zu beschäftigen. Begleitet ihn bei dieser rein geistigen Thätigkeit noch das Bewußtsein, daß er seine geistige Freithätigkeit frei zu bewegen vermöge; fühlt er in sich seine Urtheilskraft und seinen Scharfsinn, Verstecktes, Verhülltes, durch Anwendung richtiger Schlüsse zu enträthseln, und des klaren Gedankenganges Schritt für Schritt und in nothwendiger Aufeinanderfolge und Verkettung mächtig zu sein: so wird das Gefühl des jungen Schülers über Schwäche und Unvollkommenheit seiner Persönlichkeit mächtig erhoben, welches Gefühl ein gar wohlthuendes, menschliches, mit keinem andern sinnlichen Gefühl vergleichbares ist. Wie das Gefühl der Liebe dem Menschen seine Verwandtschaft mit der Gottheit auf das Unmittelbarste zum Bewußtsein bringt, so erhebt auch das Wahrheitsgefühl und das Bewußtsein seiner geistigen Kraft den erdgeborenen und erdverwobenen Menschen über seinen kümmerlichen und oft kläglichen Zustand, und läßt ihn des göttlichen Funkens lebhaft inne werden, der in ihm entzündet ist. Dieses Gefühl des Wahrheitssinnes und Schlußvermögens vermag aber auch mächtigen Einfluß auf die sittliche Haltung des Menschen auszuüben; denn, indem ein muthiges Selbstvertrauen in ihm erwacht, wirkt dasselbe auch auf die Gewinnung einer sittlichen Gesinnung wohlthätig zurück, macht ihn umsichtig und besonnen in seinen Entschließungen und ausdauernd und treu im Handeln. Wer aber in sich das Vermögen ausbildet, das Richtige zu erkennen und herauszufinden, und wer zugleich die Willensstärke sich erwirbt, dem Richtigerkannten nachzukommen und treu zu bleiben, der wird zugleich auch aller Lüge und Verstellungssucht entfremdet und wird so der Erreichung seiner höhern menschlichen Bestimmung zugeführt."

3. Die Mathematik enthält aber nicht nur für das rein geistige, sondern auch für das praktische Leben eine so reiche Fundgrube, daß deren Ausbeute für die Schule, respektive das Volk, nicht verloren gehen darf. Ihre praktische Bedeutung ist indessen die unbestrittenste, da sie gewissermaßen auf der Hand liegt und sich fast bei jeder Berufsthätigkeit täglich kundgibt. Wie viele Hülfsmittel kann sie nicht dem Bauer, dem Handwerker, dem Verkehrsmann, dem Techniker ꝛc. darbieten! Daß sie aber für die Zwecke des einfachen bürgerlichen Lebens noch weit ersprießlicher werden müßte, wenn sie durch die Schule mehr ins **geistige** Bewußtsein des Volkes gebracht würde, so daß ihre einfachsten Verrichtungen, die nicht gerade von Haus aus oder gar durch die bloße Naturerziehung schon erfaßt werden, nicht mehr als etwas für das Volksleben schon Transzendentes zu betrachten wären: das muß Jedem einleuchten, der nur einigermaßen die Tragweite ihrer Wirksamkeit zu ermessen im Stande ist.

Es wäre wohl Luxus, in eine detaillirte Aufzählung aller der Vortheile einzutreten, welche ein zweckmäßiger mathematischer Unterricht dem praktisch-bürgerlichen Leben gewähren kann; ist man in der Gegenwart doch ohnehin genugsam geneigt, den Werth eines Gegenstandes vornämlich nach seinem materiellen Nutzen zu taxiren. Allein außer Acht zu lassen ist nicht, daß bereits gewichtige öffentliche Stimmen darüber geklagt haben, daß die Vortheile der Mathematik und zeichnenden Fächer fürs Berufsleben fast gänzlich verloren gehen, und daß entschieden hervorgehoben wurde, die Schule sollte und könnte diesem Uebel steuern.

Eine Hauptbedeutung hat der mathematische Unterricht in praktischer Beziehung auch für die andern Unterrichtsfächer der Volksschule. Die Unterstützung ist indessen natürlich eine gegenseitige, wie bei aller Bildung; denn wie er einerseits durch den übrigen Unterricht (besonders den Sprach- und Natur-Anschauungs-Unterricht) unterstützt wird, so gründet sich anderseits der Unterricht im Allgemeinen (im Sprach-, Real-, ja im Kunstgebiet) sehr häufig auf die in der Mathematik erworbenen Vorstellungen, und ohne diese ist daher ein richtiges Verständniß manches längst anerkannten Schulfaches unmöglich und mangelt trotz der gerühmten, auf sogenannte Anschauung basirten Unterrichtsmethoden die wahre und eigentliche Anschauung. Der Unterricht in der Geographie, in der Naturkunde, im Zeichnen u. s. f. kann jedenfalls nur neben einem zweckmäßig ertheilten mathematischen Unterrichte recht gedeihen und namentlich sind es auch die

naturkundlichen Fächer, die für den Volksschulunterricht noch viel fruchtbarer werden sollten *.

Welche Richtung soll nun beim Unterrichte die vorherrschende sein? die formale (humanistische) oder die reale (praktische)? Oder sollen beide gleich berücksichtigt werden? — Offenbar sind beide gleich berechtigt, das liegt schon in der Idee der Volksschule. Gerade um recht für das Leben, d. h. um recht praktisch zu bilden, muß das formale Element das erste und begründende sein. Wo man vorherrschend oder gar ausschließlich praktisch sein will, ist man gerade unpraktisch, denn man gibt dem Praktischen keinen bleibenden, innern Halt. „Nur praktisch!" das ist leider seit geraumer Zeit das stereotype Losungswort der Kurzsichtigkeit und Mittelmäßigkeit; die wahre Praxis ist aber einzig die durch Erkenntniß und Einsicht erleuchtete, jede andere wird höchstens eine bloß äußerliche Aufnahme und Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten (ein ganz ephemeres Gut) erzielen. Zum größten Nachtheil für die Sache wird aber noch zu häufig den Einflüsterungen fürs „Praktische" so viel Gehör geschenkt, daß die Früchte davon (Mechanismus und materielle Utilitätshascherei) ein schlimmes Gegentheil zu jenem übertriebenen Formalismus bilden, in welchen manche Schulmänner auf der andern Seite (namentlich aus der Pestalozzi'schen Schule) in zu ausschließlicher Bevorzugung der geistigen Kraftübungen gerathen sind.

Am Schlusse unserer Betrachtung ergibt sich uns hinsichtlich der pädagogischen Bedeutsamkeit des mathematischen Unterrichts folgendes Resumé:

Die Ausbildung des mathematischen Sinnes macht eine höchst wichtige Seite der gesammten Geistesbildung aus. Sie verleiht dem Menschen einen hellen Blick mit jener Sicherheit des Urtheils,

---

* Den geistigen Zusammenhang zwischen der Mathematik und Naturkunde im Sinne der Wissenschaft aufgefaßt, drückt Professor Dr. Raabe in einer Abhandlung im IV. Bande der neuen Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft folgendermaßen aus: »Die Mathematik und die Naturwissenschaften stehen in der gegenseitigen Beziehung zu einander, daß erstere den Stoff aus den letztern zu ihren spekulativen Betrachtungen abzieht, und letztere aus der ersteren die Methode und den Geist der Strenge entlehnen; jene wird dadurch aus dem Reiche der Phantasieen in dasjenige der Wirklichkeit versetzt, und diese werden aus dem engern Kreise einfacher Beobachtungen in das Reich einer höhern und verallgemeinernden Induktion erhoben.«

die auf dem Bewußtsein vollkommener Richtigkeit und Wahrheit beruht. Dadurch weist sie ihm die Standlinie an, auf welcher er sicher fortschreitend selbst zur Erkenntniß von Verhältnissen gelangen kann, die ihm anfänglich ferne liegen. Sie übt ferner auf ihn einen sittlich und ästhetisch bildenden Einfluß aus, indem sie ihm Lust und Begeisterung fürs Wahre und Schöne, Zuversicht, Besonnenheit und Ausdauer einflößt; und endlich erleichtert und vermittelt sie ihm hauptsächlich das Verständniß der Natur und des praktischen Lebens, für welches sie ihm Hülfsmittel an die Hand gibt, die zu den unentbehrlichsten und zuverlässigsten gehören.

§ 5.

Stellung des mathematischen Unterrichts zu dem übrigen Volksschulunterricht.

Es liegt nicht in unserer Aufgabe, in eine begriffsgemäße Deduktion aller einzelnen Lehrfächer der Volksschule einzutreten; dieß ist Sache der allgemeinen Pädagogik; es würde hier auch nichts nützen. Wir hatten bloß die innere Nothwendigkeit des uns vorgesetzten Schulfaches ins Auge zu fassen, um uns über sein Wesen und seine Bedeutung die nöthige Klarheit zu verschaffen. Nun müssen wir noch die Stellung etwas näher würdigen, in welcher es sich zu den Unterrichtsfächern der Volksschule im Allgemeinen befindet. Wenn die Pädagogik dieselben aufführt als:

Religion. Sprache. Mathematik.

Kunst. Weltkunde.

so wollen wir hier keineswegs darstellen, wie das eine unwichtiger sei als das andere, sondern wie jedes auf jedes einen fördernden Einfluß ausübe, ja daß alle gleich nothwendig seien. Mit dem Satze: alle Lehrgegenstände der allgemein menschlichen Bildung sind gleich nothwendig, hat es eine ähnliche Bewandtniß, wie z. B. mit dem physikalischen Satze: alle Körper sind gleich schwer. Wie die allgemeine Schwere alle Körper affizirt, so zieht die harmonische Ausbildung der Seele alle jene Bildungsmittel zur Mitwirkung; wie aber nicht alle Körper ein gleiches Gewicht haben, so bieten uns auch nicht alle jene Bildungsmittel ein gleich massenhaftes Material zur Durcharbeitung für die allgemeine Menschenbildung dar. Die Sprache z. B. er-

öffnet der Volksschule ein umfangsreicheres Material zur Behandlung als die Mathematik, weil jene die richtige Darstellung der Gedanken überhaupt lehrt und in ihr sich alles ausdrückt, was zur bestimmten Form des Wissens, Wollens und Fühlens geworden ist u. s. f.

Das Bildungsmittel als solches ist daher bedingt durch die Idee der rein menschlichen Bildung, seine Ausdehnung und Begränzung aber hauptsächlich durch die Anforderungen des Lebens, die Dauer der Bildungszeit und die Rücksicht auf den gesammten Unterrichtsstoff. Um einen Rangstreit unter den Bildungsmitteln kann es sich nun durchaus nicht handeln, nichts wäre unnützer, ja verderblicher. Es darf keinem Unterrichte eine ungebührliche Bevorzugung in Stoffausdehnung und Behandlungsweise zu Theil, noch weniger darf der eine durch den andern verdrängt oder verschlungen werden; die Einheit der Volksschule verlangt die verhältnißmäßige Berücksichtigung sämmtlicher Bildungsmittel. Daher vindiziren wir der Mathematik der Volksschule nur das ungeschmälerte Recht der Selbstständigkeit neben den andern Schulfächern, das Recht, ein zusammenhängendes Ganzes zu bilden, das nicht zerbröckelt und in stückweisen Anhängseln diesem oder jenem Unterrichtszweige zugetheilt werden darf, so daß etwa ein Stück bei Anlaß des Sprachunterrichtes, ein anderes bei Gelegenheit der Geographie, der Naturkunde, des Zeichnens ꝛc. flickweise behandelt würde.

Man spricht bisweilen vom harmonischen Ineinandergreifen der Schulfächer und von dem Verderben eines getrennten einseitigen Fachunterrichts, allein unter diesem Ineinandergreifen wird man doch wohl nicht jene Zerbröckelung und flickweise Behandlung einzelner Unterrichtsgegenstände verstehen, sondern vielmehr ihre Behandlung im Verhältniß zu einander, die gegenseitige Unterstützung, das Maß- und Zielhalten nach allen Seiten. Wenn ich mit einem Gesangbildungsvereine ein Tonstück studire, muß ich jeder Stimme ihre Selbstständigkeit belassen, ich darf keine zerstückeln und die Theile bald der, bald jener als Anhängsel beigeben: ich muß jede für sich sorgfältig pflegen und üben. Allein dieß hat ebenfalls nicht so zu geschehen, als ob keine von der andern etwas wissen, keine auf die andere Rücksicht nehmen sollte; die rechte Harmonie verlangt die gegenseitige Rücksichtnahme der einzelnen Stimmen auf einander, das gegenseitige Unterstützen, Nachgeben, Maß- und Zielhalten, und dadurch entsteht das harmonische Ineinandergreifen der einzelnen Stimmen.

Wie also zur vollständigen und vollkommenen Harmonie in der Tonwelt alle Stimmen gleich nothwendig sind, keine die andere verdrängen,

keine vernachlässigt oder auf Unkosten der andern hervorgehoben werden darf, so stehen auch die Bildungszweige der Volksschule in einer ähnlichen Wechselbeziehung: jedem gebührt seine selbstständige Stellung, seine besondere Aufmerksamkeit; keiner darf auf Unkosten des andern zu viel Zeit und Kraft in Anspruch nehmen; durch die einheitlich zusammenwirkende Pflege **aller** soll das Eine Ziel der Harmonie erreicht, die Eine Aufgabe der Volksschule gelöst werden.

Diese Stellung der Mathematik zu dem gesammten Volksschulunterricht werden wir bei allem Folgenden nie aus dem Auge verlieren, das Nothwendige und Wesentliche soll den ausschließlichen Gegenstand unserer Betrachtung und Darstellung bilden. Glücklicher Weise kommt es auch bei der Mathematik der Volksschule fast am wenigsten darauf an, ob gerade die und die Menge von Stoff verarbeitet, die und die Beispiele und Aufgaben gelöst worden seien. Man kann möglicher Weise sehr viel Stoff durchgenommen und doch sehr wenig Bleibendes erreicht, kurz sehr wenig zur Bildung mitgewirkt haben. Es kommt Alles darauf an, daß der Unterricht möglichst intensiv wirke; der Schüler kann und soll nicht alle Einzelnheiten lernen, die Schule dringe auf das Wesentliche, Charakteristische, damit er dieses so erfasse und sich daran so kräftige, daß er die Aufgaben, auf die ihn das Leben führt und welche die Schule nicht gerade speziell vorgesehen, dennoch verstehen und lösen kann. Was aber jenes Wesentliche und Charakteristische ist, das hat die Methode heraus zu stellen, und wir verweisen in dieser Beziehung auf die betreffenden weiter unten folgenden Paragraphen.

§ 6.

Ausscheidung der Geometrie. Verhältniß derselben zur Arithmetik.

Wir haben bis jetzt das mathematische Gebiet ungetheilt als solches betrachtet und nicht von der Geometrie und der Arithmetik einzeln gesprochen. Es geschah dieß einestheils, um auf die Zusammengehörigkeit und Koordination der beiden Zweige hinzuweisen, anderntheils, um bei der Allgemeinheit der ersten Fragen nicht an zwei Orten das Gleiche sagen zu müssen. Jetzt müssen wir aber trennen, damit wir bei jedem der beiden Zweige um so einläßlicher und richtiger verfahren können. Die Geometrie wird vorderhand bei Seite gelassen und später im zweiten Theile der „Mathematik der Volksschule" die entsprechende Ausführung finden. — Nun aber

noch ein Wort über das gegenseitige Verhältniß zwischen der Geometrie und Arithmetik.

Wenn wir auf den geschichtlichen Entwicklungsgang der einzelnen Unterrichtsfächer der Volksschule hinsehen, so fällt uns auf, daß der Geometrie nicht bloß weit weniger Anerkennung und Aufmerksamkeit zu Theil ward als der Arithmetik, sondern daß jene überhaupt zu den Unterrichtsgegenständen gehört, die in der Volksschule bis jetzt am wenigsten Glück gemacht haben, ja daß sie heutzutage noch in sehr vielen sogenannten Volksschulen ganz unberücksichtigt bleibt und selbst an den Orten, wo sie sich noch eine Stelle im Stundenplan erhalten hat, meist eher geduldet als wirklich anerkannt ist.

Die Geometrie, bei den Alten als Lehrgegenstand (hauptsächlich auch im Sinne der Geistesgymnastik) hoch geschätzt, hat sich dagegen in unserer Pädagogik bis jetzt kaum aufrecht erhalten können. Es würde nichts nützen, über die Hintansetzung der Mißkannten ein Klagelied anzustimmen, denn die Sache hat ihren guten Grund; allein derselbe ist nicht in der Natur des Lehrgegenstandes, sondern in dessen unzweckmäßiger Behandlung, überhaupt in äußern Verhältnissen zu suchen. Einestheils war die Schule des Alterthums eine ganz andere Schule als die Schule der Gegenwart, insbesondere unsere Volks-Kinderschule, und anderseits haben eine Menge unglücklicher Versuche dem Kredite dieses Schulfaches mehr geschadet als genützt; es war ein Kampf: da stand auf der einen Seite die wissenschaftliche Schulgeometrie der Alten, an der Spitze der gewappnete, durch das System einer unumstößlichen Logik herrschende Euklid; auf der andern Seite der Troß der Formenreuter, die kombinirten, griffelten und tändelten. Beide Parteien haben auf dem Felde der Volksschule nichts erfochten, keine behielt das Feld. Die erste hätte ausschließlich in den höhern Regionen, denen sie mit Recht angehört, verbleiben sollen, und die zweite wäre besser gar nie erschienen, denn sie hat am meisten geschadet. In der That, wenn man jene über alle Maßen umfangsreichen Bearbeitungen der Formenlehre mit all' den kindischen Spielereien durchgeht, muß man sich nicht wundern, warum eine so inhaltlose Formen- und Namenlehre keine bleibende Aufnahme finden konnte. Die Volksschule hat wirklich auch keine Zeit hiezu, und wenn sie noch solche übrig hätte, dürfte sie dieselbe im Interesse wahrhafter Bildung nicht vertändeln.

So ist es wirklich gekommen, daß dieses Fach auf dem Gebiete des

praktischen Schullebens in einigen Verruf gerieth, während man den Rechnungsunterricht, der im Allgemeinen weit glücklicher und mit mehr Vorliebe bearbeitet wurde und der daher auch festere Wurzeln geschlagen, nicht antasten durfte. Dann ist endlich das Zurückdrängen nach der frühern Kirchenschule, wodurch der Fortschritt eines naturgemäßen Unterrichts überhaupt, so wie die Aufnahme neuer Bildungsmittel insbesondere gehindert werden sollte, dem Gedeihen des geometrischen Unterrichts in der Volksschule nicht förderlich gewesen, so wie in eben diesem Sinne eine zu große Stoffanhäufung in den übrigen Unterrichtsfächern nachtheilig mitwirkte.

Daß indessen die Geometrie, vom richtigen Standpunkte aus aufgefaßt, für die Volksschule sehr fruchtbringend sein kann, ja wie kaum ein anderes Fach geeignet sein dürfte, den Bedingungen eines wahrhaften (lebendigen) Anschauungsunterrichtes Genüge zu leisten und eine Quelle der nützlichsten Volksbildung zu sein, ist für den Sachkundigen nicht schwer einzusehen. Ebenso ergibt sich leicht, welcher Antheil an dem oben betrachteten Werthe des allgemeinen mathematischen Unterrichtes ihr besonders angehört.

In welcher nähern Beziehung stehen nun Geometrie und Arithmetik zu einander? Beide betrachten Größen, aber Größen, die in ihrer Bildung sehr von einander verschieden sind. — Die geometrischen Größen sind kontinuirliche, d. h. solche, die nach dem Gesetze der Stetigkeit (Kontinuität) entstehen; denn die Geometrie bildet die Raumgrößen durch den Akt einer stetigen Bewegung *. Die zweiten aber, die Zahlgrößen, sind Zusammen-

* »Wer z. B. ein Gebirge anschaut, muß es durch die Bewegung seines Blicks umschreiben. Der Berg erhebt sich, die Bergreihe läuft fort. Solche Ausdrücke von stehenden Gegenständen gebraucht, deuten auf die Bewegung der Anschauung hin. Wer sich ein Gebirge, ohne es anzuschauen, vorstellen will, muß es in dem Raum des Gedankens entwerfen, und er entwirft es durch nichts Anderes, als durch die Bewegung seines innern Blicks. Was in dem Beispiele des größern Gegenstandes offenbar ist, das geschieht auch bei den kleinern. Der innere Raum, in welchem die Vorstellung gleichsam zeichnet, entsteht für den Gedanken nur durch die Bewegung, und was sie darin zeichnet, wird wieder durch die vor dem geistigen Blicke umlaufenden Punkte, durch die sich dehnenden und biegenden Linien, durch die sich hebenden und senkenden, öffnenden und abschließenden Flächen. Wenn die innere Bewegung alle diese Thätigkeiten wie mit einem Schlage vollführt, so ist das ein Wunder der Geschicklichkeit und der geistigen Gegenwart, aber es darf doch um dieser Schnelligkeit willen, welche das auf die eigene That aufmerksame Bewußtsein fast über-

setzungen aus einer Einheit oder Zusammensetzungen aus diskreten Theilen einer Einheit. Wenn z. B. auf einer 5 Zoll langen Geraden von ihrem einen Ende an eine zweite von 4 Zoll Länge abgetragen wird, so ist der Abstand der beiden andern Endpunkte von einander nach der Sprache der Arithmetik = (5 — 4) Zoll, d. i. 1 Zoll; die Geometrie bietet für diesen Abstand eine bestimmt begrenzte Linie von 1 Zoll Länge. Werden nun die beiden Geraden um ihren gemeinschaftlichen Endpunkt von einander gedreht, so beginnt der Abstand der andern Endpunkte von einander zuzunehmen, und zwar eine geraume Zeit lang um so mehr, je weiter die Geraden von einander weggedreht werden. Diese Zunahme nun ist eben eine stetige; sie entsteht durch allmäliges Wachsen und sie wird nicht aus Bruchtheilchen von 1 Zoll (auch wenn diese noch so klein angenommen würden) Stück für Stück zusammengesetzt. Die Arithmetik aber, die diese Zunahme berechnet, muß sie dagegen gerade aus solchen diskreten Theilen von der Einheit (1 ″) zusammensetzen, das liegt in der Natur der Arithmetik, die eben immer gewisse gleiche Theile zählt, überhaupt mit ihnen operirt und auf diese Weise ihre Größen (Zahlen) bildet. Sie sagt z. B.: Sind die Geraden eine halbe Umdrehung von einander weggedreht, so ist der Abstand der äußern Endpunkte = 5 ″ + 4 ″ = 9 ″; bei einer Viertelsumdrehung dagegen ist derselbe = 6″,403..... Das berechnet die Arithmetik und sie setzt diese Größen, welche die Geometrie in bestimmt begränzten geraden Linien darstellt, aus Stücken einer Einheit (wie des Zolls) zusammen, hier, indem sie zuerst das Sechsfache des Zolles, dann $^4/_{10}$, dann $^3/_{1000}$ desselben u. s. f. nimmt; ja sie kann die Größen, die die geometrische Konstruktion immer ganz genau gibt, oft nur annäherungsweise durch eben diese Hinzufügung der nach dem Zahlensystem immer kleiner werdenden, den wahren Werth aber nie ganz erschöpfenden diskreten Theilchen der Einheit ausdrücken *.

---

holt, nicht übersehen werden, daß dieß Wunder nur durch die Bewegung geschieht. Wer etwa das Keppler'sche Gesetz denkt, der Planet bewegt sich in einer elliptischen Bahn, der muß das in sich thun, was er sagt, daß der Planet thue. In diesem Beispiele kann man sich nicht auf eine äußere, uns gleichsam von Außen eingedrückte Anschauung berufen; denn durch eine solche würde nur die scheinbare Bewegung, und diese wieder nur aus berechneten Fragmenten der Beobachtung erreicht. Der Geist beschreibt in dem Raume des Gedankens die fragliche Ellipse.« Trendelenburgs logische Untersuchungen.

* Dessen ungeachtet bedient man sich bei der Geometrie dennoch, wo man kann, der Rechnung, weil das praktische Resultat, das sie liefert, noch weit ge-

Die Operationen (Konstruktionen) der Geometrie bringen also stetige Größen hervor, die Operationen der Arithmetik dagegen solche, die aus einer bestimmten Einheit vermittelst irgend einer Rechnungsweise entstehen.

Welches Gebiet ist nun das allgemeinere, das geometrische oder das arithmetische? Man könnte sagen, das Rechnen sei allgemeiner als die Geometrie, da diese in vielen Fällen als eine Anwendung desselben betrachtet werden kann. Dieß muß zum guten Theil auch zugegeben werden und zwar um so mehr, als die Behandlung der Geometrie mittelst des Rechnens immer häufiger geworden ist. Zudem erscheint das Rechnen von diesem Gesichtspunkte aus in solcher Allgemeinheit, daß wir eine unendliche Menge von Aufgaben aus dem praktischen Leben, aus der Weltkunde ꝛc. als einfache Anwendungen des Rechnens betrachten können. Indessen darf nicht außer Acht gelassen werden, daß hier stets Betrachtungen vorausgehen müssen, die keineswegs arithmetischer Natur sind, sondern sich aus der Eigenthümlichkeit des zu behandelnden Stoffes ergeben, und diese bilden gerade die Hauptsache, ohne welche das Hülfsmittel der Zahl nicht angewendet werden kann.

So bleibt bei der Geometrie stets ein rein geometrischer Theil übrig, der nicht unter den Rahmen des Rechnens fällt, sondern sich aus dem Wesen der Raumgebilde ergibt und der daher das Wichtigste an der Sache ist; bevor man da rechnen kann, muß die rein geometrische Betrachtung durchgeführt und erst hierdurch ein gewisses Rechnungsproblem abgeleitet werden. Jenes ist das bedingende Element, dieses das bedingte.

Wie aber viele geometrische Resultate vermittelst der Arithmetik zu Tage gefördert werden, so haben hinwieder viele Zahlenverhältnisse ihren Ursprung in der Geometrie und sie finden hier — auch wenn sie an sich einer ganz selbstständigen Begründung fähig sind — dennoch ihre schönste Veranschaulichung. Es ist die Geometrie gewissermaßen die Wiege für die Ausbildung der Arithmetik; das hat sich auch geschichtlich bestätigt.

Für die Volksschule bildet dieß keinen unwichtigen Punkt. Lange be-

---

nauer ist, als dasjenige, das die mechanische Ausführung der geometrischen Konstruktion uns vorführt, denn die mechanischen Hülfsmittel, auch noch so vervollkommnet, erreichen nie die Genauigkeit der Rechnung, die zu einem beliebig hohen Grad der Annäherung gelangen kann.

vor das Kind zum Rechnen gelangt, ehe es nur eine Ahnung vom Zählen und von der Zahl hat, nimmt es Anschauungen aus seinem Gesichtskreise in sein Inneres auf, es bildet sich allmälig Vorstellungen von räumlichen Gestalten und dieß ist eine vorbereitend *geometrische* Thätigkeit. Nach und nach nimmt es unter denselben eine gewisse Uebereinstimmung wahr, es beginnt zu vergleichen und die Vergleichung führt es auf das Erkennen des im Raumverhältnisse Gleichartigen, bestehe dieses nun worin es wolle. Diese Wahrnehmung des öftern Vorkommens des Gleichartigen bildet die Anregung zur Zahlbildung, zum Rechnen überhaupt. Jenes Gleichartige, das sich irgendwo wiederholt, wird zur *Einheit*; es tritt der nothwendige geistige Trieb hervor, die Wiederholung der Einheit aufzufassen, d. h. es entsteht der Grundakt des arithmetischen Denkens, das *Zählen*, und mit demselben die Bildung der absoluten Zahlen von *eins* an. Was also allem Rechnen vorausgeht, das ist im Grunde etwas Geometrisches, nämlich im Allgemeinen die Auffassung gleicher oder ähnlicher Formen und Gebilde, überhaupt die Auffassung des Gleichartigen. Dieß wird uns später in methodischer Beziehung einen fruchtbaren Anhaltspunkt bilden.

Welcher der beiden Zweige nun bietet für den Volksschulunterricht mehr Schwierigkeiten dar? — Das Rechnungsgebiet, das, wie wir oben gesehen, in vielen Beziehungen allgemeiner ist als das geometrische, ist auch das umfassendere, und macht schon deßwegen mehr Anforderungen an Zeit und Kraft. Es ist aber auch das abstraktere. Denn obwohl beide der Abstraktion nicht ermangeln, so sind die Gebilde des Raumes doch mehr im Bereiche der äußern Anschauung liegend, als diejenigen der Zahl: jene können mehr *gesehen*, diese müssen mehr *begriffen* werden. Welche sind also leichter aufzufassen? Man stößt bei Vielen nicht selten auf die Besorgniß und das Vorurtheil zugleich, es sei die Geometrie zu abstrakt für die Schüler, sie sei schwieriger als das Rechnen. Offenbar rührt dieß von einer unrichtigen Auffassung der beiden Unterrichtszweige und von der Scheu her, welche eine unzweckmäßige Behandlung jenes Faches, die die Aufgabe und die Kräfte der Volksschule nicht gehörig in Anschlag brachte, nothwendig hervorbringen mußte. Wird die Geometrie auf ihren wirklichen Grund in der geistigen Funktion des Menschen zurückgeführt, so muß gerade dieser Unterricht am wenigsten abstrakt sein und zugleich dem Rechnungsunterrichte eine konkretere Unterlage bilden. Man lernt aber nicht schwimmen, so lange man im Trockenen sitzen bleibt, und jene Scheu wird um so mehr abnehmen, je naturgemäßer die Geometrie für die Volksschule bearbeitet werden wird.

§ 7.

Umfang und Inhalt des Rechnungsunterrichts der Volksschule.

Im Allgemeinen fällt der geistige Inhalt der Mathematik der Volksschule ins Elementargebiet der mathematischen Wissenschaft; der materielle Inhalt ist in beiden aus der Natur und dem Leben gezogen. Welches sind nun die wissenschaftlichen Hülfsmittel, die der Rechnungsunterricht der Volksschule insbesondere zu benutzen hat, um seinen Lehrstoff mit Erfolg zu bemeistern? Hat etwa die Wissenschaft selbst die Schranken gezogen, die als natürliche Grenzen für den Volksschulunterricht betrachtet werden können?

Die wissenschaftlichen Hülfsmittel des gesammten Rechnungsgebietes sind:

1. Die arithmetischen (algebraischen) Operationen.
2. Die Funktions-Operationen.

Die erstern beziehen sich entweder auf bestimmt gezählte Vielheiten (numerische Größen, d. h. wirkliche Zahlen, seien diese in ganzen Einheiten oder Theilen derselben ausgedrückt) oder auf algebraische (Literal-) Größen, das sind solche, die durch allgemeine Zeichen (Buchstaben) eine willkürliche Anzahl von Einheiten oder Theilen derselben ausdrücken.

Die zweiten beziehen sich auf solche Größen, die von einer oder mehrern allgemeinen Größen in der Weise abhängig sind, daß sie sich zugleich mit diesen ändern. Hiebei können aber die in den vorigen Operationen betrachteten Größen ebenfalls noch auftreten. Die Funktionsoperationen schließen sich am innigsten an das Gesetz der Kontinuität an, nach welchem die Größen in der Natur, überhaupt im Raume, gebildet sind.

Unter den angeführten Operationen bilden die sogenannten vier Spezies die Grundstufe, aus der sich die höhern algebraischen, so wie die Funktionsoperationen im Entwicklungsgange der Wissenschaft ergeben haben. Diese Grundstufe liegt noch in der Sphäre der unmittelbaren Anschauung, so wie im Bereiche des allgemeinen bürgerlichen Lebens. So lange es noch ein Volk und eine Volksschule gibt, wird auch nur diese erste Rechnungsstufe der Auffassung von Jedermann zugänglich, weil für Jedermann anschaulich, sein. Was über derselben liegt, kann nie Anspruch auf allgemeines Verständniß machen, wird im Gegentheil ein für das Volksleben wirklich transzendentes Gebiet bilden, das Sache der Wissenschaft und der speziellen Fachthätigkeit bleiben wird. Es bieten uns nämlich die

Aufgaben des gewöhnlichen Lebens nur bestimmte (wirkliche) Zahlen, um aus diesen neue zu finden; nie aber wird es im Geiste desselben liegen, mit allgemeinen Größen zu rechnen, um daraus wieder allgemeine Größen oder deren numerische Werthe oder irgend welche Zahlengesetze abzuleiten. Daraus folgt, daß alle diejenigen Zahlverbindungen, die eine oder mehrere Buchstabengrößen antizipiren, nicht in unsern Kreis fallen. Deßwegen können die über den vier Spezies liegenden Operationen, die zu ihrem wirklichen Verständniß der Einführung allgemeiner Zahlzeichen unumgänglich bedürfen, nicht als in die Mathematik der Volksschule gehörend angesehen werden. Das Gleiche muß von den algebraischen Disziplinen der Gleichungen (die Proportionen natürlich mitbegriffen) gesagt werden.

Manche neuere Rechnungsbücher der Volksschule legen den Schülern unter dem Titel von algebraischen Aufgaben Zahlengleichungen vom ersten Grad vor. Wir finden dieß nach dem bereits Gesagten durchaus verwerflich. Entweder laufen diese Aufgaben auf unnütze Spielereien hinaus, oder sie übersteigen die Kräfte der Volksschule. Ganz dasselbe gilt von jenen Kunststücken im Wurzelausziehen, die man ebenfalls nur zu häufig noch von der Volksschule verlangt.

Was die Proportionen anbetrifft, so läßt sich zwar nicht läugnen, daß dieselben eine sehr interessante und elegante Anwendung aufs praktische Rechnen zulassen; allein abgesehen hievon, daß diese schon künstlichen Zahlenverknüpfungen nach dem oben Gesagten dem Wesen der Volksschule fremd sind, muß behauptet werden, daß jedes Rechnungsbeispiel, das z. B. auf die kombinirte Multiplikation und Division führt, einfacher und schneller durch diese Operationsverbindung, als durch Proportionen, gelöst werden kann.

Ein weiterer Grund, warum von den arithmetischen Operationen nur die vier Spezies in den Kreis der Volksschule gehören, liegt darin, daß man im bürgerlichen Leben stets die konkrete (benannte) Zahl den Rechnungen zu Grunde legt. Dieselbe kann aber eben nur jenen vier ersten Operationen unterzogen werden. Wir können z. B. rechnen:

$12' + 7' = 19'$ (wobei das Zeichen $'$ das
$19' - 7' = 12'$ Längenmaß Fuß bezeichne.)
$12' \times 3 = 36'$
$36' : 3 = 12'$
$36' : 12' = 3$

nie aber: $12' \times 12'$ oder $(12')^2$, $(12')^3$ u. s. f.

eben so wenig: $\sqrt{}$(16 □'), $\sqrt{}$(25 □'), $\sqrt[3]{}$(27 Kubikfuß) u. s. f. noch weniger bei einer folgenden, höhern Operation.

Wie wir also über die Division hinauskommen, ist es ausschließlich die abstrakte (reine) Zahl, die der Operation unterzogen wird; dagegen können die Zahlen bei der Addition und Subtraktion, die zu vervielfachenden, zu theilenden und zu messenden Zahlen ganz wohl benannt sein. Da es aber entschieden im Geiste des Volksrechnens liegt, von bestimmten benannten Zahlen auszugehen und unbenannte Zahlen nur als Leitzahlen anzusehen, die die Rechnungsverrichtung anzeigen, nach welcher die erstern zu behandeln sind, um ein gewisses Rechnungsresultat zu geben, so müssen wir alle über der Division liegenden Operationen als solche betrachten, die nicht bloß die Kräfte der allgemeinen Volksschule übersteigen, sondern auch dem Geiste und der Bedeutung derselben fremd sind.

Endlich ist die Frage, ob die gebrochenen Zahlen in den Kreis der Volksschule gehören, noch zu erörtern.

Dem gewöhnlichen Leben sind die Bruchgrößen durchaus nichts Fremdes, die einfachsten Theilungen und Messungen führen schon darauf. Die Unterabtheilungen aller unserer Maße, Münzen und Gewichte sind in Beziehung zu ihren übergeordneten Einheiten Bruchtheile. Jedenfalls sind die Bruchzahlen nicht Etwas, das durch die Wissenschaft ins Volksleben hinein gebracht wurde. Dieses schafft sie sich (wenigstens die einfacheren) jeden Tag selbst.

Etwas anders lautet freilich die Frage: soll die Volksschule auch das eigentliche Rechnen und Operiren mit Brüchen lehren? Wir antworten auch hier entschieden mit ja, insofern das Bruchrechnen ganz in den gleichen Anschauungskreis gezogen wird, wie das Rechnen mit ganzen Zahlen, so daß jenes als ein einfaches Zählen von Bruchtheilen erscheint, wie dieses als ein einfaches Zählen von ganzen Einheiten, wobei die vier Spezies bloße einander übergeordnete Zählformen bilden. In theoretischer Beziehung zeigt sich die innige Zusammengehörigkeit der vier Operationen und des Bruchs noch unzweifelhafter. Er fließt unmittelbar aus der Division und bildet den natürlichsten Schlußstein der vier Operationen, da er deren Totalbegriff in sich faßt, indem er Summe und Quotient zugleich ist.

Der Umfang des Rechnungsunterrichtes der Volksschule * ist also durch

* Nämlich der allgemeinen, für die ganze Masse.

die vier arithmetischen Grundoperationen an absoluten ganzen und gebrochenen Zahlen gegeben, sein Inhalt liegt in dem Zahlgebiete, das dieselben erheischen, und in dem Rechnungsstoffe, den das Leben in so mannigfaltiger Verbindung und so reicher Auswahl darbietet.

Man wird uns von einer Seite einwenden, daß wir den Rechnungsunterricht der Volksschule zu stark beschnitten und dadurch demselben sehr schöne und geistbildende Disziplinen, wie z. B. die Lösung und Anwendung von Proportionen, überhaupt von einfachen algebraischen Gleichungen, die Wurzelausziehung ꝛc., entzogen haben. Wir antworten: Wenn die Volksschule die geeigneten Mittel hat, um ihren Zweck zu erreichen, so bedarf sie deren nicht noch weitere; dazu hat sie keine Zeit und keine Kraft, sie würde ihre Wirksamkeit zersplittern und eben dadurch ihr Ziel verfehlen. Gerade das hat ihr stets am wenigsten gefrommt, hat ihr selbst entschiedenen Nachtheil gebracht, daß oft durch möglichst viele Mittel der Zweck der einzelnen Unterrichtsfächer erreicht werden sollte; wir verlangen hiefür möglichst wenige und einfache, aber möglichst wirksame (alle nothwendigen) Mittel. Um der bloß formalen oder gar wissenschaftlichen Bedeutung willen darf kein Unterrichtsstoff in die Volksschule hereingezogen werden, das hätte Ueberfüllung und mit derselben unausbleibenden Nachtheil zur Folge und gerade die oben genannten Disziplinen sind zur Lösung der Aufgabe der Volksschule theils ganz entbehrlich, theils gehen sie über deren Horizont und würden hier also zum bloßen Aufwand dienen. Daß dagegen das oben bezeichnete Gebiet ohne weitere Hülfsmittel nicht nur den Forderungen des bürgerlichen Lebens vollständig Genüge leistet, sondern daß dasselbe auch einen vorzüglich reichen Inhalt zur intensiven Geistesbildung enthalte, werden wir suchen in der nachfolgenden speziellen Ausführung unsers Gegenstandes zu zeigen.

Ueber Methodisches.

§ 8.

Die Methode der Mathematik der Volksschule im Allgemeinen.

Motto: „Die Methode ist das Vorzüglichste an jedem Lehrgegenstand (in jeder Wissenschaft). Wer sie erlangt hat, der hat das Lehrobject selbst errungen; er hat es als eine freie, leichte, unverlierbare Erkenntniß."

Dr. Aloys Mayr, Untersuchungen über die Methode.

Der Begriff der Methode — vielleicht der wichtigste auf dem Gebiete des Unterrichts — wird, besonders im praktischen Schulleben, in sehr verschiedenem Sinne aufgefaßt; dennoch liegt ihm nur *eine* und zwar eine ganz bestimmte Bedeutung zu Grunde. Wenn man etwa behaupten hört, jeder Lehrer habe seine eigene Methode, so ist dieses Wort jedenfalls nicht in seiner wahren Bedeutung gebraucht, und es findet ein ähnlicher Mißbrauch statt, wie wenn man spräche: jedes Haus ist in einem eigenen Style erbaut.

Wer nach einem eigenen, allgemeinen Prinzipe einen Lehrgegenstand originell gestaltet, so daß dieses Prinzip der Entwicklungsgrund des *gesammten* Lehrstoffes wird, der hat eine *Methode* aufgestellt. Wer, ohne im Grundprinzipe abzuweichen, einzelne Punkte des Unterrichts bloß insoweit eigenthümlich behandelt, als seine subjektive Ansicht, oder seine Individualität es mit sich bringt, der handhabt ein spezielles *Lehrverfahren*, eine besondere *Manier*. Jeder einsichtsvolle und selbstständige Lehrer kommt, indem er bei seinem Unterricht eine bestimmte anerkannte Methode befolgt, nach und nach zu einer eigenen Manier, deßwegen wähnt er aber nicht, eine besondere Methode zu haben *.

---

* Diesterweg spricht sich hierüber in seinem »Wegweiser« (1850) unter Anderm folgendermaßen aus:

»Ganz verwerflich ist daher die Meinung derer, welche nur subjektive Unterschiede in den Methoden anerkennen wollen, daß sich die eine Methode für jene, die andere für diese Lehrer- und Schülerindividualität eigne, von *einer*, als der besten und darum allein guten, nicht die Rede sein könne. Wäre diese Ansicht begründet, so würde sich jede Methodologie in Nichts auflösen und jeder

Ist nun die Methode etwas, das nur für den Lehrer da ist, d. h. das nur der Lehrer verstehen soll, und von dem der Schüler nichts zu wissen braucht? — Nach der Art und Weise zu schließen, wie z. B. der mathematische Unterricht in der Volksschule nicht selten ertheilt wird, müssen Viele die Frage bejahen. Ja wir glauben, es würden Manche den Kopf schütteln, wenn man ihnen zumuthen wollte, den Schülern nicht nur den Lehrgegenstand beizubringen, sondern zugleich seine Methode nach ihrer objektiven Seite. Und doch muß es geschehen!

Man klagt im Schulleben so sehr über die Vergeßlichkeit der Schüler; es ist wahr: das Gedächtniß bietet keine Garantie zur Sicherung der Erfolge des Unterrichts; es ist kein Schrein, der fest genug verschlossen wäre, um geistiges Gut zu bewahren. Wir müssen etwas haben, woran wir die geistigen Erwerbnisse fesseln, von dem wir dieselben so abhängig machen können, daß es das Erzeugende ist, wie diese das Erzeugte sind, so daß, wenn uns auch im Laufe der Zeit manche Einzelnheit entschwindet, wir doch das Mittel besitzen, durch welches wir in uns beständig neu schaffen können, was wir zu wissen bedürfen. Dieses Mittel ist kein anderes als die Methode. Durch sie werden die geistigen Güter erst unser Eigenthum, da sie dieselben uns nicht verlieren läßt; sie ist die Kraft, durch die wir in unserer freilich sehr eng begränzten Erkenntnißwelt sprechen können: Es werde Licht!

Jene Klagen über die Vergeßlichkeit der Schüler werden sich also in

---

Einzelne das Recht haben, auf seine Weise sich eine Ansicht von seiner oder des Schülers Individualität zu bilden und eine Methode **ad libitum** zu wählen. Das kann aber die Meinung derer, welche die Menschennatur als die eine und gleiche und ihre Entwickelungsgesetze als dieselben erkannt haben, und in jedem Unterrichtsstoff eine Eigenthümlichkeit auffinden, nicht sein. Darum darf die Wahl der Methode im Allgemeinen dem Belieben der Lehrer nicht überlassen werden. — Die Manier dagegen ist frei zu geben; die Methode aber nicht. Ob z. B. ein Lehrer in dem Rechnungsunterricht als Veranschaulichungsmittel die Pestalozzi'sche Einheitstabelle, oder ein Rechenbrett, oder Striche, oder Punkte ꝛc. gebrauchen wolle, bleibt ihm überlassen, wenn der Zweck der Veranschaulichung nur vollkommen erreicht wird. Denn daß die Vorstellungen der Zahlen anschaulich aufgefaßt werden, schreibt die Methode vor; daher ist dieses unerläßlich.«

Sehr lesenswerth ist ebenfalls, was A. W. Grube in der Einleitung zu seinem »Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule« über die obigen Punkte sagt.

dem Grade mindern, je mehr wir die Schüler mit den Siebensachen aus all' den Lehrgegenständen zugleich ihre Methode erfassen lassen. Es versteht sich wohl von selbst, daß wir hier nur von der rein geistigen Seite dieser Lehrgegenstände reden und nicht von ihrer äußern, stofflichen; das Aeußere müssen wir außen lassen, wir müssen es da *suchen*, wenn wir seiner bedürfen, und vermögen es immerhin leichter *aufzufinden* mittelst der Methode, durch die wir einen geistigen Zusammenhang in dasselbe legen. Dagegen ist das Beibringen jeder Lehre, ohne daß die Methode zugleich das Beigebrachte ist, ein unpädagogisches Bemühen, ein vergebliches Danaidenwerk.

Nun gibt es eigentlich nur *eine* wahre Methode des Volksschulunterrichtes. Dieselbe ist freilich bis zur Zeit weder in allen Theilen klar erfaßt, noch in allen Unterrichtszweigen naturgemäß durchgeführt; allein der Entwicklungsgang der gegenwärtig noch verschiedenen Anschauungsweisen konvergirt offenbar gegen ein gemeinschaftliches Ziel, gegen die wahre Volksschulmethode. Dieselbe wird aber in nichts Anderem bestehen, als in der innigsten Vereinigung der metaphysischen Entwicklung des Objekts mit der psychologischen Entwicklung des Subjekts; d. h. nach der ächten Volksschulmethode muß das innere, geistige Wesen des Lehrgegenstandes Mitursache und -Wirkung der Seelenentwicklung des Schülers werden.

Nur eine solche Methode wird der Schüler wirklich erfassen können. Es ist aber eine Hauptanforderung, welche man an die pädagogische Methode machen muß, *die*, daß sie den Schüler *ergreife* und daß er sie *begreife*. Je wahrer nun die Gesetze der Seelenentwicklung und die Natur der Lehrgegenstände erkannt werden, desto vollkommener und faßlicher wird die Methode sein. Das Unterscheidende in den Methoden der einzelnen Lehrgegenstände ist nur ein spezifisch Aeußeres, das deren eigenthümlicher Natur entspricht; dem rein geistigen Wesen nach bilden sie dieselbe Methode.

Einer vorzüglichen methodischen Ausbildung ist die Mathematik fähig. Alle mathematischen Objekte bestehen nur insofern, als wir sie in uns schaffen, darum kann in diesem Gebiete des Wissens nichts von anderwärts, sondern Alles nur aus der Art und Weise erkannt werden, auf welche es geschaffen wird. Die Objekte der Mathematik sind Objekte der Abstraktion und nicht der Außenwelt, aber sie beziehen und gründen

sich auf Gegenstände und Verhältnisse der Außenwelt *. Für den Schüler fangen jene Objekte erst an zu werden und zu bestehen, wenn der Unterricht sie in ihm bildet.

Hieraus geht hervor, daß der erste mathematische Unterricht kein anderer als ein schaffender sein soll, ausgehend von der körperlichen Außenwelt und einkehrend in die innere Werkstatt des Geistes. Also nicht mit Benennungen und Erklärungen (Definitionen) soll dieser Unterricht — wie es etwa zu geschehen pflegt — beginnen, sondern mit der Erzeugung der mathematischen Objekte; dann erst ist der Name am Platz und es kommt endlich auch die Reihe an die Definition. Dieser Erzeugungsakt, der beim Rechnen als Vorgang einer Zählung, bei der Geometrie als Vorgang einer stetigen Bewegung aufzufassen ist, kann in seinem ganzen Verlaufe von dem Schüler vollständig überblickt nnd erkannt werden.

Es ist aber klar, daß nichts so sehr über das Wesen und die Eigenschaften eines Dinges Aufschluß gibt, als sein Ursprung und seine Entstehungsweise, und hierin eben ist die Mathematik vor jedem andern Unterrichtsfache ** am besten daran, denn über den Ursprung und die Bildung jedes ihrer Objekte herrscht völlige Klarheit.

Diese Thatsache wird zu einem Hauptprinzip einer mathematischen Methode; es ist dieses das Prinzip des Ursprungs und der Entstehung. Verschmelzt sich dasselbe mit demjenigen der psychologischen Entwicklung zu

---

* Daß die Zahlgrößen, welche die Arithmetik zum Gegenstande ihrer Untersuchung macht, reine Gebilde des Geistes sind, ist von selbst klar. Dasselbe gilt aber auch von den Raumgrößen. »Ihre Anschauung ist von der empirischen Anschauung durchaus verschieden und daher von allem Eindrucke der äußern Raumgrößen gänzlich unabhängig. — Wollte man auch zugeben, daß die räumlichen Vorstellungen aus der äußern Wahrnehmung stammten, so würden sie doch niemals als rein geometrische Gebilde zum Bewußtsein kommen können. In der äußern Natur gibt es nirgends eine rein geometrisch ausgeprägte Raumgröße, höchstens findet man nur Annäherungen. Uebrigens gibt es eine Menge von Raumgrößen, für welche die Empirie nicht einmal eine Analogie aufzuweisen hat.«

Weller, Leitfaden zum Unterricht in der Geometrie.

** Könnte man z. B. in der Botanik die Pflanze vor den Augen des Schülers aus dem Keime entstehen lassen, so wie die geometrischen Gebilde aus ihren Elementen entstehen, der Schüler würde eine viel deutlichere Vorstellung von dem innern Bau der Pflanze erhalten, als dieses bei unserm naturgeschichtlichen Unterrichte eben seiner besondern Eigenthümlichkeit wegen möglich ist.

einer pädagogischen Einheit (Bildungseinheit), so gründet sich auf diese, als auf das oberste allgemeine Prinzip, die wahre mathematische Volksschulmethode und diese ist:

Die Methode des Ursprungs und der Bildung gemäß psychologischer Entwicklung;

oder kurz in diesem Sinne aufgefaßt:

die psychologisch genetische Methode.

Diese Methode in ihrer einfachsten Art, ohne wissenschaftliche Strenge, ist eben so klar als faßlich und natürlich. — Wenn Pascal in seinen Betrachtungen über eine allgemeine Methode sagt: „die vollkommenste Methode wäre diejenige, nach der Alles (?) definirt und Alles bewiesen würde", so könnte man wohl als die vollkommenste Methode für die Volksschule diejenige erklären, nach der Alles angeschaut und Alles erkannt würde. Die Methode des Ursprungs hat wenigstens die erforderlichen Eigenschaften, um nach dieser Vollkommenheit zu ringen. Sie geht in ihren Anfängen von äußern Verhältnissen aus, die das leibliche Auge überblickt, und bildet Begriffe, deren Natur und Eigenschaften das geistige Auge in ihrem Werden und Sein anschaut; „was aber das Auge sieht, das glaubt auch das Herz", und darum ist diese Methode vor Allem aus eine klare und überzeugende. Sie ist aber auch eine natürliche, weil sie beständig sowohl die Natur des Lehrgegenstandes als die sich entwickelnde Natur des Schülers berücksichtigt, und eben darum ist sie auch eine leichte und faßliche, denn nur „was sich von der Natur entfernt, ist schwer. Was aber schwer ist, das nimmt den Muth": diese Methode dagegen spornt an, weil der Fortschritt stets ein bewußter und das Gebildete stets ein erkanntes ist, das die Gesetze seiner Bildung, die Methode selbst, in sich trägt. So bleibt das Erworbene das wahre Eigenthum des Schülers, das er sich immer neu bilden und umbilden kann. Wohl kann sich ihm mit der Zeit manche Einzelnheit in den Hintergrund drängen, allein er vermag sie wieder hervorzurufen. Verlieren aber kann er seine geistigen Erwerbnisse nimmer, so lange ihm die schaffende Kraft, die mit dem Geiste Eins gewordene Methode bleibt.

Man spricht beim mathematischen Unterrichte sehr häufig auch von einer analytischen und synthetischen Methode. Dem Geiste nach hat die analytische Methode viele Verwandtschaft mit der Methode des Ursprungs und der Entstehung. Die Analysis geht stets vom Begriff der

Sache (des Ganzen, Allgemeinen) aus; hieraus entwickelt sie fortspinnend ihre Resultate. Dieselben erscheinen daher nicht bloß als richtig und bewiesen, sondern als durchaus natürlich und nothwendig; denn ihre Quelle und ihr Entstehungsgrund sind bekannt. In dieser Hinsicht stimmt mit der analytischen Methode diejenige der Mathematik der Volksschule völlig überein. Während die erstere sich aber objektiv frei entfalten kann, stützt die letztere sich fortwährend auf das Prinzip der psychologischen Entwicklung.

Die synthetische Methode entwickelt nicht von innen heraus (sie ist überhaupt nicht entwickelnd); sie setzt stückweise zusammen, und erklärt und beweist, indem sie mehr von Außen her Licht auf den Gegenstand verbreitet. Zur analytischen Methode bildet sie einen reinen Gegensatz. Da aber in der Mathematik die Gegensätze sich ergänzen, so muß bei Verfolgung des analytischen Weges der synthetische ergänzungsweise oft ebenfalls betreten werden. Ein sehr passendes Beispiel zur Erklärung der synthetischen Methode bildet die gesammte Euklid'sche Geometrie.

Wir berühren schließlich noch die sogenannte „praktische Methode" oder das Verfahren derer, die dem Schüler ohne tiefere Einsicht Kenntnisse und Fertigkeiten beibringen wollen, welche bloß in seinem Gedächtnisse und nicht in seinem Geiste haften und darum, wie oben schon bemerkt, ein sehr unsicheres, vergängliches Gut sind. Dieses Verfahren ist eigentlich gar keine Methode, denn nach demselben werden die Ergebnisse ganz vereinzelt ohne einen innern Faden an einander gereiht. Bald sind die Uebungen zu tändelnd, fordern und erzeugen keine Kraft, bald sind sie zu schwer, weil dem Schüler das helle Auge der Einsicht mangelt. Jene „Praktiker" vergessen, daß, wenn man den Zweck will, man auch die rechten Mittel wollen muß.

§ 9.

Ueber die Methode des Rechnungsunterrichts der Volksschule im Besondern.

I.

Die Methode des reinen Rechnens.

Die Methode des Rechnens ist ihrem Charakter nach durch die mathematische Methode des Ursprungs bezeichnet; sie entspringt mit dem Lehrstoffe aus einem gemeinschaftlichen Denkakte: dem Zählen. Nur diese Grundverrichtung im Sinne von Zu und Weg — und alles Folgende, das ganze Rechnungsgebiet, ist kein Zufall mehr! Es ist im Gegentheil

ein nothwendiges Erzeugniß, das, so oft es sich auch neu gestaltet, dem Wesen nach immer das gleiche bleibt, eben so, wie aus der gleichen Samenknospe stets dieselbe Pflanze sprießt *. Widmen wir diesem Grundvermögen einige Aufmerksamkeit und suchen wir seinem wunderbaren Wesen und Walten einiges Verständniß abzulauschen.

Der Mensch wird nicht mit Zahlen im Kopf geboren, so wenig als sein Inneres von Anfang an ausgeschmückt ist mit all den mannigfaltigen Bildern einer Außenwelt. In der Werkstatt des Geistes muß sich geraume Zeit zunächst ein allgemeines Material der verschiedensten Vorstellungen sammeln. Erst wenn in diesen eine größere Mannigfaltigkeit vorhanden ist, entwickelt sich das Bedürfniß, näher zu unterscheiden, zu ordnen, zu verbinden und umzubilden. Und wieder erst, wenn das Kind in der Bildung allgemeinerer Vorstellungen noch weitere Fortschritte gemacht hat, kann und muß auch das Bedürfniß eintreten, endlich das Gleichartige wiederum abstrakter nach dem Größenverhältnisse zu unterscheiden und zusammenzufassen. Dann ist der Zeitpunkt der natürlichen Möglichkeit, ja Nothwendigkeit, der Zahlbildung gegeben. Vor dieser geistigen Reife ist die Zahlbildung geradezu eine psychische Unmöglichkeit, und es ist lächerlich, wenn man da an eine Auffassung der Zahlbegriffe durch die Zahlnamen glaubt. Die Zahlen lassen sich nicht von Außen her ins Kind bringen, nicht hineinrufen, nicht hineintrichtern; man mag ihm die Zahlenreihe noch so oft vorsagen und sie von ihm nachsagen lassen; man mag Kugeln, Erbsen, Hölzchen, Rechenpfenninge zu Hülfe ziehen: wenn die oben bezeichnete Epoche noch nicht da ist, lernt das Kind möglicher Weise die Namen ganz hübsch und in ihrer regelmäßigen Aufeinanderfolge, hantirt dazu auch richtig mit den Rechenpfenningen, aber die innere wahre Sache kann es und versteht es gerade so, wie es dieselbe etwa bei seinen dogmatischen Sprüchen und Liederstrophen versteht, die es in dieser Zeit lernt.

Die Unnatur dieses vermeintlichen Zahlenerlernens ist nun freilich in den Büchern weggekämpft, allein noch nicht in allen Schulen. Wie sehr aber ein so verkehrtes Verfahren die gesunde kindliche Entwicklung hemmt, ist nicht schwer einzusehen. Der Schaden, der dadurch angerichtet

---

* Unsere gesammte jetzige Rechnungskunde ist keine Tradition, sie würde — wenn auf einmal unbekannt — vom menschlichen Geiste dem Wesen nach ganz gleich wieder geschaffen.

wird, ist nicht selten ein bleibender. Dem Kinde wird die geistige Frische entzogen, die unmittelbare Auffassung, die innere Vereinigung mit dem Lehrgegenstande erschwert, vielleicht oft ganz unmöglich gemacht.

Die Periode des erwachenden Zahlensinnes und des beginnenden Zählens fällt nur zum Theil in den ersten Kreis der Schule: das Haus und das Leben überhaupt arbeiten der Schule auch in diesem Bildungszweige, obwohl nicht so speziell wie z. B. in der Sprache, und nicht so weit, wie man etwa nach einer gewissen Fertigkeit der Kinder im Hersagen der Zahlnamen glauben möchte, vor.

Die Erwerbung der ersten Zahlbegriffe geht außerordentlich langsam vor sich. Hier kann und soll man nicht treiben, man hat nur den Gang der Natur zu unterstützen und dieß geschieht am zweckmäßigsten durch Vorlegung eines geeigneten Materials, an das sich einfache Uebungen im Auffassen des Gleichartigen, im Ausscheiden und Anordnen desselben anschließen. Die Anordnung gleicher Stücke kann in verschiedenartigstem Sinne, in der mannigfaltigsten Form stattfinden. Dieß ist direkte Hinweisung genug, um das Zählen oder die Zahlbildung einzuleiten; die mathematische Thätigkeit hat mit jenen Uebungen bereits begonnen und das Zählen wird eine ganz natürliche (nothwendige) Folge hievon.

Mit dem Zählen beginnt das eigentliche Stadium des Rechnens.

Zählen und Rechnen sind identische Begriffe. Die Operationen und die Zahlen sind Ableitungen, die aus dieser einen Verrichtung fließen.

Nun muß man unterscheiden den historisch objektiven Entwicklungsgang und den psychologisch subjektiven.

Der erstere schafft den Stoff, er bildet nach der Methode des Ursprungs aus einem Grundakte (Zählen) in begriffsgemäßem Fortschritte die Operationen und die Zahlen, jene als die potenzirten Formen (Erleichterungsmittel) des Zählens, diese als die Ergebnisse des einfachen, wie des operationsgemäßen Zählens. Hieraus ergeben sich die Eigenschaften und Verbindungsgesetze der Zahlen wie von selbst; und ist dieser Entwicklungsgang wirklich erworben, so ist es auch die Methode und mit ihr der ganze Gegenstand, der dadurch zu einem unverlierbaren geworden.

Der zweite, in Beibehaltung der objektiven Stufenfolge, vertheilt und modelt den Stoff; er ist Anregung, Regel und Richtschnur zur Arbeit; er weist auf die Schwierigkeiten, so wie auf die Mittel zu ihrer Beseitigung hin; er zeigt die Stellen, wo der erstere langsamer, ruhiger, aber

um so intensiver wirken muß, so wie diejenigen, wo er schneller vorwärts schreiten darf; er schreibt also Maß und Ziel, Art und Weise, Haltung und Bewegung vor, mit einem Worte: er durchdringt den erstern mit dem psychologischen Element und verleiht ihm den spezifisch pädagogischen Charakter.

Ihre gemeinschaftliche Berührung haben beide darin, daß, wie der letztere den Entwicklungsstufen des Individuums, so der erstere den historischen Entwicklungsstufen des menschlichen Geistes auf diesem Gebiete entspricht. Diese, als die allgemeinern, bezeichnen stets auch die Hauptstufen der individuellen Entwicklung, aus der sie sich historisch herausgebildet haben. Die Entwicklung des Individuums im Elementarrechnen durchläuft also naturgesetzlich die Hauptstadien der objektiven Entwicklung. Die Variationen der Art und Weise finden nur innerhalb der Gränzpunkte je eines solchen Stadiums statt, und hier liegt der Hauptspielraum, in welchem sich die Rücksicht auf die individuelle Entwicklung (das speziell Subjektive) geltend machen soll. Wer aber jene Stadien verwischen oder durch einander werfen wollte, der würde eben so unpsychologisch als unhistorisch verfahren und in jedem Falle die wahre Methode verfehlen. Die psychologisch-genetische Methode des Rechnungsunterrichts besteht nun in der gegenseitigen Durchdringung und Verschmelzung der objektiven und subjektiven Entwicklung zu einer Einheit.

Die historische Entwicklung des Elementarrechnens hat folgende Stufen durchlaufen:

A. Das Zählen von Einheiten (natürlich bis zu einer mäßigen, nicht genau angebbaren Gränze).
   Schrittweises Zählen.
   a. Richtung des Zuzählens.
   b. Richtung des Wegzählens.

B. Das Zählen von Gesammtheiten, Zahlen (wie oben).
   Sprungweises Zählen.
   a. Richtung des Zuzählens.
   b. Richtung des Wegzählens.

C. Das mehrmalige Zählen einer Zahl (wie oben).
   Vervielfachen.
   a. Eine Zahl mehrmals zu sich selbst zählen oder zu einer Zahl mehrmals eine gleich große hinzuzählen.
   b. Von einer Zahl eine zweite mehrfach wegzählen.

Diese Stufen bilden geschichtlich aufgefaßt die Grundepoche der Rechnungsentwicklung; sie schließen in sich die Fundamentaloperationen und die Hauptbildungsgesetze (Haupteigenschaften) der absoluten (ganzen) Zahlen; sie enthalten aber zugleich die Keime zur Hervorbringung neuer Zahlformen. Diese Keime liegen im Wegzählen (Subtrahiren: Ursprung der negativen Zahlen), im mehrmaligen Zuzählen (Multipliziren: Ursprung der Potenzen, Wurzeln ꝛc.) und im mehrmaligen Wegzählen (Dividiren: Ursprung der Brüche). Hievon bilden die Brüche den ersten (auch historisch) und direktesten Ausfluß jener Fundamentaloperationen; die andern angeführten Zahlformen sind spätere Erwerbnisse der wissenschaftlichen Ausbildung und gehören unserer frühern Untersuchung gemäß nicht mehr in den Kreis der Volksschule.

Wohl aber stellt sich schon auf diesem Gebiete, und wie wir später noch näher sehen werden, das Bedürfniß der Anwendung und Ausbildung des Zahlzeichens heraus. Ja es zeigt sich, daß dieses eintreten muß, sobald das Zählen von Gesammtheiten zu einiger Klarheit und Sicherheit gelangt, und daß von da an alle weitere Entwicklung der Operationen in engster Verbindung mit der Entfaltung einer bestimmten Bezeichnungsform steht.

Die Bildung der Brüche folgt in gerader Linie (ohne irgend welchen Sprung) aus der Fundamentaloperation der Division, und hier ergeben sich naturgemäß folgende Stufen:

A'. Bildung der Bruchtheile, als neuer zählbarer Einheiten, und Auffassung des Bruchs im Allgemeinen.

B'. Die Zählformen (Operationen) mit gleichen Bruchtheilen.

C'. Die Zählformen mit ungleichen Bruchtheilen.

Diese Stufen bilden die zweite Epoche der Rechnungsentwicklung und die letzte für die allgemeine Volksschule überhaupt.

Dieß ist der bloß objektive Gang der Zahlbildung nach dem Prinzip des Ursprungs; nun tritt das für die Volksschule eben so wichtige Moment der psychologischen Entwicklung hinzu, nach welchem das Ganze sich zu einem neuen Gusse von speziell pädagogischer Form gestalten muß:

Erstes Hauptgebiet. Bildung der absoluten, ganzen Zahlen.

1. Das Zählen von Einheiten. Das Kind zählt im ursprünglichen Sinne des Wortes nur einmal, dann nämlich, wenn es sich die Zahlen zum ersten Mal bildet; alles weitere, fertige Zählen ist eine bloße

Reproduktion, ein nochmaliges Denken des schon früher Gedachten und Gefundenen. Jener ursprüngliche Akt ist aber, wie schon oben gesagt, in seinem ersten Gange ein ganz allmäliger und langsamer, dessen Geschwindigkeit in einer spätern Periode progressiv zunimmt und der endlich zum Gedankenfluge wird, sowie das Induktionsgesetz der Zahlbildung mathematisch und sprachlich vollständig erkannt ist.

Das ursprüngliche Zählen hat mit dem Erfinden und Entdecken eine nahe Verwandtschaft; beides ist in der Wiederholung bloße Reproduktion, die nach und nach mit großer Leichtigkeit und Fertigkeit von Statten geht und nur zu oft die Schwierigkeiten vergessen läßt, die mit der ersten Erwerbung verbunden waren. Für die Schule muß das ein Wink sein, nicht durch zu rasches Treiben den Gang der Natur zu überstürzen, sondern denselben durch möglichste Wegräumung der Schwierigkeiten und möglichste Erleichterung der Auffassung zu unterstützen. Auf der andern Seite darf die Schule ebenfalls nicht in dem Irrthum stehen, daß ihrer Einwirkung alle Zahlbildungsresultate zu verdanken seien, denn oft reproduzirt die Schule bloß, was das Kind schon vorher gethan, d. h. sich geschaffen hat. Bei gehöriger Aufmerksamkeit wird man also auch nicht den Bildungsgang durch unnütze Breite zurückhalten.

Die Einheit wird von dem Kinde aufgefaßt (gezählt), sobald es sich des Gegensatzes zwischen dem Einzelnding und einer Mehrheit oder Gesammtheit solcher Einzelndinge bewußt wird; die Zahl eins zählt (bildet) es also nicht, ohne zu wissen, daß es auch ein Mehr als eins gibt.

Auf die Mittel, welche die Schule ergreifen kann, um diesen geistigen Vorgang zu erleichtern, haben wir schon oben Seite 34 hingewiesen.

Die Zahl zwei wird es zählen, sobald es sich des Gegensatzes zwischen dem Einzelnen und einer solchen Gesammtheit bewußt wird, die ihm das Einzelne in Verbindung mit einem gleichen vorführt. Aus der lebendigen Anschauung mancher derartigen Verbindungen ergibt sich die Abstraktion der Zahl zwei am sichersten und schnellsten, und da sich das Ganze (die Zahl) eben so deutlich hervordrängen muß wie das in ihm liegende Einzelne (die Einheit), so thut die Schule am besten, zunächst Verbindungen von zweien, die entweder zusammengehörige Ganze oder Paare bilden, dem auffassenden Blicke des Schülers vorzuführen, z. B. zwei vereinigte gleiche Dinge, wie Würfel, Stäbchen ꝛc.; dann als Paare etwa die Augen, Hände, Füße am menschlichen Körper ꝛc.; dann beliebige Zweiheiten.

Den Zahlnamen gibt der Lehrer, aber erst, wenn er überzeugt ist, daß der Schüler aus dem Gegensatze des Einzelnen zur Gesammtheit die Zahl sich abstrahirt hat. Also immer: Die Zahl muß der Schüler erwerben, den Zahlnamen gibt ihm der Lehrer. Dieser wirkt hiebei nur mittelbar, indem er die möglichst günstigen Umstände für die Zahlbildung herbeizuführen und die geistige Thätigkeit auf die zweckmäßigsten äußern Verhältnisse hinzulenken sucht, die den gewünschten innern Vorgang nach sich ziehen.

Die Zahl drei erwirbt der Schüler, wenn er sich des gegenseitigen Verhältnisses zwischen dem Einzelnen und einer solchen Gesammtheit bewußt wird, die ihm das Einzelne in Verbindung mit noch zwei gleichen vorführt, oder, wenn ihm die Verbindung der Zweiheit mit der Einheit zur Identität wird mit der Vereinigung des Einzelnen mit einem gleichen und einem gleichen.

Das Hinlenken auf die zweckmäßigen Umstände, die wo möglich mit Nothwendigkeit dem Schüler jene Auffassung ablocken, ist, so wie die Benennung der neuen Errungenschaft, wieder Sache des Lehrers.

Der Fortgang des Zählens der folgenden Zahlen ist nun klar; es geschieht in ähnlicher Weise wie bei den vorigen. Für einmal wird man sich mit der Auffassung einer kleinern Reihe von Zahlen begnügen. Eine von der Natur angewiesene Grenze (Ruhepunkt) gibt es nicht, wenn nicht ein Ruhepunkt nach jeder Zahl selbst liegt. Es ist Sache des speziellen Lehrverfahrens, das in jedem Falle geeignete Ziel für einstweilen zu stecken; nur ist es ein Gebot der Mäßigung, die auch beim Unterrichte die besten Früchte trägt, nicht in dem ersten Gange des Einheitenzählens zu weit zu gehen.

Die bis jetzt erworbenen Zahlen werden im zweiten Gange dem Wegzählen von Einheiten unterworfen. Jede Zahl wird aufs Neue durch das Zusammenzählen von Einheiten reproduzirt und dann von ihr Einheit und Einheit weggezählt, so lange es angeht. Der Begriff des Wegzählens ist eine nothwendige Ergänzung zu dem des Zuzählens, gewissermaßen eine Verifikation des ersten Verfahrens in dem Sinne, daß man wieder zur Einheit zurück gelangen könne, wenn man von einer Zahl nach und nach Einheit um Einheit wegnehme. Hier entsteht auch zum ersten Mal der Begriff der Null: als Eins weniger Eins.

Diese beiden Verrichtungen (direkt und invers, Zuzählen und Wegzählen)

gehören von nun an im ganzen weitern Verlauf des Rechnens so nothwendig zusammen, daß die eine immer neben der andern gedacht wird. Es ist gerade, wie wenn man eine Reise nach einem entfernten, bisher unbekannten Orte gemacht hat und man dann durchs Zurückgehen auf den gleichen Spuren sich versichern will, daß man wieder an den Ort gelangen kann, von dem man zuerst ausgegangen ist. Es ist dieß eine tief in der Seele wurzelnde Neigung, bei jeder vorwärtsschreitenden Rechnungsoperation die auf den Ausgangspunkt zurückführende Operation ebenfalls wieder einschlagen zu können. So bilden das Zu- und Wegzählen das erste Paar der Zählformen, die in objektiver Beziehung so wie in Hinsicht auf psychologische Auffassung ein Zusammengehöriges bilden.

Es versteht sich wohl von selbst, daß die Zahlen auf dieser Stufe stets noch Beziehung auf eine im Kreise der sinnlichen Anschauung des Schülers liegende Einheit Bezug haben, also konkret-abstrakt oder benannt sind.

2. Das Zählen von Vielheiten (Zahlen). Der direkte Weg wird hier mit neuen Vortheilen und Abkürzungen zurückzulegen gelehrt und so werden die erreichten Ziele um so gesicherter; bei jeder Zahl, zu der man gelangt, entdeckt man neue Eigenschaften ihrer Zusammensetzung aus frühern, kleinern Zahlen. Es wird hier nicht bloß gelehrt, Zahl mit Zahl (natürlich mit den einfachsten beginnend) durchs Zusammenzählen zu verbinden, sondern das soll sich dem Schüler als das Wichtigste einprägen, daß er weiß, aus was für Summanden jede Zahl, mit der er bis jetzt Bekanntschaft gemacht hat, entstehen kann.

Die spezielle Anordnung der Zahlverbindungen und die Art und Weise der Fortführung sind Gegenstand des subjektiven Lehrverfahrens; nur muß hiebei der Lehrer der allgemein methodischen Vorschrift: vom Bekanntern, Leichtern, zum weniger Bekannten und Schwierigern fortzuschreiten, Genüge leisten. Daß wir hiebei, so lange die erste Zahlauffassung dauert, immer die Benutzung geeigneter Versinnlichungsmittel des Zahleninhaltes voraussetzen, an die sich das Zählen heftet, müssen wir wohl nicht wiederholen.

Ein neuer Fortschritt, der sich hieran anschließt, ist die Erweiterung des Zahlenraumes, der bis jetzt durchlaufen wurde. Es zeigt sich nicht nur beim Kinde, sondern überhaupt bei allen Individuen, deren geistige Entwicklung noch in der Kindheit ist, daß die Fassungskraft gar bald überstiegen und daß es daher besser ist, derselben etwas weniger als zu viel zuzumuthen; daraus folgt die psychologisch methodische Regel:

Die Zahlbildung soll nur in kleinern Intervallen weiter geführt werden.

Das Raisonnement: Vermag das Kind *eine* Einheit mehr aufzufassen, so vermag es sofort auch eine *zweite*, und wenn *diese*, so eine *dritte* mehr u. s. f., würde an eine bekannte Fabel erinnern, und jedenfalls ins Absurde führen. — Durch die gleichen oder durch ähnliche Mittel wie auf der ersten Stufe werden daher allmälig neue, höhere Zahlen aufgefaßt und es wird bei ihnen verweilt, bis jede dadurch gesichert ist, daß sie durchs Zusammenzählen niederer Zahlen mit vollem Bewußtsein gebildet werden kann.

Hiedurch ist der *inversen* Richtung wieder hinreichend vorgearbeitet: es wird von jeder Zahl eine kleinere (nach und nach mehrere) weggezählt und dieß so lange es angeht. Die Ausführung ist natürlich eine sehr mannigfaltige und bleibt dem selbstständigen Ermessen des einsichtigen Lehrers überlassen, insoweit er durch sein spezielles Verfahren nicht der Methode zuwider handelt. Diese Zählübungen sind neue Sicherungsmaßregeln zur Behauptung des Zahlenfeldes, das der Schüler bis jetzt eingenommen hat. Er ist im Stande, nunmehr jede Zahl bis zu einer bestimmten Höhe durchs Zusammenzählen niederer Zahlen oder durchs Wegzählen von einer höhern zu bilden.

So wird das Zahlengebiet nach oben in verschiedenen Perioden erweitert und die Erweiterung jedesmal durch den Denkakt des Zu- und Wegzählens aus den bereits gewonnenen Zahlen in der mannigfaltigsten Verbindung sicher gestellt. Es versteht sich von selbst, daß die Zahlauffassung und Zahlbezeichnung nach dem dekadischen Systeme stattfindet, daß aber hier von einer didaktischen Hinweisung auf die Gesetze dieses Systems noch keine Rede sein kann.

Die arithmetischen Verrichtungen, als Zu- und Wegzählen, sollen sich nun im Schüler bereits so gekräftigt haben, daß sie Theil seiner geistigen Thätigkeit und seines bildenden Vermögens sind, und somit darf man um das Zahlgebiet, das er bis jetzt gewonnen hat, keineswegs bangen.

Die Methode muß sich aber hinsichtlich des bis jetzt verfolgten Entwicklungsganges auch mit Beziehung auf den Fortschritt nach den einzelnen Schuljahren aussprechen. Es kann dieß nun sehr kurz geschehen:

Ins **erste Schuljahr** (insgemein das sechste Altersjahr) fällt die Stufe A und B nebst der Zahlbezeichnung, die für den gewonnenen Zahlenkreis sobald eingeführt wird, sobald der Schüler im Schreiben die nöthigen Fortschritte gemacht hat. Alles bewegt sich aber in einem noch ziemlich

engen Felde: Einer und höchstens ein paar Zehner, jedenfalls keine Hunderter, weil hier die Möglichkeit bleiben muß, stets leicht von jeder Zahl wieder auf die Konkretion nach Einheiten und deren Verbindungen zurückzugehen. Der jeweilen einer Klasse angemessene spezielle Gränzpunkt muß dem einsichtigen Ermessen des Lehrers überlassen bleiben.

Ins **zweite Schuljahr** fällt die Stufe A und B in einem erweiterten Zahlenraum: die Zehner und höchstens ein paar Hunderter, jedenfalls keine Tausender; die spezielle Gränze bestimmt der Lehrer. Im gleichen Schuljahre wird es noch möglich sein, das arithmetische Denken auf eine nächste Entwicklungsstufe hinüber zu führen, über welche in Folgendem näher eingetreten werden soll.

Während im ersten Schuljahre die Einführung der Ziffer noch nicht unumgänglich nöthig wäre, erscheint sie auf dieser Stufe bereits schon als unerläßlich.

3. Das mehrmalige Zählen einer Zahl. Hier nimmt der forschende und schaffende Geist einen neuen Fortschwung in seinem Ideengange, er schafft sich eine Operationsstufe, die aus der vorigen durch reine Spezialisirung entspringt. Daß diese Stufe geschichtlich eine spätere Entwicklungsform, ein späteres Erwerbniß des Geistes * ausmacht als die vorige, das liegt — wenn auch nicht die Analogie mit der Entwicklung der folgenden Operationsstufen darauf hinweisen würde — schon in ihrem Wesen und zeigt sich faktisch im gewöhnlichen Leben.

Viele Individuen, die das, was sie im Rechnen verstehen, fast ausschließlich der eigenen Naturentwicklung und dem Leben verdanken, sind bloß bei der ersten Operationsstufe der Addition und Subtraktion stehen geblieben. Sie halten sich mehr am Konkreten, wie es ihnen die Umstände darbieten; sie haben sich nicht zu der Abstraktion der Vielfachen, der Produkte erhoben: sie addiren statt zu multipliziren, indem sie gleiche Posten für Posten ansetzen oder auch so in Gedanken zusammenrechnen.

Der Fortschritt, den hier der Schüler zu machen hat, ist ein innerer und äußerer. Das reine „Wie oft des Zählens", das er auffassen muß, gibt ihm die rein abstrakte (unbenannte) Zahl, während er sich früher nur mit dem „Wie viel" der benannten Zahl beschäftigte. Also Fortschritt sowohl

---

* Wohl mag es im Laufe der Entwicklungsgeschichte des Rechnens Jahrhunderte gedauert haben, bis man sich von der Addition zur Multiplikation erhob.

in tieferer Zahlauffassung als in äußerer, höherer Rechnungsverrichtung. Durch den vorausgegangenen Bildungsgang ist nun aber der Schüler zur Auffassung des „Wie oft" vollständig befähigt und es wird sich in ihm nach einigen Uebungen dieser Begriff so befestigen, daß er zu einem neuen Motiv seines arithmetischen Denkens wird. Was er hier zu thun hat, muß er wieder in und aus sich selbst thun, es muß nothwendige Folge seiner eigenen Thätigkeit sein.

Die ersten einfachen Vervielfachungen, oder das sogenannte Einmaleins, bildet der Schüler mit großer Leichtigkeit: er kann Zahlen zusammenzählen, also auch zu einer Zahl eine gleiche mehrmals hinzuzählen, d. h. ihre Vielfachen suchen. Dieß ist die Quelle, aus der man zu schöpfen hat, wofern man durch den Unterricht auf den Geist bauen will. Es ist aber eine grobe Versündigung gegen die Natur, wenn man den Schüler — wie es leider noch gar zu häufig geschieht — die genannten Zahlverbindungen ohne Weiteres äußerlich sich anlernen läßt. Durch wiederholte Uebungen im Ableiten und Bilden der Vielfachen hat er dieselben überdieß noch bälder inne, als durchs gedächtnißmäßige Erlernen; er faßt sie dann aber auch wirklich und nicht bloß nach rhythmischen und melodischen Beziehungen, wie gewöhnlich beim Auswendiglernen, auf.

Hiebei offenbaren sich dem Schüler wieder neue Eigenschaften der ihm bis jetzt bekannten Zahlen; er erfährt, aus welchen Faktoren sie gebildet werden können. Dadurch gelangt er ganz unbemerkt auf die inversen Uebungen im Entvielfachen, die ihm wo möglich noch schneller als die direkten geläufig sind, da diese die Grundlagen zu jenen bilden.

Wenn durch die vorigen Uebungen der Zahlenraum, der im zweiten Schuljahre eingenommen wird, ganz durchlaufen ist, so wird derselbe durch die Hülfsmittel der Stufe A und B aufs Neue angemessen erweitert und die Uebungen der Multiplikation und Division auch in der Erweiterung im gleichen Sinne wie oben durchgeführt.

Das arithmetische Denken des Schülers hat sich bis jetzt vom einfachen, schrittweisen Zählen zum sprungweisen (Addition und Subtraktion) und von da zum mehrmaligen Zählen einer Zahl (Multiplikation und Division) ausgedehnt. Durch mannigfaltige Uebungen in diesen Zählformen hat sich der Schüler dieselben so zu eigen gemacht, daß sie Eins sind mit seinem Zählvermögen überhaupt, und weil ihm dieses als unverlierbare geistige Anlage bleibt, hat er auch jene und durch sie die Zahlen, die aus ihnen entspringen. Er kann also hier nichts verlieren, nichts wirklich ver-

gessen, denn er kann jeden Augenblick neu erzeugen, was er zu wissen nöthig hat, weil er in sich die schaffende Kraft (ein thätig entwickeltes Zählvermögen) besitzt.

Durch die vier Zählformen ist er nun im Stande, alle Zahlen eines bestimmten Zahlraumes aus kleinern Zahlen (durch Addition und Multiplikation) zusammenzusetzen oder aus höhern (durch Subtraktion und Division) abzuleiten und hieraus ihre dießfälligen Bildungseigenschaften zu erkennen. Das sind die Früchte die ihn befähigen, seine geistigen Erwerbnisse bereits mit einiger Selbstständigkeit auf einzelne Rechnungsfälle des Lebens anzuwenden; sein arithmetisches Denkvermögen hat alle Hauptrichtungen eingeschlagen, die das Leben erfordert, und es handelt sich nur noch um die möglichst zweckmäßige Erweiterung und Anwendung dieser Erwerbnisse.

Zunächst naht jetzt für den Geist die Zeit der Reife, um die Bildung der Zahlen (das Zahlensystem) nach oben abzuschließen. Indem das Zahlengebiet bis zu den Millionen erweitert wird, macht sich der Schüler das Bildungsgesetz des Zehnersystems, wenn er es sich nicht vorher schon abstrahirt hat, zum Eigenthum; es eröffnet sich ihm die Aussicht aufwärts in den unendlichen Progreß der Zahlen, den er wie die Zeit nie ganz, selbst mit dem Fluge der Gedanken, zu durchlaufen vermag, indem er in dieser Richtung nirgends Gränze noch Ende entdeckt. Die Schule wird sich nur in dem untern Theile dieser endlosen Zahlenfolge bewegen; sie hat manche Jahre zu thun, bis sie nur dieses kleinere Feld am Faden der Zählformen genügend durchgearbeitet und sicher gestellt hat.

Ans Ende des **zweiten Schuljahrs** fällt nach der obigen Gliederung der Uebergang vom sprungweisen Zählen (Stufe der Addition) zum Mehrfachen-Zählen (Stufe der Multiplikation).

Das **dritte Schuljahr** wird das Zahlengebiet bis höchstens zum Tausender ausdehnen und dasselbe bis zu dieser Höhe hauptsächlich durch die Addition und Subtraktion befestigen, während die Multiplikation und Division sich noch in etwas engerm Umfange bewegen, um im Schüler erst gehörig zu erstarken.

Im **vierten Schuljahre** dehnt sich der Zahlenraum bis zu den Zehntausendern, höchstens bis zum Hunderttausender aus. Das operationsgemäße Denken wird besonders in der Addition und Subtraktion in dieser ganzen Ausdehnung zur vollen Sicherheit erhoben; Multiplikation und Division dürfen sich noch auf etwas niedrigere Zahlen erstrecken.

Das **fünfte Schuljahr** sucht endlich die Ein- und Aussicht in die dekadische Zahlbildung nach oben für einmal genügend zu begründen und abzuschließen. Die Zahlhöhe, bis zu welcher gezählt respektive operirt wird, reicht bis in die Millionen und die Möglichkeit eines weitern selbstständigen Aufsteigens wird dem Schüler ausreichend an die Hand gegeben. Vornämlich wird nun auch die arithmetische Denkweise der Multiplikation und Division in größerem Umfange geübt und zu eben der Sicherheit und Stärke erhoben, zu der das erste Operationspaar (Addition und Subtraktion) bereits gelangt ist.

Somit sollte der Standpunkt erreicht sein, wo dem Schüler die arithmetischen Grundoperationen mit dem Zählen, mit seinem arithmetischen Denkvermögen überhaupt identisch geworden sind, so daß in diesem durch die Kraft der Methode das Reich der ganzen Zahlen jederzeit neu erstehen und nie untergehen kann, so lange der denkende Geist selbst seine Wirksamkeit fortsetzt.

Zweites Hauptgebiet. Bildung der gebrochenen Zahlen.

Alles Vorausgegangene weist nun mit Nothwendigkeit darauf hin, die Zahlbildung auch in der Richtung abwärts — zunächst nach den gewöhnlichen, dann nach den Dezimalbrüchen — zu beginnen und allmälig im Verlaufe des Unterrichts zu vollenden. Schon in den Anwendungen, die das vorige Gebiet in Anspruch nimmt (siehe unten das angewandte Rechnen), hat der Schüler in den Unterabtheilungen der Größen, wenn auch nicht der Form, doch dem Geiste nach, mit Brüchen gerechnet. Nunmehr drängt auch die Form — besonders hinsichtlich des Wechsels in der Rangordnung der Operationen — zur Bildung der gebrochenen Zahlen hin. Zur Bildung und zum Verständniß des neuen Gebietes ist für die Schüler in dem Vorigen alles Nöthige und Zweckmäßige geschehen. Der bis zu diesem Punkte vorgerückte Schüler — und vielleicht schon der jüngere — fühlt namentlich bei der Restbetrachtung der Division, daß hier noch etwas Weiteres geschehen sollte. Diesem Verlangen von Seite der geistigen Natur leistet die beginnende Bruchentwicklung ein Genüge.

Erste Periode der Bruchrechnung.

a. Bildung der Bruchtheile und Auffassung des Bruchs überhaupt.

Die Hauptsache ist hier, daß der Schüler den Ursprung und mit demselben

die Nothwendigkeit der Bruchbildung einsehe. Das hält aber nicht im Geringsten schwer, denn die Bruchzahlen entstehen ganz naturwüchsig aus der Division, der letzten Zählform des ersten Hauptgebietes.

Der einfachste Fall ist offenbar der, wo bei der Division nur eine Einheit als Rest bleibt. Der Lehrer wird den Schüler eine Anzahl solcher Aufgaben lösen lassen, in welchen z. B. ungerade Zahlen durch 2 zu theilen sind. Fast von selbst wird dem Schüler, um die als Rest bleibende Einheit auch noch durch 2 theilen zu können, das Hülfsmittel beifallen, die Einheit in 2 gleiche Stücke zu zerlegen oder zerlegt zu denken. So findet er den zweiten Theil der Einheit. Hierauf Benennung und Bezeichnung dieses Bruchtheils; dann auf ähnliche Weise Bildung, Benennung und Bezeichnung der Bruchtheile: Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel ... bis Zehntel.

Das Zählen dieser Bruchtheile wird keine weitern und größern Schwierigkeiten haben als das Zählen von beliebigen Einheiten überhaupt. So bilden sich Brüche. Das einzig Schwierige liegt bloß in der Bezeichnung. Hier muß der Lehrer Sorge tragen, daß die Begriffe von Zähler und Nenner dem Schüler nicht durch einander kommen; er wird besonders darauf dringen, daß dieser den Zähler als die Zahl (die Bruchzahl) auffasse (eigentlich sollte derselbe auch Zahl heißen), und den Nenner beim Zählen gleicher Theile ganz außer Spiel lasse. Es mag von Vortheil sein, Anfangs nur die Zähler durch Ziffern und die Nenner mit Worten zu schreiben; so tritt die Bedeutung des Zählers als Zahl um so deutlicher hervor.

Wenn die Schüler auf diesem Wege die Bruchtheile bis zu den Zehnteln und aus ihnen durchs Zählen verschiedenartige Brüche (Zweitel, Drittel .... bis Zehntel) gebildet haben, alsdann wird in ganz ähnlicher Weise die Reihe an die nächstfolgenden Bruchtheile und Brüche kommen, bis den Schülern das Gesetz der Bruchbildung arithmetisch und sprachlich vollständig klar ist.

b. Die Zählformen (Operationen) mit gleichen Bruchtheilen.

Die vier Zählformen mit gleichen (gleichnamigen) Bruchtheilen enthalten nun dem Wesen nach gar nichts Neues; das Zählbare (der Bruchtheil) wird zu- oder weggezählt, eine Anzahl gleiche Bruchtheile vervielfacht oder entvielfacht — gerade wie es mit ganzen Einheiten geschah. Die Hauptsache bleibt, daß der Zähler die Zahl, der Nenner aber deren Attribut sei,

durch welches dieselbe mit Hinsicht auf die Benennung (die Größeneinheit) ihre Realität, ihr denkbares Substrat erhält. Wenn es hier eine Schwierigkeit gibt, so liegt sie allein wieder in der Bezeichnung; darum dürfte es hier wie oben nicht ohne Nutzen sein, die Nenner anfänglich mit Worten zu schreiben, damit der Schüler weniger in Versuchung geräth, mit denselben beim Zählen gleicher Bruchtheile irgend eine Operation vorzunehmen.

Die Entvielfachung einer Anzahl gleicher Bruchtheile führt endlich wieder auf die Nothwendigkeit einer neuen Theilung des Bruchtheils, so daß die in Rede stehende Stufe b. in ihrem ganzen Verlaufe eine vollständige Analogie zu den vier Spezies mit ganzen Zahlen ausmacht, wo bei der Entvielfachung ebenfalls die Nothwendigkeit einer Theilung der Einheit eintritt.

c. Die Zählformen mit ungleichen Bruchtheilen.

Wie früher die Frage entstund: In wie viele gleiche Theile muß ich die als Rest gebliebene Einheit theilen, um von derselben den zweiten, dritten, vierten Theil u. s. f. rechnen zu können? — so jetzt die gleiche Frage und Antwort mit Beziehung auf den Bruchtheil. Dann aber ist der nächste Blick zurück auf die ganze Einheit gerichtet: Wie viele neue Bruchtheilchen enthält diese nunmehr nach der neuen Theilung des Bruchtheils? — Bei dieser ganzen Partie der Bruchrechnung, die oft so unnatürlich und verschroben behandelt wird, hat der Schüler als einzigen leitenden Gedanken den festzuhalten:

Wie viele Bruchtheile muß ich der Einheit geben, damit ich aus denselben das rechnen, das zählen kann, was die Rechnungsaufgabe von mir fordert?

Dieser Grundgedanke läßt sich leicht aus- und durchführen und es ist nur die Aufgabe eines vernünftigen Lehrverfahrens, bei der Ausführung von den einfachsten Fällen nach und nach zu den zusammengesetztern und schwierigern fortzuschreiten. Zunächst werden die Bruchtheile in der Reihenfolge, wie sie gebildet wurden, durch 2, 3, 4, 5 u. s. f. dividirt. Kann der einfache Bruchtheil durch eine ganze Zahl getheilt werden, so wird dieß auch leicht mit dem Mehrfachen des Bruchtheils (dem Bruche selbst) geschehen können. Hierdurch ist dann auch die letzte Aufgabe der letzten obigen Abtheilung b., welch erstere dort nicht vollständig gelöst werden konnte, in ihrem ganzen Umfange gelöst.

Nun wird es auch der Schüler ganz natürlich und begreiflich finden, daß man z. B. Zweitel nicht in Drittel, wohl aber in Viertel, Sechstel u. s. f.;

Drittel nicht in Viertel und Fünftel, wohl aber in Sechstel, Neuntel u. s. f. verwandeln kann; er hat jetzt den natürlichen Grund der Verwandlung der Bruchtheile, und dieser liegt in nichts Anderem als in der Theilung des Bruchtheils, die daher beim natur- und sachgemäßen Unterricht der Bruchverwandlung vorangehen muß.

Diese Mittel wird der Schüler sofort benutzen, um ungleichnamige Brüche so umzuwandeln, daß sie zum Zählen (Zu- und Weg-) tauglich werden, und er wird in Ausführung des oben aufgestellten leitenden Grundgedankens auch hier leicht den einfachsten Weg zum Ziele finden. Da ist ihm das Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen in letzter Linie doch wieder ein Rechnen mit gleichnamigen; er führt es auf dieses zurück, sobald ihm in der Rechnung ungleichnamige Brüche vorgelegt werden.

Die weitern komplizirtern Verbindungen der Bruchrechnung — wie die Multiplikation und Division, bei denen der Multiplikator und Divisor selbst gebrochene Zahlen sind, können füglich noch aus dieser Periode weg- und für die nächst folgende verspart bleiben. Kinder von dem Alter dieser Stufe vermögen sich z. B. nichts Rechtes unter dem „$^3/_4$ Mal nehmen" oder unter dem „$^1/_3$fachen, $4^5/_7$fachen", oder unter dem „$^1/_3$ten, $5^3/_4$ten Theil" ꝛc. zu denken, während ihnen Begriffe wie „das Drei- und Vierfache", der „dritte, vierte Theil" ꝛc. ganz verständlich und geläufig sind. Jene Verbindungen impliziren eben schon eine Verallgemeinerung des Begriffs der Multiplikation, und wenn eine solche allgemeinere Auffassung der Operation je einmal in der Volksschule am Platze ist, so ist sie es doch jetzt nach dem Alter und Bildungsstande des Schülers auf dieser Stufe noch nicht.

Nach den Schuljahren muß die behandelte erste Periode der Bruchrechnung folgendermaßen vertheilt werden:

Auf des **fünften Schuljahrs zweite Hälfte** fallen die Abtheilungen a und b dieser Periode.

Dem ganzen **sechsten Schuljahre** wird die Abtheilung c derselben Periode zugewiesen.

Dieß ist vollständig hinreichender Stoff zur Entwicklung und Bildung besonders auch mit Hinsicht auf die nunmehr vielfältigern Uebungen im angewandten Rechnen (siehe dasselbe unten); es ist aber auch nicht zu viel an diesem Stoffe, denn er kann bei dieser Einfachheit um so leichter und sicherer durchgeführt werden, als immer Eins aus dem Andern fließt, Grund und Folge stets beisammen, Methode und Sache immer vereinigt sind.

An die ganzen Zahlen sind nunmehr die Brüche durch die Weiterführung der einfachen Zählformen innig geknüpft und der Schüler kann auch diese neuen Erwerbnisse als sein bleibendes Eigenthum betrachten, da sie ihm so nothwendig und natürlich aus dem Zählen, dieser einen logischen Grundoperation des Rechnens, entspringen wie die ganzen Zahlen.

Zweite Periode der Bruchrechnung.

α. Ableitung der Dezimalbrüche und Abschluß des dekadischen Zahlensystems in auf- und absteigender Richtung.

Etwas ganz Neues sind die Dezimalbrüche dem Wesen nach für den Schüler nicht mehr; sie sind Brüche wie alle andern, aber ihre Bildung beruht auf einem Gesetze, das nicht bloß einen eigenen systematischen Zusammenhang unter ihnen feststellt, sondern welches auch mit dem Bildungsgesetz der ganzen dekadischen Zahlen so einig geht, daß sie sich mit diesen in einem durchweg gleichartigen Gefüge verbinden. Das Neue dieser Brüche liegt also bloß in ihrer eigenthümlichen Form und in ihrer größern Uebereinstimmung mit den ganzen dekadischen Zahlen.

Wenn der Schüler die gewöhnlichen Brüche in Verbindung mit ganzen Zahlen betrachtet, so bemerkt er, daß hier nicht das gleiche Gesetz der Fortschreitung von Kollektiveinheit zu Kollektiveinheit besteht. Legt er sich z. B. die Zahl $236\frac{4}{5}$ Frkn. vor, so sieht er die Einheiten von 2 zu 3 zu 6 stellenweise 10 Mal kleiner werden, während der Uebergang von den Einern zu den Fünfteln bloß auf der 5fachen Abnahme der erstern beruht. Soll der gleiche Fortgang auch auf die Bruchtheile sich erstrecken, so wird der Schüler leicht finden, daß er zu setzen habe $236\frac{8}{10}$ Frkn., und der Lehrer wird ihm noch die bequemere Ausdrucksweise 236,8 Frkn. mittheilen. In gleicher Art wird z. B. aus $76\frac{1}{4}$ Frkn. folgen 76,25 Frkn. u. s. f. So erhält der Schüler zuerst eine Idee von der dekadischen Abstufung der Bruchtheile.

Nun wird er, da die Dezimalbrüche aus der gleichen Quelle fließen, wie die gewöhnlichen, an den Rest bei der Division wieder anknüpfen und durch fortgesetztes Dividiren den Quotienten durch Dezimalstellen vervollständigen. Ist dieses geleistet, so ist er auch im Stande, jeden gewöhnlichen Bruch durch Division des Zählers durch den Nenner in einen Dezimalbruch zu verwandeln, indem er eben den Zähler als einen Rest betrachtet, der noch durch den Nenner als Divisor zu dividiren ist.

So kommt der Schüler zur Auffassung des gesammten dekadischen

Zahlensystems, das er nunmehr in auf- und absteigender Linie bemeistert. Die Messung der Größen durch bestimmte Maße weiß er in ganzen Einheiten und Dezimalen bis auf eine beliebige Annäherung auszudrücken, so wie er auch von der Größe einer jeden dekadisch gebildeten Zahl sich bestimmte Rechenschaft geben kann und sie bei bekannter Einheit richtig darzustellen oder zu versinnlichen im Stande ist.

β. Die Operationen mit Dezimalbrüchen.

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen gewährt meistens Abkürzungen, die man bei den gewöhnlichen Brüchen entbehren muß. Was zunächst die Addition und Subtraktion anbetrifft, so bieten sie gar keine Schwierigkeiten dar; man hat nicht erst mühevoll die Brüche in gleichnamige zu verwandeln, hiefür ist schon durch das System gesorgt und diese beiden ersten Operationen werden ausgeführt, indem man gerade wie bei den ganzen Zahlen die gleich hohen Stellen zusammenzählt oder von einander abzieht.

Mehr Schwierigkeiten verursachen die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen durch Dezimalzahlen. Diese Schwierigkeiten wird aber der Schüler um so bälder überwinden, je sicherer er sich die Multiplikation der Stellenwerthe bei ganzen Zahlen einprägte. An diese knüpft sich dann nicht schwer die Multiplikation der Stellenwerthe bei Dezimalbrüchen (wobei die Erleichterung eben in der Analogie liegt); und ist dieses Ziel erreicht, so sind die Hülfsmittel zur Lösung der erstern Aufgabe gewonnen, worauf diese, so wie die zweite, die Division, leicht sowohl in Hinsicht auf wirkliches Verständniß als auf praktische Ausführung zu einem ersprießlichen Ende geführt werden kann.

γ. Operationsverbindung vermischter Zahlen.

Es ist klar, daß, wenn schon in der ersten Periode der Bruchrechnung das Rechnen mit ganzen Zahlen nicht bei Seite gesetzt wurde und nicht werden konnte, dasselbe auch während der zweiten Periode fortgesetzt werden muß. Das Gleiche wird ebenfalls vom Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen gesagt werden müssen. Ja dieses wird sich noch mehr als jenes zu vervollkommnen haben, besonders da bis jetzt die schwierigern Bruchverbindungen so wie die allgemeinere Betrachtung der Quotienten- oder Bruchform (wobei Zähler und Nenner aus ganzen Zahlen, aus gewöhnlichen wie aus Dezimalbrüchen zusammengesetzt sein können) verspart blieben. Diese Betrachtung wird den Schlußstein der Zahlenlehre der Volks-

schule bilden; sie wird den Schüler in den Stand setzen, die allgemeine Quotientenform im Sinne der möglichsten Abkürzung bei seinen Rechnungen zu benutzen, und sie wird ihm so den Hauptschlüssel zur Auflösung der Rechnungsaufgaben, die das Leben in so großer Auswahl und Mannigfaltigkeit darbietet, in die Hand geben.

Und somit wäre der Gipfel der reinen Zahlentwicklung der Volksschule erreicht. An einen Faden (an denjenigen des Operationszusammenhangs) sehen wir alle die betrachteten Zahlen und Zahlgebilde gereiht; und da dieser Faden sich immer frisch aus dem Zahldenkvermögen entwickeln kann, so sind die damit verknüpften Erwerbnisse ein bleibend frisches Eigenthum des in solcher Weise herangebildeten geistig thätigen Menschen.

Was die Vertheilung obigen Unterrichtsstoffes auf die einzelnen Schuljahre anbelangt, so fallen die Abtheilungen α und β auf das **siebente Schuljahr**. Die Abtheilung γ dagegen so wie einige der schwierigern Berechnungen aus β vertheilen sich auf das **achte** und **neunte**. Was noch über diese Schulzeit hinausgehen soll, das bezieht sich vornämlich auf die praktisch bürgerliche Richtung, die in Folgendem ihre Würdigung finden wird.

Anmerkung: Ueber allfällige Unterschiede zwischen Kopf- und Zifferrechnen ꝛc. sind wir hier absichtlich nicht eingetreten, da wir hier bloß den Entwicklungsgang des reinen Rechnens an sich ins Auge zu fassen hatten. Jene Unterschiede werden — insoweit sie bestehen — weiter unten in besondern Betracht gezogen.

II.

Die Methode des angewandten Rechnens.

Der Unterschied zwischen dem reinen und angewandten Rechnen wird nicht immer streng genug festgehalten; daher ist eine scharfe Auffassung und Unterscheidung der beiden Rechnungsgattungen sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht nothwendig. Man könnte zwar — und es wird auch von einigen Schriftstellern auf diesem Gebiete mit Entschiedenheit gethan — sagen:

Es gibt nur **ein** Rechnen und dieses ist das reine Rechnen, alle Anwendungen der hier gewonnenen Resultate gehören jenen Unterrichtskreisen an, für welche diese Resultate benutzt werden.

Allein damit langt man nicht aus und zwar am wenigsten auf dem

Gebiete der Volksschule. Da müßte nicht nur bei der Geographie, Naturkunde, Geometrie ꝛc. noch eine Art von Rechnungsunterricht vorkommen, sondern die Zahl der Realfächer würde sich auch noch um einige, wie z. B. die Verkehrskunde für technische, für Handels-Zweige, fürs gemeine Leben ꝛc. vermehren, und da müßte man beim Unterrichte allerdings nicht für neue Stoffvermehrung und Stoffzersplitterung sorgen, sie käme so von selbst. Offenbar thut man also am besten, wenn man unter dem Titel des „angewandten Rechnens" die Hauptrichtungen vereinigt, auf welche die Ergebnisse der Zahlen- und Operationslehre bezogen werden können. Auf eine ziemlich ähnliche Weise muß man sich ja auch im Sprachunterrichte bei den sogenannten Stylübungen benehmen.

Wir sind ferner nicht damit einverstanden, daß das Rechnen mit benannten Zahlen schon an sich ein angewandtes Rechnen sei, wie man es oft nennt, und wie man es sogar in den neuesten Handbüchern und Lehrmitteln für den Rechnungsunterricht wieder findet.

Das reine Rechnen befaßt sich mit der Anregung und Bildung der Operationen und der hieraus entspringenden Zahlen, seien diese benannt oder unbenannt *, woran sich die Erkenntniß des Wesens der Zahlen, der Eigenschaften ihrer Bildung, der Gesetze ihrer gegenseitigen Verbindung und ihrer Abhängigkeit von einander schließt. Die Aufgaben des reinen Rechnens sind direkt gegebene; sie verlangen vom Schüler die bloße Ausführung der Operationen, die in arithmetischer Sprache entweder symbolisch gegeben (angesetzt) oder durch Worte schlechtweg ausgedrückt sind. Von Außen her verlangen sie keine weitere realistische oder praktische Kenntnisse.

Das angewandte Rechnen beschäftigt sich zunächst mit der Auffindung und erst dann mit der Lösung der Operationen, welche bestimmte praktische Verhältnisse involviren und welch letztere sich entweder unmittelbar der Zahlbetrachtung und Untersuchung darbieten oder ver-

---

* Das Rechnen der Volksschule ist von Anfang an ein Rechnen mit benannten Zahlen oder soll es vielmehr sein, wenn es auf wirkliche Anschauung gegründet ist. Der kleine Schüler rechnet z. B. sein 2 + 3, indem er an die konkreten Dinge (Kugeln, Würfel, Finger ꝛc.) denkt, an denen er diese Zahlen auffassen gelernt hat. Am verkehrtesten ist aber die Ansicht, nach der zuerst mit unbenannten und dann mit benannten Zahlen gerechnet werden soll; diese verlangt Unnatürliches, Unmögliches.

mittelst der Sprache, in die man sie einkleidet, mitgetheilt sind *. Die Aufgaben des angewandten Rechnens werden also aus den verschiedenartigen Verhältnissen des Lebens, aus den Beziehungen und Berührungen des Menschen mit der Natur ꝛc. erst abstrahirt. Die Rechnungsoperationen, durch welche diese Aufgaben ihre Lösung finden, sind nicht in arithmetischer Sprache gegeben, weder durch symbolischen Ansatz, noch durch Worte; wir finden und erkennen sie nur, insofern wir sie aus jenen Verhältnissen und Beziehungen, in denen sie versteckt liegen, abzuleiten im Stande sind. Von außen her erheischt das angewandte Rechnen viele praktische Kenntnisse und Erfahrungen, die nicht ohne Weiteres zum Rechnen gehören. Um eine angewandte Rechnungsaufgabe zu lösen, muß ich zunächst in einem gewissen Grade Praktiker und erst dann reiner Rechner sein. Folgende Momente wirken demnach zur Auffassung des angewandten Rechnens zum Voraus mit:

1. Die Einsicht in diejenigen äußern Verhältnisse, auf die sich je eine Aufgabe des angewandten Rechnens bezieht. — Praktisches Moment.
2. Die nöthige Gewandtheit in sprachlicher Auffassung. Die meisten Aufgaben beim Unterrichte werden dem Schüler durch die Sprache mitgetheilt, und nur die wenigsten können ihm hier unmittelbar aus eigener Erfahrung entgegentreten. — Philologisches Moment.
3. Die Fähigkeit der Abstraktion zur Entwicklung und Ableitung der in einer Aufgabe eingekleideten Rechnungsoperationen. — Moment der Deduktion.

Erst durch diese drei Momente kann beim angewandten Rechnen das Stadium erreicht werden, das ganz dem reinen Rechnen angehört und das

---

* Die Rechnungsaufgaben im Allgemeinen sind also entweder **unmittelbare,** d. h. solche, die der Schüler aus seinem Erfahrungs- und Ideenkreise selbst schöpft; oder **mitgetheilte,** d. h. solche, die der Unterricht (die Schule) an ihn stellt.

Die Rechnungsaufgaben des Unterrichts sind entweder **uneingekleidete** (unangewandte), d. h. solche, die die bloße Ausführung bestimmter Operationen verlangen, oder **eingekleidete** (angewandte), d. h. solche, bei denen die zum Resultate führenden Operationen aus bestimmten realen Verhältnissen erst abgeleitet werden müssen. Bei jenen hat der Schüler einzig die arithmetische Sprache zu vollziehen, bei diesen muß er zunächst in die arithmetische Sprache übersetzen und erst dann dieselbe vollziehen.

also die Ausführung der aufgefundenen Operationen oder die Bildung derjenigen Zahlen betrifft, nach denen gefragt wird.

Hierin werden gegenwärtig noch sowohl in Schulen als in vielen Schulbüchern die auffallendsten Fehler begangen. Man vermengt reines und angewandtes Rechnen bunt in und durch einander: kaum hat das Kind eine kleine Reihe von Zahlen (ja nach einigen Lehrbüchern bloß die paar ersten) aufgefaßt, muthet man ihm schon zu, angewandte Aufgaben lösen zu können. Man setzt also gleich die Erfordernisse, die in den obigen drei Momenten liegen, voraus, ohne daran zu denken, ob man hiezu auch irgendwie berechtigt sei. Man sollte sich viel häufiger fragen: Ist das Kind so weit, daß es diejenigen Verhältnisse, auf die sich eine Aufgabe bezieht, bereits kennt oder gleich mit einigem Aufschluß lebendig erfaßt? Versteht es die sprachlichen, oft sehr eigenthümlichen Wendungen, in welche die Aufgaben sich einkleiden? Und hat es endlich auch die nöthige Abstraktionsfähigkeit, die zum Ziele führenden Zählweisen oder Operationen herauszufinden?

Nicht das ist das Charakteristische oder Schwierige des angewandten Rechnens, daß hier die benannte (angewandte) Zahl auftritt, sondern das, daß hier viele, der reinen Zahlbildung ganz fremde Kenntnisse und eine erhöhte geistige Reife im arithmetischen Schließen verlangt werden.

Ein zweiter, wo möglich noch größerer Fehler, den man besonders beim weiter fortgeschrittenen Rechnungsunterricht begeht, ist der, daß das angewandte Rechnen nicht nach den Operationsverbindungen des reinen Rechnens gegliedert wird. Es ist eigentlich nicht schwer, einzusehen, daß ein gedeihliches methodisches Fortschreiten ohne diese Gliederung unmöglich ist. Das angewandte Rechnen ist nämlich nach irgendwelchem stofflichen Eintheilungsgrunde durchaus uneintheilbar, wie man sogleich findet, wenn man eine derartige Eintheilung versucht.

Allein vorausgesetzt, es ließe sich eine Stufenfolge von Rechnungsarten nach den materiellen Gebieten, denen dieselben entnommen werden können, aufstellen, so würde doch diese Gliederung der einfachsten methodischen Anforderung nicht genügen: der Fortschritt vom Leichtern zum Schwerern würde da unmöglich sein, weil die stoffliche Gliederung nichts gemein hat mit dem Fortschritte des Schülers in der Zahl- und Operationsbildung und die angewandten oder bürgerlichen Rechnungsarten mit und nach und

durch einander bald die gleichen, bald die verschiedensten, bald die leichtesten, bald die schwierigsten Rechnungshülfsmittel in Anspruch nehmen. Die Befolgung einer derartigen Stufenfolge würde also einen einheitlichen methodischen Unterrichtsgang unmöglich machen.

Es genügt, die Namen der wichtigern Rechnungsarten, wie diese in vielen Rechnungsbüchern aufgeführt und durchgenommen werden, bloß hinzusetzen, um zu zeigen, welch abscheulich Gallimatias sie zusammen bilden. Man zählt z. B. auf: Reduktionsrechnungen; Regel de Tri; Verwandlungs-, Tausch- (Stich-) und Wechselrechnungen; Einkaufs-, Verkaufs-, Arbeits-, Erwerbs- und Verbrauchsrechnungen; Abzugsrechnungen, Tara-, Fusti- und Diskontorechnungen; zusammengesetzte Regel de Tri, Kettensatz, Zeit-, Münz- und Kursberechnungen; Längen-, Flächen- und Körperberechnungen; einfache und zusammengesetzte Interessenrechnungen; Gesellschafts-, Termin- und Mischungsrechnungen ꝛc.

Man sieht, daß, so viele Pleonasmen hier auch vorkommen, das endlose Gebiet des Stoffes doch nicht erschöpft wird. Billig deuten auch die „Mischungsrechnungen" am Ende an, auf welchem Eintheilungsgrunde dieses Durcheinander beruht. Auf den Schüler, selbst auf den vorgerücktern, muß dieß einen nachtheiligen Eindruck ausüben; Abneigung oder Verwirrung oder beides zugleich sind gewöhnlich die Früchte, die hieraus erwachsen.

Um den angewandten Rechnungsunterricht der Volksschule wahrhaft methodisch zu gestalten, ist dreierlei unerläßlich:

1. Das angewandte Rechnen muß nach dem gleichen Prinzip gegliedert werden, nach welchem sich das reine Rechnen entwickelt. Dieses Prinzip ist der Bildungsprozeß der Operationen (Zählformen).

2. Zu jeder Stufe dieser Gliederung dürfen nur diejenigen Anwendungen herbeigezogen werden, die der Fassungskraft des Schülers angemessen, also seinem Erfahrungskreise nicht fremd sind, oder die wenigstens ohne Zwang in den Bereich seiner natürlichen Anschauung und Auffassung gebracht werden können.

3. Mit der wachsenden geistigen Kraft des Schülers im Allgemeinen und seiner zunehmenden Operationskraft im Besondern, so wie mit seiner immer größer werdenden Erfahrung und Be-

obachtung auf dem Größengebiete der Natur und des Lebens werden nach und nach den Operationsformen des reinen Rechnens alle diejenigen Anwendungen unterlegt, welche die reale oder praktische Seite der mathematischen Bildung nach der Idee der Volksschule erfordert.

Diese Auffassung des angewandten Rechnens hat eine Gliederung des Stoffes zur Folge, die im besten Einklange steht mit derjenigen des reinen Rechnens und die sich mit dieser symmetrisch fortzieht, so daß beide ein harmonisches Ganzes ausmachen. Da verschwindet auf einmal die nach den Beziehungen des Stoffes uneintheilbare Menge der bürgerlichen Rechnungsarten: die sämmtlichen angewandten Rechnungsaufgaben zerfallen nach der Syntax der Operation in einfache oder zusammengesetzte Operationssätze, d. h. jede dieser Aufgaben, in die arithmetische Sprache übersetzt, führt auf eine einzelne oder auf mehrere mit einander verbundene Rechnungsoperationen.

Demnach würden sich sämmtliche angewandte Rechnungen unter folgende Titel gliedern:

I. Einfache Operationssätze.

(Je eine Operation isolirt in einer Aufgabe eingekleidet.)

A. Der einfache Additionssatz, eine Rechnungsaufgabe, die durch bloßes Zusammenzählen gelöst wird.

B. Der einfache Subtraktionssatz, eine Rechnungsaufgabe, die man durch einfaches Wegzählen löst.

C. Der einfache Multiplikationssatz, eine Rechnungsaufgabe, die durch bloßes Vervielfachen gelöst wird.

D. Der einfache Divisionssatz, eine Aufgabe, die man durch Entvielfachung löst.

II. Zusammengesetzte Operationssätze.

Die zusammengesetzten Operationssätze sind zunächst:

A. Verbindungen zweier Operationen.

a. Verbundener Additions- und Subtraktionssatz, eine Aufgabe, in welcher die Addition und Subtraktion koordinirt mit einander verbunden sind.

b. Verbindung einer der beiden ersten Operationen mit der Multiplikation oder Division.

c. Verbundener Multiplikations- und Divisionssatz, oder einfacher Dreisatz, einfache Regel de Tri.

Ferner:

B. Verbindungen mehrerer Operationen.

a. Der mehrfach verbundene Multiplikations- und Divisionssatz, zusammengesetzter Dreisatz.

b. Der vermischte Operationssatz.

α. Verbindung verschiedener Operationssätze ohne Dreisatz.

β. Verbindung verschiedenartiger Operationssätze mit einem oder mehrern Dreisätzen.

Die obige Gliederung stellt die Hauptoperationssätze des angewandten Rechnens in der Volksschule dar; diese Hauptsätze stehen in dem Verhältnisse der Gleichberechtigung oder Nebenordnung zu einander. Es gibt aber noch untergeordnete Operationssätze, die hier ungefähr diejenige Stelle einnehmen, wie in der sprachlichen Satzlehre die Nebensätze zu den Hauptsätzen. Liegt mir z. B. eine angewandte Rechnungsaufgabe vor, die nach der obigen Gliederung als ein einfacher Operationssatz zu betrachten wäre, und stellt sich während der Ausführung der Operation etwa die Nothwendigkeit einer Zahlverwandlung in höhere oder niederere Einheiten ein, so steht die erforderliche Rechnungsverrichtung, durch welche die Verwandlung vollzogen wird, zu dem Hauptoperationssatz in ganz untergeordneter Stellung. Und wie nach der Grammatik die Hauptsätze die Hauptoperationen des Denkens ausdrücken, während die Nebensätze bloß untergeordnete mit denselben verflochtene Begriffe bezeichnen, so sind beim angewandten Rechnen die untergeordneten Operationen mehr zufällige Zwischenrechnungen, die mit den Hauptoperationssätzen verknüpft sein können.

Die Aehnlichkeit dieser arithmetischen Syntax mit derjenigen der Sprache springt in die Augen und sie wird auch für den Schüler nicht unfruchtbar sein, besonders wenn er zu der mehr passiven (rezeptiven) Richtung des Aufgabenempfangens auch die aktive (produktive) hinzugesellen muß, nach bestimmten arithmetischen Bedingungen angewandte Aufgaben selbsteigen zu bilden. Wie der Schüler in der Grammatik nach bestimmten Angaben einfache und zusammengesetzte Sätze bilden und so den Zusammenhang der Gedanken und ihre Verbindung erkennen und verstehen lernt, so lernt er im Rechnen durch die Bildung angewandter Aufgaben, welche die und die bestimmten Operationsverbindungen enthalten sollen, auf ganz natürlichem Wege begreifen, welche Operationen in beliebigen angewandten Rechnungsbeispielen eingekleidet sein können, und er gelangt so auf den rechten Standpunkt zu ihrer vernünftigen Auflösung. Die Analysirung und Ausrechnung

der selbstgebildeten Rechnungsaufgaben hat auch für den Schüler einen ganz eigenen Reiz, und mancher Vortheil in praktischer wie in rein intellektueller Hinsicht wird hiedurch erzielt, der vielleicht sonst gar nicht oder weit unvollkommener erreicht würde *.

Nun ist zweierlei nothwendig:

1. Müssen die oben genannten Operationssätze ganz genau aus den Stadien des reinen Rechnens herausfließen. Allein nicht eher, als bis ein Operationsstadium geistig sicher erreicht ist, dürfen die denselben entsprechenden angewandten Operationssätze durchgenommen werden. Und wie der Schüler mit den Operationen allmälig sich neue Zahlen zu eigen macht, treten diese Fortschritte auch in den entsprechenden Anwendungen hervor.
2. Nach den frühern Untersuchungen muß jederzeit das materielle Gebiet, auf welches die Operationssätze sich beziehen, dem Schüler völlig zugänglich, seiner Erfahrung und Anschauung, mit einem Worte seinem Bildungsstande angemessen sein. Dieses Gebiet wird ferner von den niedersten Stufen, von der kindlichsten Anschauungsweise an so fortschreiten und sich so erweitern, daß die Welt der Größen allmälig an dem Blicke des Schülers vorüberzieht, bis er dieselben endlich bis zu seinem Eintritt ins bürgerliche Leben in ihren Hauptanwendungen betrachtet und seiner berechnenden Untersuchung unterzogen hat.

Die Vertheilung der Operationssätze auf die Schulstufen und Schuljahre wird mit der frühern Gliederung der Operations- und Zahlenentwicklung zusammenstimmen. Wir wollen diese Vertheilung im folgenden Paragraphen übersichtlich darstellen.

§ 10.

Charakteristik der einzelnen Schulstufen in Hinsicht auf den Rechnungsunterricht und übersichtliche Vertheilung des reinen und angewandten Rechnens auf die Schulstufen und Schuljahre.

Wir haben beim Rechnungsunterricht der Volksschule vier Schulstufen ins Auge zu fassen, nämlich:

---

* Jene Klasse der Rechnungsaufgaben, die wir »unmittelbare« nannten, wird allgemein nicht nur viel zu wenig berücksichtigt, sondern so zu sagen

1. Die Elementarschule vom 6ten bis 9ten Altersjahre.
2. Die Realschule I. Stufe = 9ten = 12ten =
3. Die Realschule II. Stufe (Ergänzungsschule) = 12ten = 15ten =
4. Die bürgerliche Unterweisungsschule = 15ten = 17ten =

Die Elementarschule bewegt sich in der Sphäre der kindlichen Anschauung. Die Beobachtungen und Erfahrungen des Kindes im Kreise der Familie und der nächsten Umgebung bieten die Hauptanhaltspunkte für den Unterricht. Das Rechnen in der Elementarschule unterscheidet sich vor demjenigen der folgenden Schulstufen in formeller und materieller Beziehung. In ersterer Hinsicht ist das Verhältniß zwischen dem Lehrenden und dem Lernenden weit unmittelbarer und direkter als beim folgenden Unterricht: die vorherrschende gegenseitige Mündlichkeit zwischen Lehrer und Schüler sticht charakteristisch hervor; das Schriftliche ist weit untergeordneter, indem es bei Reproduktion der Uebungen auftritt, durch welche der mündliche Unterricht bereits wirksam war. Der Hauptunterschied zwischen dem Rechnen auf der Elementar- und auf der Realstufe besteht in materieller Hinsicht.

Die Elementarschule entwickelt und stärkt die Zählkraft; sie vermittelt in einem noch leicht zu übersehenden Umfange und unter beständiger Anlehnung an wirkliche zählbare Dinge die Zahlbildung; ihre Wirksamkeit ist also hauptsächlich eine innere. Dagegen liegt die eigentlich praktisch reale Seite, wie sie im vorigen Paragraphen beim „angewandten Rechnen" ins Auge gefaßt wurde, oberhalb dieser Schulstufe. Die einfachen Anwendungen, die in den Kreis der Elementarschule zu ziehen sind, gehören noch ganz dem kindlichen Leben an, und das reale Gebiet der Natur und des bürgerlichen Lebens, deren Verhältnisse durch die Rechnungshülfsmittel der Elementarschule noch zu wenig beleuchtet werden können, wird erst auf der folgenden Stufe wirklich erschlossen.

Für Alles gibt indessen diese Stufe als Elementarstufe die Elemente: die Elemente der Zahlbildung durch die Zählformen und die Elemente des angewandten Rechnens durch Beziehung des Zählens auf den kindlichen Lebenskreis. Die letztern bilden die Einleitung zum angewandten

---

vernachlässigt. Es verdient aber diese Richtung der »Selbstauffassung und Selbstbildung« mit allem Recht eine sorgfältige Pflege, denn hieraus vermag eben das hervorzugehen, was man beim Rechnungsunterricht so oft nicht erzielt: die Selbstständigkeit der Schüler.

Rechnen der folgenden Schulstufe, damit diese nicht zu plötzlich den Schüler in ein neues Rechnungsgebiet versetzen muß.

Der Charakter der Realschule liegt vornämlich in der allseitigen Einführung des Schülers in die reale Welt, mit welcher derselbe durch Benutzung der sich stets erweiternden Rechnungshülfsmittel allmälig immer mehr Bekanntschaft macht. Hier tritt also das materiale Element als gleichberechtigt neben dem formalen auf.

Durch den Rechnungsunterricht werden aber nicht bloß die Verhältnisse des realen Lebens schärfer aufgefaßt, der Unterricht selbst auch erhält hiedurch eine solidere Unterlage, durch die er innerlich wieder eben so wirksam wird, als er es äußerlich durch seine werthvollen Zahlergebnisse ist. Nicht die Fortschritte in der erweiterten Zahl- und Operationsauffassung bilden also das Charakteristische dieser Schulbildung, dasselbe liegt vielmehr in der Tendenz der realen Anwendung jener geistigen Hülfsmittel, und daher ist der Name „Realschule" hier auch gerechtfertigt.

Die Realergänzungsschule * hat aber noch eine sehr wichtige, ja mit Beziehung auf den Enderfolg und die ganze Bedeutung des Unter-

---

* Der neuern Volksschule, vorzüglich auch der zürcherischen, mangelt immer noch eine nach außen und innen vollständig organisirte Realergänzungs- oder Fortbildungsschule, so wie noch gar nirgends allgemein für eine höhere Schulabtheilung zur direkten Vorbereitung für den Eintritt des Schülers ins staatlich bürgerliche Leben gesorgt ist.

So lange man aber noch diese beiden Schulabtheilungen zur bestimmten Erzielung einer beruflich und staatlich bürgerlichen Vorbildung bloß in Gedanken und nicht in der That auf die beiden Grundschulstufen aufbaut und diesen entsprechend nach der Aufgabe der Volksschule organisirt, so lange fehlt die erfolgreichste und wichtigste der Schulabtheilungen: das Volksschulgebäude ist unausgebaut und ungedeckt, es mangelt das Stockwerk, auf welchem es erst heller und freier zu werden beginnt und welches das Ganze deckt, schützt und schirmt und vor Verwitterung bewahrt. Und eben so lange werden auch die gegründeten Klagen laut werden, daß die Wirksamkeit dieser unvollendeten Volksschule eine ungenügende sei, daß die Schüler im Leben den Erwartungen nicht entsprechen, die von einer wahren Volksbildung zu hoffen sind.

Es ist ein sehr wohlfeiles Auskunftsmittel, den Fehler in den untern Schulstufen, in der bloßen Kinderschule, zu suchen: Was man dieser mehr aufbürdet, geschieht auf Kosten einer naturgemäßen, gedeihlichen Entwicklung; was man ihr wegnimmt, nimmt man der Volksbildung überhaupt weg. Es ist schon oft gesagt worden und muß immer

richts für das Leben die wichtigste Aufgabe zu erfüllen. Die vorhergehende Schulabtheilung führt den Schüler bloß in die Realkunde ein; ihre dießfälligen Leistungen sind mit Rücksicht auf das Alter der Schüler noch zarte Anfänge. Die Realergänzungsschule fällt nun auf diejenige Altersstufe, auf welcher eine reifere, gesteigerte Erfassung der realen Verhältnisse im Sinne der Abrundung und des endlichen Abschlusses erst möglich ist.

Dem beruflich bürgerlichen Leben steht die in Betrachtung liegende Schulstufe insbesondere nahe: der Schüler geht dem Zeitpunkte entgegen, da ihm die Berufswahl bevorsteht; die speziellere Richtung des Rechnungsunterrichtes auf die bürgerlichen Berufsarten ist also in der Sache selbst begründet und zeichnet diesen Unterricht vor dem frühern insbesondere aus. In rein arithmetischer Beziehung führt diese Schulstufe die Zahlbildung der Volksschule zu Ende, indem sie dem ganzen Zahlgebäude eine bestimmt begränzte Gestalt gibt, so daß der folgenden letzten Schulstufe in diesem rein innern Theile des Rechnungsunterrichts keine neue Aufgabe mehr bevorsteht.

Die bürgerliche Unterweisungsschule übernimmt die eigentliche Vorbereitung des Schülers für den Eintritt ins staatlich bürgerliche Leben.

Der Rechnungsunterricht ist hier nicht mehr Zahlenlehre, er wird dagegen zur Anleitung, den Gemeinds- und Staatshaushalt, hauptsächlich das darauf bezügliche Rechnungswesen in den verschiedenen Guts- und Verwaltungsrechnungen kennen zu lernen.

Nach den frühern Betrachtungen über die Methode des reinen und angewandten Rechnens vertheilt sich nunmehr der Lehrstoff für den Rechnungsunterricht auf die eben unterschiedenen Schulstufen in folgender Weise:

I. Schulstufe, Elementarschule.

Vom 6ten bis 9ten Altersjahre.

1tes Schuljahr: Weckung der Zählkraft und hieraus folgende Bildung der ersten absoluten Zahlen bis zu einer sehr mäßigen Höhe (ein paar Zehner). Befestigung durchs Zu- und Wegzählen. Erste Zahlbezeichnung.

---

noch wiederholt werden — denn es gibt Dinge, die man nicht bloß einmal zu sagen braucht —: so lange die Volksschule nicht vollständig ihrem Zwecke gemäß organisirt und in angemessener Weise über die Kinderjahre hinaus bis zum Alter der Mündigkeit ausgedehnt wird, so lange ist eine ersprießliche und segensreiche Wirksamkeit der Volksschule unmöglich.

2tes Schuljahr: Fortsetzung der Zahlbildung durch die Operationsfähigkeit im Zu- und Wegzählen bis zum Hunderter. Fortbildung des Zählvermögens durch die Anfänge des Vervielfachens und Entvielfachens.

3tes Schuljahr: Weiterführung der Zahlbildung bis zum Tausender. Befestigung des arithmetischen Denkens in Multiplikation und Division und Auffassung der hieraus folgenden Zahleigenschaften. Die einfachsten Operationseinkleidungen als Ueberleitung aus dem kindlichen Rechnungskreise in das Realgebiet des angewandten Rechnens.

II. Schulstufe, Realschule.

Vom 9ten bis 12ten Altersjahre.

4tes Schuljahr: Auffassung des Zahlgebietes bis zu den Zehntausendern, höchstens bis zum Hunderttausender, und Bekräftigung durch die 4 Zählformen, deren Abstammung und Verwandtschaft dem Schüler nunmehr zum völligen Bewußtsein gelangen soll. Die einfachen Operationssätze als Anwendungen aus demjenigen Kreise des realen Lebens, der dem Schüler am nächsten liegt; der Form nach:

1. Einfache Operationssätze mit einfach benannten Zahlen.
2. Einfache Operationssätze mit mehrfach benannten Zahlen.

5tes Schuljahr: Abschluß des (dekadischen) Zahlensystems nach oben. Einsicht und Fertigkeit im Operiren bis zu den Millionen. Bildung der Bruchtheile und des Bruchs überhaupt. Die 4 Zählformen mit gleichnamigen Bruchtheilen.

Als angewandtes Rechnen im Sinne der allmäligen Erweiterung des materialen Rechnungsgebietes mit Berücksichtigung der Fortschritte in der Bruchbildung:

1. Einfache Operationssätze.
2. Verbundener Additions- und Subtraktionssatz.
3. Verbindungen der Multiplikation oder Division mit einer der beiden ersten Operationen.

4. Verbundener Multiplikations- und Divisionssatz, oder einfacher Dreisatz.

6tes Schuljahr: Das Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen unter Weglassung der komplizirtern Bruchverbindungen.

Als angewandtes Rechnen fortschreitend in der materialen Erweiterung und mit Einflechtung der Brüche:

1. Einfache Operationssätze.
2. Paarweise Operationsverbindungen und hauptsächlich die mannigfaltigen Anwendungen des einfachen Dreisatzes.

III. Schulstufe, Real-Ergänzungsschule.

Vom 12ten bis 15ten Altersjahre.

7tes Schuljahr: Ableitung der Dezimalbrüche und Abschluß des Zahlensystems nach unten. Einfaches Rechnen mit Dezimalbrüchen. Anwendungen im Sinne der realen Erweiterung:

1. Einfache Operationssätze mit Einflechtung von Dezimalbrüchen.
2. Paarweise Operationsverbindungen, hauptsächlich Dreisatz mit Dezimalen.
3. Mehrfach verbundener Multiplikations- und Divisionssatz, oder zusammengesetzter Dreisatz.

8tes Schuljahr: Nachholung der zusammengesetztern Bruchverbindung mit besonderer Rücksicht auf möglichste Rechnungsabkürzung. Fortsetzung des abgekürzten Rechnens mit Dezimalbrüchen. Anwendungen:

1. Vermischte Operationsverbindungen; Stoff vorzüglich aus dem allgemeinen beruflichen Leben.
2. Einfache Buchführung auf das beruflich bürgerliche Leben bezogen.

9tes Schuljahr: Operationsverbindung vermischter Zahlen. Abgekürztes Schnellrechnen. Zusammenhängende Entwicklung des bis jetzt durchlaufenen Rechnungsgebietes zum Zwecke einer abgerundeten Auffassung des Ganzen. Anwendungen, das bürgerliche Rechnungsgebiet möglichst erschöpfend:

1. Vermischte Operationssätze
   a. ohne Dreisatz,

b. mit dem Dreisatz verflochten.

2. Rechnungen über einzelne bei der Buchhaltung durchgeführte Geschäfte.

IV. Schulstufe, bürgerliche Unterweisungsschule (Zivilschule).

Vom 15ten bis 17ten Altersjahre.

10tes und 11tes Schuljahr: Rechnungen mit Beziehung auf das allgemeinbürgerliche Leben:

1. Rechnungen aus der Familiengutsverwaltung: Vormundschaftsrechnungen ꝛc.
2. Oeffentliche Gutsrechnungen: Gemeinds-, Kirchen-, Schul-, Armengutsrechnungen ꝛc. nebst Hinweisung auf die Grundzüge der Staatsrechnung (Büdget).

§ 11.

Einige historisch kritische Bemerkungen über die Methodik des Rechnungsunterrichts in Volksschulen.

Schon die Volksschulen der Alten — wenn man jene Unterrichtsanstalten mit diesem Ausdruck bezeichnen darf — schenkten der Rechenkunst eine sehr große Aufmerksamkeit. Bei den Römern wurde sie sogar in einzelnen Schulen * fast als ausschließlicher Unterrichtsgegenstand betrieben und sie diente da besonders als ein Hülfsmittel zur Erzielung materieller (ökonomischer) Zwecke.

Die Pythagoräer schätzten die Arithmetik vorzüglich in metaphysischer Beziehung, und hierin wohl in allzu hohem Grade, während die Schule des Sokrates (Plato) minder übertrieben und bestimmter deren Einfluß in geistiger und materieller Rücksicht hervorhob.

Bezeichnend ist der Ausdruck Rechenkunst.

Auch in den Volksschulen einer viel spätern Zeit (aus denen sich unsere neue Volksschule bildete) galt das Rechnen durchweg als Rechenkunst; was darauf hinweist, daß bei diesem Unterrichte das Können das Erste und Vorzüglichste, wo nicht meistens das Einzige war.

---

* Besonders des Flavius (Horat. Ars poetica).

Fast bis auf die Zeit, da Pestalozzi durch seine Elementarbücher auch im Rechnungsunterricht eine neue Bahn brach, wurde in der Volksschule die Anlernung von Rechnungspraktiken als die Hauptsache betrachtet. Die Operationen blieben der Masse — einzelne verhältnißmäßig seltene Ausnahmen abgerechnet — bloß äußerliche Formen und Hülfsmittel; die Ziffernanschreibung und Aussprechung galt irrthümlicher Weise als Zahlauffassung (so wie das Sprechen der Zahlenreihe als Zählen); von der Auffassung der Zahleigenschaften durch operationsgemäße Zahlvergleichung war noch weniger eine Spur. Das ganze Rechnen war ein höchst beschränktes, mechanisches Geschäft, ohne Einheit in seinem innern Wesen und ohne irgendwelche naturgemäße Gliederung in seiner äußern (materiellen) Anwendung *. Und bei Allem und vor Allem mangelte die Hauptsache: der erziehende Einfluß durch naturgemäße Erfassung, Pflege und Kräftigung der geistigen Entwicklung des Kindes.

Mit Pestalozzi begann der Zeitraum der gänzlichen Umgestaltung des Rechnungsunterrichts in den Volksschulen; ein neuer und freier Geist, der das Gesetz der psychologischen Entwicklung ins Recht einsetzte, lebte auf und führte vom todten Buchstaben zur lebendigen Anschauung der Sache. Während früher die Ziffer mit den an ihr angewandten äußerlichen Operationen die Hauptsache des Rechnungsunterrichts bildete, so traten jetzt an deren Stelle die Zahl und Zahlvergleichung, welche als formales Bildungsmittel mit der größten Erschöpfung verfolgt wurden.

Es führte dieß zwar auf ein der frühern Unterrichtsweise entgegengesetztes Extrem: die Bedeutung der Operation als solcher und die materiale Anwendung für die Zwecke des Lebens traten zu sehr in den Hintergrund.

Diese eigenthümliche Stellung, die der Pestalozzi'sche Rechnungsunterricht einnahm, schildert der talentvolle Pestalozzianer Joseph Schmid auf folgende Weise:

„So wie im Publikum nur eine Stimme darüber war, daß es unsere Kinder im Rechnen zu einer unglaublichen Fertigkeit gebracht, besonders im Raisonnement und in der Einsicht, so wie in der mechanischen Ausübung

---

* Hiebei suchte man dem Rechnen häufig wenigstens einen Anstrich von erziehender Einwirkung dadurch zu geben, daß man mit allen möglichen, oft einfältigen, oft anstößigen Rechnungsexempeln aus der biblischen Geschichte Parade machte.

im Kopfe; so war auch nur wieder eine Stimme, daß, wenn diese Kinder ins Leben einträten, sie den Erwartungen ganz und gar nicht entsprächen, welche man unter jenen Umständen hegen mußte, ja, daß sie den gewöhnlichen Schulkindern nachstünden. So wie das Eine eine allgemeine Sage war, die viel Wahres hatte, so war es auch das Andere. — Ihr kennt die Pestalozzischen Rechnungselementarbücher, ihr kennt die Vorwürfe, die man ihnen machte *; — ich sage nichts Weiteres dazu. — Ich berühre nur einen Hauptfehler der ersten Elementarbücher und behaupte, es fehle ihnen ganz, was man gewöhnlich hatte und kannte, nämlich die 4 Spezies; sie hatten, was man gewöhnlich nicht mehr kannte, die Vergleichung der Zahl. Dieses brachte unsere Anstalt und die Welt zum Theil in eine babylonische Verwirrung; unsere Schüler waren sehr stark in dem, was die Welt nicht kannte und nicht verstand, und sehr schwach in dem, was die Welt wenigstens der Form nach hatte; und so ist leicht zu begreifen, daß auch große Rechner unsern Schülern auch in diesem beschränkten Zustande nicht folgen konnten; daß dieses auch jetzt noch mehr der Fall sein muß, leuchtet ein, indem unsere Kinder in beiden sehr stark sind, während die Welt nur eine beschränkte Form hat, kennt und ausübt. Viele werden glauben, ich habe nicht ganz Recht; sie sei und habe mehr. Ich aber antworte, daß dieses bei einzelnen Menschen allerdings der Fall sein könne; bei der Masse ist es aber doch nicht so."

Die Pestalozzianischen Bearbeitungen des Rechnungsunterrichts gingen allerdings in ihrer elementarischen Allseitigkeit zu weit und nahmen für sich zu viel Zeit in Anspruch. So tritt bei Schmid eine sehr ausgesponnene Zahlenkünstelei namentlich auch im Kopfrechnen hervor und endlose Beispiele folgender Art:

Zu welcher Zahl muß man eins, zwei, drei, vier u. s. f. hinzuthun, bis ihr Doppeltes gleich 100 ist? Wie oft muß man 3 zu 100 hinzuthun, während man 1 zu 300 setzt, bis man auf dem ersten Wege so viel erhält als auf dem zweiten? Wie oft muß man von 150 wegthun

* Beim Erscheinen von Pestalozzi's Elementarbüchern wurden selbst viele seiner Freunde etwas betroffen. Man nannte seine »Zahlenverhältnisse« eine Prachtausgabe des Einmaleins, ein unfruchtbares Zifferspiel, das im Grunde nichts weiter als ein Rechnen mit unbenannten Zahlen sei und nur Fertigkeit im arithmetischen Mechanismus, nicht aber wahre Anschauung gewähre, was doch Pestalozzi wolle.

5, während man von 400 wegthut 2, bis die eine Zahl gleich wird der Hälfte der andern?

sind in ihrer wirklichen Ausführung immerhin etwas unfruchtbar. Wenn aber Schmid hierin und besonders auch in seiner Erwartung: „die Masse des Volkes solle und könne zur Algebra und eigentlichen Mathematik erhoben werden", zu weit ging, so liegt dennoch seinen Rechnungswerken der wahre Geist der Mathematik der Volksschule zu Grunde; es ist dieß derselbe, wie er sich z. B. aus folgender Stelle aus seinem Vorworte zur „Anwendung der Zahl auf Raum, Zeit, Werth und Ziffer" kund gibt:

„Ihr kennt das Ein mal Eins, welches man unbedingt von jedem Schüler, der das Rechnen lernen soll, fordert. Dieses Ein mal Eins sind noch Ueberbleibsel oder Trümmer eines bessern Geistes, der aber aus denselben nicht mehr zu erkennen ist. Sogar der stärkste und schärfste Kenner könnte es kaum mehr.

„Wir führen unsere Kinder in diese unerkennbaren Ruinen ein, und glauben dadurch ihnen das nöthige Fundament gegeben zu haben; wir waren und sind noch im Irrthum, die Kinder müssen sich dieses Fundament und Gebäude selber schaffen."

Nicht durch ihre **äußerlich** bestimmt formulirte Methode, sondern durch den lebensvollen, wahrhaft pädagogischen Geist, welchen die Pestalozzische Schule dem vor ihr einem todten Mechanismus verfallenen Rechnungsunterricht wieder einhauchte, hat diese ihr größtes bleibendes Verdienst um die Entwicklung und Vervollkommnung unsers Bildungsfaches erworben.

Es konnte also von da an und kann bis zur Stunde von einer Totalumänderung der Pestalozzischen Methode nicht die Rede sein, wie eine solche Umgestaltung durch Pestalozzi dem frühern Rechnungsunterricht gegenüber statthatte; die obersten Prinzipien werden und müssen bleiben. Dagegen sind bereits in einigen Hauptbeziehungen Verbesserungen und Vervollkommnungen theils durchgeführt, theils eingeleitet.

Dieselben beziehen sich hauptsächlich auf die Gliederung des reinen Rechnungsstoffes und die entsprechende Verbindung desselben mit dem angewandten Rechnen.

Von den bekanntern Rechnungsbüchern, die hierin theils Besseres anstreben, theils wirklich erzielen, nennen wir diejenigen von Hentschel, Heer, Stern, Scholz, Diesterweg und Hauser, Unger, Grube.

Am eigenthümlichsten treten die letztern auf und von diesen befolgt insbesondere Grube in seinem „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode" eine in mehrfacher Beziehung abweichende Methode.

Wir müssen zum Voraus erklären, daß wir mit der speziellen Ausführung dieser Methode besonders in Hinsicht auf die Entwicklung des reinen Rechnungsstoffes nicht einverstanden sind, sondern daß es uns scheint, Grube sei unvermerkt, indem er den Pestalozzischen Formalismus vermeiden wollte, auf einen in seiner Ausführung eben so gefährlichen Schematismus gelangt und zwar ohne daß es in den obersten Prinzipien der Methode des Rechnens lag, wie er dieselben in der sonst vortrefflichen Einleitung zu seinem oben genannten Werke entwickelte. Wir müssen nämlich eben so offen gestehen, daß uns jene Prinzipien sehr begründet und eben so sachgemäß entwickelt erscheinen; dieselben gehen auch zum größern Theil mit den obersten Prinzipien der Pestalozzischen Methode Hand in Hand.

Wenn Grube z. B. verlangt:

Die Entwicklung und der Fortschritt des Stoffes müsse zusammenfallen mit der Entwicklung des kindlichen Geistes, so daß für das Objekt wie für das Subjekt jede folgende Stufe eine mit Nothwendigkeit aus der vorhergehenden sich entfaltende, und ebenso immer die nothwendige Entwicklungsbasis für die ihr folgende darstelle.

Ausgangs- und Mittelpunkt müsse die Anschauung bilden.

Alles Rechnen sei Denkrechnen.

Das Kind lerne Zählen **und** Rechnen zugleich.

und so noch viele derartige allgemeine Grundsätze:

so ist dieß Alles sehr schön und gut, zieht aber durchaus nicht das speziell formgebende methodische Gesetz nach sich:

Jede Zahl sei gleich **allen** Operationen zu unterwerfen, so daß der Fortschritt also durchaus nicht in einer neuen Operation liegt, die man lernt, sondern in einer neuen Zahl, zu der man gelangt.

Wir verkennen zwar den Zweck, der auf diesem Wege erstrebt werden soll, durchaus nicht. Grube erkannte, daß nur derjenige ein selbstständiger und gewandter Rechner sein kann, der die Zahlen seines Rechnungsgebietes so genau kennt und beherrscht, daß ihm die Eigenschaften ihrer operationsgemäßen Bildung zum vollständigen Bewußtsein und dadurch zu festen Leitpunkten für eine schnelle und fertige Rechnungskombination geworden sind.

Dieser Zweck ist ein äußerst wichtiger, aber der Weg, der zu dessen Erreichung eingeschlagen wird, ist ein pädagogisch unzulässiger; denn er steht sowohl mit der historischen (objektiven) Entwicklung als mit der psychologischen (subjektiven) im Widerspruch.

Nach diesem Verfahren werden nämlich gleich beim Beginne des Rechnungsunterrichts die Operationen als die Mittel vorausgesetzt und angewendet, um den Schüler die Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. f. auffassen zu lassen. Nun sind aber die Operationen nicht etwas in erster Linie Gegebenes, sondern etwas Abgeleitetes, d. i. etwas durch stufenweise Entwicklung aus dem Grunddenkakte des einfachen Zählens Gebildetes; und zwar ist auch da wieder zu unterscheiden, daß die verschiedenen Operationsstufen ganz ungleich frühe Entwicklungsstadien darstellen. So wird z. B. Niemand läugnen wollen, daß die Multiplikation eine weit spätere Entwicklungsstufe darstellt als die Addition, denn um von dieser zu jener zu gelangen, bedurfte es eines bedeutenden Aufschwungs in der Abstraktion; eben so mußte die Addition als (sprungweises) Zählen von Gesammtheiten ihre gehörige Vorbereitung haben in dem (schrittweisen) Zählen von Einheiten, weßwegen die Addition im Allgemeinen eben auch ein späteres Erwerbniß ist als die Grundstufe des ersten Einheitenzählens.

Wer also gleich beim ersten Rechnungsunterrichte alle Operationsformen einführt, der handelt gegen die historische (objektive) Entwicklung.

Wer aber die Schüler von Anfang an alle Operationen anwenden läßt, um sie die Zahlen erwerben und allseitig auffassen zu lassen, der verlangt, daß sie Mittel benutzen sollen, die für sie noch gar nicht existiren, d. h. er handelt gegen die psychologische (subjektive) Entwicklung.

Das ist der innere Grund, warum die von Grube angebahnte Methodisirung des Rechnungsunterrichts unzulässig ist. — Während die Pestalozzische Schule die Operationen zu sehr hintansetzte, werden sie nun von Grube vorausgesetzt.

Die Ausführung der genannten Methode zeigt dann besonders ihre Mängel und Schwierigkeiten; das Kind wird von Anfang und auf einmal in eine Unmasse der verschiedenartigsten, zum Theil schwierigen Vorstellungsweisen eingeführt, in denen sich selbst gereiftere und geübtere Schüler nicht immer ganz zurechtfinden. Es ist eigentlich unbegreiflich, wie man einem Kinde, um es z. B. die Zahl zwei auffassen zu lassen (also bevor es eine drei, vier, fünf u. s. f. aufgefaßt, also noch irgendwelche

Erfahrung im Rechnen gemacht hat), zumuthen kann, sich in den Inhalt des ganzen folgenden Schema's und die mannigfaltigen Anschauungsweisen der damit verknüpften Aufgaben hineinzufinden:

Aus Grube's Leitfaden Seite 53 und 54.

$1 + 1 = 2$ Zwei ist 1 mehr als 1.

$2 \times 1 = 2$ 2 ist das Zweifache von 1 oder das Doppelte von 1.

$2 - 1 = 1$ 1 ist 1 weniger als 2.

$2 : 1 = 2$ Ich kann die 1 von der 2 zwei Mal wegnehmen, oder 1 ist in 2 zwei Mal. Eins ist der zweite Theil oder die Hälfte von zwei.

Ferner:

Welche Zahl steckt 2 Mal in der Zwei? Von welcher Zahl ist 2 das Doppelte? Von welcher Zahl ist 1 die Hälfte? Welche Zahl muß ich verdoppeln, um 2 zu bekommen? Ich kenne eine Zahl, die hat 1 mehr als 1; welche ist das?

Fritz hat 2 Pfennige und kauft sich für 1 Pfennig Kirschen; wie viel behielt er noch? Ein Schieferstift kostet 1 Pfennig, wie viel kosten 2 Schieferstifte? Karl hat in seiner Sparbüchse einen Groschen, seine Schwester hatte gerade noch einmal so viel, wie viel hatte diese? Wie viel Pfennigsemmeln kannst du für 2 Pfennige kaufen?

Nur schon das Aeußere der schriftlichen und mündlichen Bezeichnungs- und Ausdrucksweise verlangt von dem Schüler in dieser Form auf einmal viel zu viel, geschweige denn der innerliche Gehalt der Sache.

Andere Methodiker, die den gleichen Gang befolgen, bringen sogar noch mehr Formen und Wendungen *: und das nennt man dann elemen-

---

* Z. B. Chr. G. Scholz in seinen **Zahlenkübungen** in elementarischer Allseitigkeit ꝛc. Seite 20 und 21 für die Zahl 4:

Vier ist 4 Mal 1. Eins ist folglich 4 Mal in 4 enthalten. Eins kann von 4 vier Mal genommen werden ꝛc. Nehme ich Eins vier Mal von 4, so bleibt gar nichts. Zwei kann ich zwei Mal von 4 wegnehmen. Zwei ist in 4 zwei Mal enthalten. Vier hat vier Theile. Eins ist ein Theil von 4, zwei ist auch ein Theil von 4, drei ist auch ein Theil von 4. Eins ist der vierte Theil von 4 oder 1 ist ein Viertel von 4. Zwei ist zwei Mal der vierte Theil von 4 oder 2 Viertel von 4; 3 ist 3 Mal der vierte Theil von 4, oder 3 Viertel von 4, oder 3 Viertel Mal 4. Zwei Mal der vierte Theil von 4 ist 2; 3 Mal der vierte Theil von 4 ist 3 u. s. f. 4 ist um 3 mehr als 1 und 3 ist um 1 weniger als 4 ꝛc.

Wenn Jemand 2 ungleiche Brote für 4 Sgr. kaufen will, so kann eins

tarische Allseitigkeit und Gründlichkeit, wie sie von Manchen z. B. auch auf dem Sprachgebiete (hier aber wo möglich noch ausgedehnter) betrieben wird.

Mit dieser Gründlichkeit verhält es sich indessen ein wenig sonderbar. Bei allen oben zusammengestellten Fragen muß vorausgesetzt werden, daß der Schüler also erst die beiden Zahlen 1 und 2 in sich gebildet habe. Ist's nun nicht die eine, so ist's die andere. Wenn z. B. gefragt wird: Ich kenne eine Zahl, die hat 1 mehr als 1, welche ist das? — so trägt dieß jedenfalls nicht dazu bei, den Schüler an allseitiges und gründliches Denken zu gewöhnen: er braucht bloß zu rathen und je die andere Zahl, die er noch im Vorrath hat, anzugeben. Fehlschießen kann er da nicht wohl.

Wie oben für die Zahl zwei dargestellt worden, so geht der Grube'sche Unterrichtsgang von Zahl zu Zahl wesentlich gleich fort, natürlich nur an Umfang und Mannigfaltigkeit der Formen zunehmend. Ebenso ist auch bei der Rechnung mit Brüchen der gleiche Schematismus befolgt. Grube bemerkt irgendwo selbst, der Lehrer dürfe gewöhnlich sicher darauf rechnen, daß ihm die nächst zu behandelnde Zahl von den Schülern nach dem bekannten Schema schon zum Voraus ausgeführt werden könne, „denn der Schüler komme nach diesem Gange selbst hinter die Methode derselben". Wenn der Schüler wirklich die Methode auffaßte, so wäre das vorzüglich; wie aber, wenn der Schüler bloß das Schema auffaßt und das Uebrige nach diesem Schema ganz mechanisch ausführt und aufschreibt? Wir wollen nicht untersuchen, bei wie vielen Schülern und in wie vielen Schulen dieses Resultat ein ganz unvermeidliches sein würde.

Wenn es also Grube verwirft, daß für eine organische Gliederung des Rechnungsstoffes die „Operationen" das Eintheilungsprinzip für das reine, die „Rechnungsarten" dasjenige für das angewandte Rechnen bilden, so müssen wir den Satz aufstellen:

---

derselben 3 Sgr., das andere 1 Sgr. kosten. Ein Brot A wiegt 4 Pfund, ein anderes B 2 Pfund, ein drittes C 1 Pfund ꝛc. Das Brot A ist 4 Mal so schwer als das Brot C. Dieses ist nur ein Viertel Mal so schwer als das Brot A und halb so schwer als das Brot B. Das Brot A ist noch ein Mal so schwer (wiegt 2 Mal so viel) als das Brot B. Dieses ist ein halb Mal so schwer als das Brot A.

Dieß also für kleine Kinder, die noch nicht weiter Zahlen gebildet und gerechnet haben als von 1 bis 4.

Daß die Operation (nach ihrer historischen und psychologischen Entwicklung aufgefaßt) nicht bloß das Prinzip zur methodischen Gliederung des reinen, sondern auch des angewandten Rechnens der Volksschule bilden müsse.

Es läßt sich hier durchaus nicht einwenden: „Eine derartige Gliederung sei mit einem Anschauungsunterrichte zu vergleichen, der dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Größe, Gestalt, Farbe ꝛc. vorführe; oder mit einem Unterrichte in der Botanik, der mit dem Linné'schen Systeme beginne" u. s. f. Das wäre ein sehr ungeeigneter und unstichhaltiger Einwand.

Die Operationen (in ihrer wahren Bedeutung) bilden beim Rechnen keine bloß äußerlichen Gesichtspunkte, kein bloß äußerliches System; sie bilden das eigentliche und innere Wesen der Sache. Die Zahl, das mathematische Objekt, ist nicht das Erste, aus welchem sich die Operationen ergeben können; die Zahl muß vorerst geschaffen werden und das Erste, wornach sie geschaffen wird, ist das Zählen, das Grundgesetz der Operation. Dieß ist das Erste, Ursprüngliche, dem Kinde Innewohnende. Die Zahlen, wie wir schon weiter oben sagten, sind die ausgeführten Operationen der Arithmetik, während man die Dinge in der Natur, um vom Großen wie vom Kleinen zu reden, als die ausgeführten Operationen der Natur betrachten kann.

Indem der Lehrer die Grundthätigkeit des arithmetischen Denkens (das Zählen) in der Seele des Schülers aus dem Schlummer ruft und auf dem Wege der Anschauung und Ausscheidung gleichartiger Dinge entwickelt, beginnt der Schüler die ersten absoluten Zahlen nach der Reihe (natürlich zunächst bis zu einem sehr mäßigen Ziele) aufzufassen; er faßt sie in ihrem richtigen Quantitätsverhältnisse auf, ohne irgend eine höhere Operation nöthig zu haben, noch eine solche auch nur zu ahnen. Wie kann man nun diese erste, unabläugbar historisch bestätigte Entwicklungsstufe überspringen und auf einmal mit viel spätern, potenzirtern Denkformen vermengen wollen? Wie kann man die Kinder zur Auffassung der Eins, Zwei, Drei, Vier ... schon alle vier Operationen auf einmal sich bilden und anwenden lassen wollen?! Das verstößt gegen die Natur, das Metaphysische davon ist zu schwer, es wird, wenn's gut geht und sich nicht sonst eine unheilvolle Verwirrung daraus erzeugt, nicht gefaßt und das bloß Aeußerliche geht in schematischen Mechanismus über.

Die **Operation**, das **arithmetische Denkgesetz**, nach

den Hauptstadien seiner geschichtlichen Entwicklung und nach dem Gesetze der Seelenentwicklung des Kindes verfolgt, bildet das einzig richtige und natürliche Gliederungsprinzip des Rechnungsunterrichts der Volksschule.

Die Konsequenzen, die hieraus für die Gliederung und spezielle Ausführung des reinen und angewandten Rechnens entspringen, haben wir in den frühern auf die Methode des Rechnens bezüglichen Paragraphen (9 und 10) entwickelt.

Ueber einige zur Methodik des Rechnens gehörende speziellere Punkte.

§ 12.

Das sogenannte Denk- (Schluß-) und Regelrechnen.

Wir haben bei der Methodik des Rechnens nichts von diesen beiden Rechnungsweisen gesprochen, denn die Methode führte uns nur auf ein Rechnen, nämlich auf das mit Bewußtsein ausgeführte operationsgemäße Zählen. Dieß ist auch das eine Rechnen, das es gibt; was davon abweicht, mag irgend eine äußerliche Thätigkeit sein, aber kein Rechnen, weil kein Zählen, kein Denken.

Der Mangel an pädagogischer Einsicht, so wie eine verkehrte Auffassung des innern Wesens der Zahlenlehre haben den Gegensatz hervorgerufen zwischen Denk- und Regelrechnen; in That und Wahrheit besteht er nicht. Das wollen wir in Nachfolgendem zeigen.

Der feste, innige Zusammenhang der Zahl mit ihrer Form und ihrer äußern Bezeichnung macht die Zuziehung der Mechanik so leicht möglich, daß diese fast bei den meisten Rechnungen in höherm oder niederm Grade mitwirkt. Wird dieselbe im Bewußtsein dessen, was sie ist und auf welch innern Gesetzen ihre Anwendung beruht, benutzt, so vermag sie großen Vortheil zu leisten, eben weil man mit der Mechanik überhaupt das Material leichter bewältigt, als wie es durch den gewöhnlichen Angriff desselben möglich ist. Gewöhnlich versteht man unter mechanischem Verfahren das Arbeiten nach einer äußern Regel ohne weitere Einsicht in deren innere Berechtigung, und so bezeichnet man meistens auch durch das Regelrechnen ein Rechnungsverfahren ohne inneres Verständniß der Sache. Zugegeben nun, daß ein Operiren mit Ziffern oder Zahlen nach einer bestimmten

mechanischen Regel möglich ist, ohne daß dasselbe ein wirkliches Rechnen, ein Ableiten des Zahlergebnisses durch vernunftgemäßes Zählen, d. h. ein Denkrechnen genannt werden kann; so ist dagegen eben so richtig, daß das Regelrechnen nicht durchaus das Gegentheil vom Denkrechnen, also ein verstandloses Operiren sein muß.

Das Regelrechnen kann ganz wohl Denkrechnen sein und es ist's, sobald die Regel mit der geistigen Thätigkeit des Rechners so verwachsen ist, daß er ihre vernunftgemäße Ableitung klar übersieht. In dieser Weise ist die Anwendung der arithmetischen Operationen stets ein Regelrechnen, denn diese schließen eben diejenigen Regeln in sich ein, durch die man das mühsame schrittweise Zählen sich erleichtern oder dasselbe gar umgehen kann. Ja das Regelrechnen findet weit häufiger statt, als es auf den ersten Blick scheinen möchte, denn der Verstand bildet sich fast unvermerkt Regeln, die er befolgt, um seine Operationen abzukürzen und nicht bei Allem wieder von vorn beginnen zu müssen.

Also Denkrechnen und Regelrechnen sind keine Gegensätze, eins kann das andere sein, keines schließt das andere aus. Will man Kategorieen aufstellen, so wird man nach obiger Betrachtung etwa folgende erhalten:

Rechnen.

Verstandesmäßiges Ableitungsrechnen. — Maschinenmäßiges Regelrechnen.

Das eigentliche und wahre Rechnen ist das verstandesgemäße. Wird hiebei das Resultat begriffsweise entwickelt, so heißt das Verfahren Ableitungsrechnen; benutzt man dagegen hiezu eine schon zum Voraus abgeleitete, wohl auch geistig erfaßte Regel, so heißt es Regelrechnen. Das Operiren mit Ziffern oder Zahlen, wobei nach einer bloß äußerlich angenommenen Regel ein bestimmtes Zahlergebniß erhalten wird, kann maschinenmäßiges Rechnen genannt werden; es ist klar, daß dasselbe nur Regelrechnen sein kann. Man muß daher zwischen Regelrechnen und Regelrechnen wohl unterscheiden.

Das Rechnen des Volksschülers darf in erster Linie nie ein Regelrechnen, sondern es muß ein Rechnen der Ableitung sein; das erstere wäre für ihn von entschiedenem Nachtheil, weil er dadurch nicht entwickelt und geistig ausgebildet, sondern bloß äußerlich dressirt würde, und das bloß angelernte und angewöhnte Können wäre bei ihm auch durch nichts gesichert.

Man sagt zwar etwa: „Der Schüler soll die Sachen zuerst machen und möglichst fertig machen lernen, ihm ist das Machen selbst der Beweis und bei reiferem Alter wird wohl auch noch die tiefere Einsicht dazu kommen.“ Ist das Machen der Art, daß es als einfache Ableitung aus dem arithmetischen Denken entspringt, woraus sich ein gewisses Bildungsgesetz, eine Regel, wie von selbst hervordrängt, dann — geben wir zu — ist das Machen Beweis, vollgültiger Beweis, es ist bewußte Handlung, die in der Methode, im Geiste haftet. Ist bei dem Machen aber der Grund der Richtigkeit kein innerlich entsprungener, dann ist es nicht nur nicht bildend, es raubt dem Schüler gar noch für die Zukunft die Frische der Auffassung, es stumpft ab.

Das Regelrechnen wurde von der alten Schule ausschließlich getrieben, man unterschied alle möglichen Regeln zur Auflösung dieser oder jener Rechnungsart; dieselben gaben das äußere Verfahren an, um möglichst schnell je eine Klasse von Rechnungen fabrikmäßig lösen zu können, man hatte es, wie es bei Fabrikarbeiten stattzufinden pflegt, vom Stück, nicht von der Einsicht und bildenden Kraft. Von dieser Lehrart ist selbst in der neuen Schule noch zu Vieles übrig geblieben. — Damit soll indessen nicht gesagt sein, daß der Volksschüler bei seinem Rechnen keine Regeln befolgen solle, er wird allmälig beim Kurz- und Schnellrechnen — denn dieses hat die Volksschule durchaus nicht zu vernachlässigen — nach solchen verfahren, nur werden diese keine von außen aufgedrungenen, sondern solche sein, die er sich aus seinem Denkvermögen selbst abgeleitet hat. In dieser Weise ist für ihn die Befolgung einer Regel von innerem und äußerem Vortheil; er steht über, nicht unter ihr, sie ist sein.

Endlich unterscheidet man noch eine eigene Art des Ableitungsverfahrens: das Schlußrechnen; es ist dieß eine auf der Proportionalität der Größen im Allgemeinen und der Zahlen im Besondern beruhende Rechnungsweise, ein Umbilden durch Multiplikation und Division, oft ein Bilden der Einheit und aus der Einheit. Hiebei darf die Kenntniß der Proportionalität nicht verwechselt werden mit der Kenntniß der Proportionen überhaupt; jene muß sich der Schüler aneignen; er hat nach und nach die wichtigern Realfälle alle kennen zu lernen, bei welchen die Proportionalität auftritt; diese kann er entbehren, da er in den arithmetischen Grundoperationen der Mittel genug besitzt, um bei der Lösung der hierauf bezüglichen Aufgaben allen Anforderungen zu genügen (siehe oben Seite 24).

Da muß sich aber der Lehrer, respektive auch das Aufgabenbuch, hüten, dem Schüler Aufgaben vorzulegen, die sich auf Verhältnisse beziehen, bei denen die Proportionalität nur in der Idee, faktisch aber nicht besteht. Man trifft solche Aufgaben bei den Dreisatzrechnungen in manchen Schulbüchern noch sehr häufig; wir werden unten beim Rechnungsunterricht auf der Realstufe noch speziell auf diesen Punkt aufmerksam machen.

Im Allgemeinen ist das Ableitungsrechnen und in ihm das Schlußrechnen (als eine besondere Art des erstern) das wahre Rechnen der Volksschule; durch dasselbe wird auf den Geist, durch das Regelrechnen (von Anfang an) auf das Gedächtniß gebaut; welches der zuverlässigere Grund ist, sollte auf pädagogischem Gebiete entschieden sein.

§ 13.

Ueber Kopf- und Zifferrechnen.

Die ältere Schule hielt auf die Unterscheidung dieser beiden Rechnungsweisen sehr große Stücke; ja diese spielte lange Zeit eine so wichtige Rolle, daß eine jede von ihnen so zu sagen auf eigene Faust ausgebildet wurde. So kam es, daß man in der That zweierlei Rechnungsunterricht bekam, von denen jeder neben dem andern selbstständig behandelt werden wollte; man glaubte zwischen beiden nicht nur eine äußere, sondern hauptsächlich auch eine innere Verschiedenheit festhalten zu müssen. Das führte vom wahren Ziele ab. Diese ungereimte und verderbliche Auffassung und Durchführung des Rechnungsunterrichts hat sich indessen in der neuern Schule natürlich nicht halten können; doch spuckt der alte Unsinn bisweilen noch da und dort.

Die Entwicklung des Zahlensinnes führt vernünftiger Weise nur auf ein Rechnen; wir haben dasselbe in den vorausgegangenen Paragraphen bei der allgemeinen Methodisirung des Rechnungsunterrichts zu charakterisiren gesucht, und daher wurde dort weder vom Kopfrechnen noch vom Zifferrechnen als solchem ein Wort gesprochen.

Ueber diese beiden Rechnungsweisen hat man indessen schon so viel gestritten, daß die an sich sehr einfache Sache wenn nicht gerade zu einer verwickelten wurde, doch durch den Streit nicht viel gewonnen hat. Der ganze Streit über Kopf- und Zifferrechnen bezieht sich merkwürdiger Weise meistens auf das, was sie nicht sind, und nicht auf das, was sie sind; man mengt Alles durch einander; rationelles und mechanisches Rechnen,

Ableitungs- und Regelrechnen, mündliches und schriftliches, General- (Normal-) und Spezialverfahren. Weder das eine noch das andere bezeichnet ausschließlich den Charakter des Kopf- oder Zifferrechnens. Man kann zwischen Kopf- und Zifferrechnen offenbar keinen andern stichhaltigen Unterschied herausfinden als den höchst einfachen und äußerlichen, den ungefähr der Wortlaut selbst schon ausdrückt:

Das Zifferrechnen ist das Rechnen mit sichtbarer Bezeichnung der Zahl und Zahlverbindung, also **mit** Benutzung der Ziffer.

Das Kopfrechnen ist das Rechnen ohne sichtbare Bezeichnung von Zahl und Zahlverbindung, also **ohne** Benutzung der Ziffer.

Beides soll wahres verstandesgemäßes Rechnen sein.

Das Wort Ziffer weist darauf hin, daß bei ersterem dem Zahlengedächtniß weniger aufgebürdet, sondern ihm durch die Ziffer nachgeholfen werde; das Wort Kopf, daß man beim zweiten die Zahlen dem Gedächtniß anvertraue, nicht aber, daß nur bei diesem der Kopf (in der Bedeutung von Verstand — wie man es oft auszulegen pflegt —) gebraucht werde, bei jenem aber nicht.

Daß das Kopf- und Zifferrechnen weder durch das Eigenthümliche der einen noch der andern der obgenannten Rechnungsweisen charakterisirt werden könne, ist nicht schwer nachzuweisen.

Man kann nicht sagen: das Kopfrechnen sei mehr ein rationelles, ein Denkrechnen, das Zifferrechnen mehr ein mechanisches, ein Regelrechnen. Man kann beim Zifferrechnen eben so gut und intensiv denken als beim Kopfrechnen, obwohl man beim erstern äußere Anhaltspunkte benutzt; ja man kann bei demselben sogar noch ungestörter denken, da man der geistigen Thätigkeit keinen Eintrag durch gedächtnißmäßiges Festhalten der Zahlen thun muß und so die ganze Kraft dem eigentlichen Denkprozeß des Rechnens zuwenden kann. Es lassen sich aber auch beim Kopfrechnen eben so wohl Regeln befolgen wie beim Zifferrechnen, ja man kann dieselben, wenn es sein muß, beim einen gerade so mechanisch anwenden als beim andern (man denke hiebei nur an die vielfachen mnemonischen Hülfsmittel, die dem maschinenmäßigen Rechnen zu Gebote stehen können), so wie sich dagegen bei beiden der Gang der schlußgemäßen Ableitung mit gleicher Schärfe und Folgerichtigkeit einschlagen läßt.

Für Kopf- und Zifferrechnen darf nicht ohne anders gesetzt werden: mündliches und schriftliches Rechnungsverfahren. Der

mündliche Ausdruck ist zum Rechnen, als innerer Thätigkeit, nicht nothwendig und bedingt die Form des Rechnens keineswegs. Dasselbe Rechnen kann schriftlich und mündlich in gleicher Form dargestellt werden. Auch das Zifferrechnen kann mit mündlichem Ausdruck begleitet sein und da hat man ja beides, mündliches und schriftliches Rechnen, beisammen zum Beweis, daß beides nur ein Rechnen darstellt. Endlich müssen beim schriftlichen Rechnen nicht absolut Ziffern benutzt werden, da ja eine wörtliche Zahlbezeichnung auch angewendet werden könnte.

Man kann nicht sagen: beim Kopfrechnen befolge man ein Spezial-, beim Zifferrechnen ein Generalverfahren. Ein Generalverfahren ist diejenige Rechnungsweise, nach welcher alle Aufgaben einer bestimmten Gattung gelöst werden können. Ein Spezialverfahren ist diejenige Rechnungsweise, die einer einzelnen Aufgabe je nach der Eigenthümlichkeit ihrer besondern Verhältnisse entspricht. Man wird bei der Lösung einer Rechnung ein Spezialverfahren einschlagen, wenn die Eigenschaften der in ihr auftretenden Zahlen Verbindungen zulassen, die beziehungsweise schnell und leicht zum Ziele führen. Das thut aber der erfahrene und verständige Rechner immer, rechne er ohne Ziffern, also bloß im Kopf, oder benutze er solche bei seiner Rechnung. Wer verwehrt ihm denn, einen Gedanken, den er zur Lösung der Rechnung als zweckmäßig und schnell zum Ziele führend erkennt, beim Zifferrechnen eben so gut anzuwenden als beim Kopfrechnen? Gewiß werden die Ziffern der Ausführung nicht hinderlich, sondern eher förderlich sein, da sie gerade äußerlich meist auffallend die Merkmale der Zahleigenschaften verrathen, auf die sich das abkürzende Spezialverfahren stützt. Und warum soll der Grundgedanke eines Spezialverfahrens dem Rechner nur beim Kopfrechnen und nicht eben so gut beim Zifferrechnen kommen können, bieten doch die Ziffern manchen Anhaltspunkt zur Vergleichung hervorstechender als die Zahlen?

Es ist Vorurtheil oder rührt von einem mangelhaften Rechnungsunterricht überhaupt her, wenn man glaubt, das Zifferrechnen müsse sich beständig nach einem allgemeinen Regelwerk bewegen. Eine allgemeine Regel kann wohl — muß aber durchaus nicht auf alle Fälle einer gewissen Rechnungsgattung angewendet werden. Wenn ich z. B. zu rechnen habe:

45 Frkn. × 99 = ?

und 45 Frkn. × 125 = ? und ich setze sofort

45 Frkn. × 99 = (4500 − 45) Fr. = 4455 Fr.

und 45 Frkn. × 125 = 45000 Fr. : 8 = 5625 Fr.;

wer will dann behaupten, dieß sei ausschließlich der Gang vom Kopfrechnen? Kann ich nicht mit wie ohne Herbeiziehung von Ziffern so verfahren, daß in beiden Fällen der Grundgedanke, der mich bei dieser Auflösungsweise führt, wie bei allem verstandesmäßigen Rechnen von Innen und nicht von Außen stammt? Und wenn der Schüler obiges Verfahren beim Zifferrechnen findet und befolgt, wird man ihm dann — wie es wirklich in Schulen schon geschehen ist — sagen: du hast deine Aufgabe zwar richtig, aber nach Art des Kopfrechnens und nicht des Zifferrechnens gelöst!? — Das wäre wohl nach jener bekannten, aber nichts weniger als vernünftigen Theorie gesprochen, nach welcher jede freiere Abweichung vom starren Regelwerk dem Kopfrechnen zugezählt, das Zifferrechnen aber als mechanische Thätigkeit angesehen und behandelt wurde. Im Gegentheil wird der einsichtige Lehrer, sollte er es dem Schüler auch nicht sagen, denken: du hast einen geistreichern Weg betreten, als wenn du die normale, stellenweise Multiplikation ausgeführt hättest, denn du hast die Eigenthümlichkeit der vorliegenden Zahlen richtig erfaßt und zur Rechnung zweckmäßig benutzt; dein Rechnen ist reines, ideegemäßes Rechnen, Zifferrechnen, wenn es mit, Kopfrechnen, wenn es ohne Hülfe von Ziffern ausgeführt wurde.

Es ergibt sich aus allen Rechnungsbeispielen, die auf verschiedene Weise gelöst werden, daß man durchaus nicht behaupten kann, dieses oder jenes Verfahren sei nur dem Kopfrechnen eigen, sondern daß im Gegentheil das Zifferrechnen zu jeder beliebigen Lösungsweise taugt, zur kürzern wie zur weitläufigern, zur leichtern wie zur schwerern, zur natürlichern wie zur künstlichern.

Rechnet man z. B.:

$$432\ \text{Fr.} \times 25 = \tfrac{432}{4}\ \text{Fr.} \,.\, 100 = 10800\ \text{Fr.}$$

$$\text{oder } 432\ \text{Fr.} \times 25 = (432 \,.\, 20 + 432 \,.\, 5)\ \text{Fr.} = 10800\ \text{Fr.}$$

$$\text{oder } 432\ \text{Fr.} \times 25 = (4320 \,.\, 2 + \tfrac{4320}{2})\ \text{Fr.} = 10800\ \text{Fr.}$$

$$\text{oder } 432\ \text{Fr.} \times 25 = (432\ \text{Fr.} \,.\, 5) \,.\, 5 = 10800\ \text{Fr.}$$

u. s. n. w.

so sind das verschiedene Auflösungen, die alle gleich richtig und alle gleich rationell genannt werden können. Was thut nun der einigermaßen erfahrene Kopfrechner, wenn er hier zu wählen hat? Offenbar wird er den kürzesten und leichtesten Weg (etwa den ersten) einschlagen. Was wird aber der geübte Zifferrechner thun? Gewiß ganz das Gleiche. Wo liegt nun die

innere, objektive Verschiedenheit zwischen Kopf- und Zifferrechnen? Es gibt keine. Und wer will noch behaupten, der Kopfrechner wende gewöhnlich ein Spezialverfahren, der Zifferrechner aber ein Generalverfahren an? Gewiß nur wer von der unrichtigen Voraussetzung ausgeht, der Zifferrechner sei in Hinsicht auf Verstand und Klugheit nicht so zurechnungsfähig wie der Kopfrechner.

Nehmen wir zum Schlusse dieser Untersuchung noch irgend ein Beispiel des angewandten Rechnens. Es sei etwa der Jahreszins von 162 Frkn. à 5 % zu berechnen; wie viel beträgt er?

Nun findet A.: 100 Fr. bringen 5 Fr. — Rppn. Zins.
50 = = 2 = 50 = =
10 = = — = 50 = =
2 = = — = 10 = =
also 162 Fr. bringen 8 Fr. 11 Rppn. Zins.

Und B.: 162 Fr. bringen $\frac{5 \cdot 162}{100}$ Fr. $= \frac{81}{10}$ Fr. $= 8$ Fr. 10 Rp.

Und C.: 162 Fr. bringen $162 \cdot 5$ Rppn. $= 8$ Fr. 10 Rppn.
u. s. a. m.

Welcher von diesen dreien ist nun am vernünftigsten zu Werke gegangen? — Gewiß haben alle drei gleich vernünftig gerechnet, aber nicht alle drei gleich klug oder vielmehr nicht mit gleich viel Erfahrung. Der erste, der sein Resultat stückweise nach tabellarischer Art zusammensetzte, ist einen ganz sichern und leichten Weg gegangen, der, obwohl er nicht immer der kürzeste ist, doch sehr häufig, sogar im Geschäftsleben eingeschlagen wird, indem er in allen Fällen fast ohne Mühe wenigstens auf ein approximatives Resultat führt. Der zweite wendet ebenfalls ein mehr generelles Verfahren an, das die Möglichkeit einer zweckmäßigen Abkürzung je nach den Eigenschaften der vorliegenden Zahlen schon in sich schließt. Der dritte handelt am kürzesten, er benutzt klug die besondern Verhältnisse der Aufgabe zu einer sehr geeigneten Speziallösung. — Es ist nach diesen Beispielen klar, daß man jeden Gang, auf den man beim Kopfrechnen Anspruch machen will, auch beim Zifferrechnen beanspruchen kann; also ist unrichtig, daß man nur bei jenem ein Spezial-, bei diesem aber ein Generalverfahren befolge.

Diesterweg spricht sich hierüber wie folgt aus:

„Der wesentliche Unterschied des Kopf- und Zifferrechnens ist aber der: Der Kopfrechner löst die Aufgaben nach der besondern Eigenthümlichkeit

und Beschaffenheit der Zahlen, welche er aufsucht. Er soll mit der Zahl 16 operiren. Er betrachtet sie als bestehend aus 10 und 6 (hier kommt er dem Zifferrechnen nahe), aus 12 und 4, aus 15 und 1, als 20 — 4, als 2 . 8 u. s. w.; oder wenn sie sich z. B. auf Sgr. bezieht, als $^1/_2$ Thlr. + 1 Sgr., als $^8/_{15}$ Thlr., als $^1/_3$ Thlr. + $^1/_5$ Thlr., kurz so, wie es ihm am bequemsten ist. Dieses ist Kopfrechnen; daher die Mannigfaltigkeit der Auflösungen, die Freithätigkeit der Kopfrechner. Der Zifferrechner rechnet aus nach den herkömmlichen Regeln, wie sie jeder vollzieht. Da es denkend geschehen kann, so ist die Reihenfolge der Operationen verschiedener Zifferrechner, welche dieselbe Aufgabe ausrechnen, nicht immer dieselbe; der Eine löst die Aufgabe so, der andere so; aber wenn schriftliche Operationen vorkommen, so werden sie auf dieselbe Weise ausgeführt. Allerdings kann auch hier eine Verschiedenheit eintreten, geübte Kaufleute kennen Abkürzungen und Vortheile, und so läuft das Zifferrechnen in das Kopfrechnen hinein. Der eigentliche, allgemeine, durchgreifende Gegensatz besteht also nur zwischen Denkrechnen und Regelrechnen, womit denn nicht gesagt ist, daß der Denkrechner auf keine Regel kommen könne. Es ist dieses vielmehr ganz natürlich, und er wird sie, wenn ihr Gebrauch ihm eine Erleichterung darbietet, nicht verschmähen."

Wie wir es oben speziell nachgewiesen haben, so beweist gerade auch das Resultat der hier angeführten Betrachtung von Diesterweg, daß die in derselben nach altem Herkommen aufgestellten Unterschiede zwischen Kopf- und Zifferrechnen ꝛc., so wie der Gegensatz zwischen Denk- und Regelrechnen eben unhaltbar sind.

Nun müssen wir uns mit einer nicht bloß sehr häufig auftretenden, sondern auf pädagogischem Gebiete fast allgemein herrschenden Ansicht in Widerspruch setzen. Man sagt nämlich: der Kopfrechner sei der freiere, geistreichere Rechner als der Zifferrechner.

Wir müssen behaupten:

Der Kopfrechner ist nicht freier, er ist im Gegentheil gebundener und zwar an engere und niedrere Schranken als der Zifferrechner. Geistreich können beide gleich sein. Daß der Zifferrechner jeden abgekürzten, jeden vortheilhaften, so wie aber auch jeden verwickelten Gang, den der Kopfrechner betritt, ebenfalls befolgen kann, muß nicht mehr nachgewiesen werden. Wie steht es aber umgekehrt; wird sich der Kopfrechner unterfangen, jede Rechnung zu lösen und jede Rechnungsweise ein-

zuschlagen, die der Zifferrechner ausführt? Wer Lust hat, der kann sich durch jeden ordentlichen Zifferrechner — und bestehe dieser sogar in der Person des Kopfrechners selber — belehren lassen. Es ist ein übel gewähltes Beispiel — obwohl man es sehr oft hört — die Ziffern mit Krücken und das Zifferrechnen mit dem Gehen an Krücken zu vergleichen.

Die Ziffern sind so naturwüchsige Glieder für die geistige Fortbewegung, die man Rechnen nennt, daß der Zifferrechner mit ihnen nicht etwa bloß dem Kopfrechner Schritt hält, sondern ihn weit überfliegt, ja in Regionen hinauf, die derjenige nie ahnen kann, der mit dem Gebrauche der Ziffern nicht gehörig vertraut ist. * Die Ziffern sind also Hülfsmittel, die nicht etwa bloß den geistig Lahmen und Verkrüppelten zu gut kommen, sondern vorzüglich den geistig Gesunden und Starken.

Ohne Ziffern und ein gutes Ziffernsystem hätte die allgemeine Arithmetik nur wenige Sprossen der Leiter erstiegen, auf deren Höhe sie bereits angelangt ist. Es wird aber doch wohl auf Rechnung der größern Freiheit des Zifferrechnens zu setzen sein, wenn dasselbe die Wissenschaft in einem Grade förderte, zu dem sie durch bloßes Kopfrechnen nie gelangt wäre und nie gelangen könnte. Die Ziffern in Verbindung mit den arithmetischen Zeichen überhaupt leisten für das Rechnen mehr als das geschriebene Wort für die Sprache. Einmal drücken sie Zahlen und Zahlbeziehungen aus wie die Worte Begriffe und Begriffsbeziehungen, dann aber ermöglichen sie insbesondere die Ausführung aller höhern zusammengesetzten Zahlverbindungen. In der Sprache kann man alles denken, ohne zu schreiben; in der Arithmetik kann man nicht alles rechnen ohne Ziffern oder Schriftzeichen.

Wir haben bis jetzt dem rationellen Zifferrechnen die Gerechtigkeit widerfahren lassen, die ihm gebührt, ihm aber oft versagt wird; dagegen haben wir nun auch dem Kopfrechnen diejenige Stelle anzuweisen, die es beim Rechnungsunterrichte der Volksschule einzunehmen verdient.

Das Kopfrechnen übt vorzüglich die Zahl-Vorstellungskraft und das Zahlengedächtniß. Durch Uebung läßt sich jede Kraft stärken und steigern, und es liegt allerdings in der Aufgabe der Volksschule, den genannten Kräften die nöthige Pflege angedeihen zu lassen; allein man kann hierin leicht zu

* Das Gleiche gilt von der Einführung der Buchstaben in die Rechnung, obwohl dieser Punkt in Beziehung auf die Volksschule außer Betracht fällt.

weit gehen, so weit, daß der Erfolg der Arbeit weder die Anstrengungen des Lehrers noch des Schülers mehr lohnt.

Schwierige zusammengesetzte oder verwickelte Aufgaben, Aufgaben mit gar vielstelligen, ganzen oder gebrochenen Zahlen sind nicht zweckmäßig zur Ausrechnung im Kopfe, besonders wenn keine bedeutende Abkürzung oder Vereinfachung möglich ist. * Die Schule hat keine Zeit zu derartigen Uebungen, aus denen weder für das praktische Leben, noch für die geistige Ausbildung ein erheblicher Gewinn hervorgehen könnte. Selbst sehr tüchtige Rechner, wenn sie des Resultates bei einer etwas zusammengesetzten Rechnung ganz sicher sein wollen, greifen zum Stift und benutzen die Ziffern.

Man sagt: es wäre natürlicher, wenn man Alles gleich im Kopf berechnen könnte. Zugegeben, aber das Natürlichste ist nicht immer das Leichteste; darum greift man zu Hülfsmitteln, die nicht gerade auf der Hand liegen, also mehr künstlicher Natur sind, durch die man aber den Zweck mit viel leichterer Mühe erreicht. Es wäre z. B. auch natürlicher, eine Last gerade von Hand zu heben, als Hebel, Rollen ꝛc. anzuwenden. Warum thut man das Erstere so häufig nicht? Offenbar weil das zweite, obwohl mit künstlicherem Apparat verbunden, viel leichter geht Wenn nun Jemand sagen wollte: Die Kraftübung ist die Hauptsache; ich übe daher meine Sehnenkraft so lange und systematisch, daß ich der Hebel und Rollen zuletzt entbehren kann; so würde er dem Kopfrechner gleichen, der spricht: Die Uebung des Zahlengedächtnisses ist die Hauptsache; ich übe es also dermaßen, daß ich der Ziffern ꝛc. entbehren kann. Jeder Bauer, jeder Handwerker u. s. w. würde aber jenen mit seinen Kraftübungen auslachen; er würde sagen: Ich

---

* S. E. Baltrusch sagt hierüber in seinem Handbuche zum Kopf- und Zifferrechnen: »Es ist rathsam, in der Berechnung von etwas zusammengesetzten Aufgaben mehr auf den Gedankengang der Auflösung derselben, als auf die Art der Ausführung der vorkommenden Spezies zu sehen, und also den Schülern zu überlassen, diese Spezies nach Belieben im Kopfe oder schriftlich zu machen, wenn sie nur recht klar den Gang der Auflösung einsehen und sich ihn merken. Hierin begehen alle diejenigen Lehrer einen Fehler, welche von ihren Schülern verlangen, daß sie nicht allein die verwickelten Verhältnisse einer schwierigen Aufgabe klar in Gedanken auffassen, sondern auch die einzelnen sich darstellenden Rechnungen im Kopfe ausführen sollen; denn der jugendliche Verstand vermag nicht, gleichzeitig eine Menge Begriffe zu übersehen und ihr Verhältniß zu einander klar aufzufassen. Ist er nun durch die einzelnen Rechnungen im Kopfe ermüdet, so fehlt es ihm an Schärfe, die Verkettungen der Schlüsse in der Auflösung zu verfolgen, und die Auflösung bleibt ihm also dunkel.«

übe auch meine Sehnenkraft, treibe aber die Sache nicht auf die Spitze, weil es nichts nützt, dagegen oft schadet; ja ich übe meine Kraft gerade, indem ich jene Werkzeuge anwende; und dadurch leiste ich weit mehr, ohne meine Selbstständigkeit aufzugeben, denn ich arbeite im Gegentheil bei Benutzung der mechanischen Hülfsmittel viel selbstständiger.

Nun bilden die Ziffern einen Apparat, den sich Jeder noch viel leichter aneignen kann als jenen mechanischen *; und der vernünftige Rechner übt sein Vorstellungs- und Abstraktionsvermögen gerade auch beim Zifferrechnen. Deßwegen wäre es eine Thorheit, die Ziffern so scheel anzusehen und ihren Gebrauch zu verschmähen.

Dabei ist allerdings Eines nicht zu übersehen: Wie die körperliche Kraft zu einer gewissen Mächtigkeit heranwachsen muß, bevor man in etwas größerm Maßstabe und mit Erfolg jene mechanischen Werkzeuge anwenden kann, so muß auch die Abstraktionskraft so vorgeübt sein, daß die Rechnungsoperationen in bescheidenem Maße innerhalb eines gewissen Zahlengebietes (in der Regel dasjenige, das aus der Operationsverbindung sämmtlicher einfacher — einstelliger — Zahlen entsteht) ohne äußere Hülfsmittel mit Gewandtheit und Sicherheit vorgenommen werden können.

Dieß hat das Kopfrechnen zu leisten; es ist das Erste, das immer eine Stufe voraus geübt werden muß, bevor die Reihe an das Zifferrechnen kommen kann. Dieses ist dann nichts anderes als ein Kopfrechnen in kleinern Stücken. Jede Rechnung wird in einzelne Theile zerfällt, deren Resultate ohne äußere Zeichen leicht gefunden werden können; diese Resultate fixirt man durch die Ziffern, um dem Gedächtnisse nicht zu viel aufzuladen und dadurch eher zu verhüten, daß sich Irrthümer und Fehler in die Rechnung einschleichen. So wird aus den einzelnen Zwischenergebnissen allmälig das Schlußergebniß der ganzen Rechnung abgeleitet. In einem Anlauf und einem Gange würde man sich sehr oft nicht durchschlagen können; darum macht man Ruhepunkte und hält die bis dahin gewonnenen Resultate durch Zahlzeichen fest, gerade wie man beim Fahren den steilen Berg hinauf von Zeit zu Zeit Steine unterlegt, um anzuhalten und auszuruhen.

---

* Welche Bedeutung der alte Satz: »daß der Bauer, der Handwerker ꝛc. nicht Tafel und Griffel in der Tasche führe, und daß daher das Kopfrechnen und nicht das Zifferrechnen das zuverlässigere sei« — für uns noch habe, ist nicht zu erörtern.

Es hat aber das Kopfrechnen noch einen besondern pädagogischen Werth. — In Entbehrung aller äußern Unterstützungsmittel, wie man sie in den Ziffern findet, ist der Kopfrechner gezwungen, nachzudenken, auf welche Weise er sich am leichtesten in der Rechnung durcharbeiten könne. Die Noth macht erfinderisch; sie führt auf manchen Gedanken, zu dem man ohne sie gar oft nicht gelangen würde. Wo man es bequem hat — und beim Zifferrechnen ist dieß wirklich der Fall — da gibt man sich gewöhnlich nicht gar viele Mühe, bessere Auskunftsmittel zu finden, so lange man noch mit den alten zum Ziele kommen kann. Allein wo man von all den bequemen Mittelchen verlassen ist, muß man schauen, wie man sich anders zu helfen weiß.

Für trägere oder sonst langsamere Schüler ist das Kopfrechnen besonders am Platze; da sind sie genöthigt, denkend zu suchen, die Sache zwingt sie dazu; wer aber sucht, der findet; auch der Langsamere und Trägere kann mitunter einen guten Wurf thun. Beim Zifferrechnen hätte er sich vielleicht mehr gehen lassen und einen bereits geebneten Weg betreten, also nicht viel Neues profitirt. Den selbst gefundenen neuen Gedankengang wende der Schüler nun auch beim Rechnen mit Ziffern an, um ihn auf jede Weise zu erproben; er wird ihn hier noch um so leichter befolgen können, da diese jede Rechnungsweise zu unterstützen im Stande sind.

Zur stillen Individualbeschäftigung der Schüler eignet sich das Kopfrechnen weniger als das Zifferrechnen. Wenn das erstere seinen Zweck in der Schule erreichen soll, so muß der Lehrer dabei und damit sein, muß die Schüler übersehen, überwachen und zusammenhalten. Es ist ein Leichtes, einzelne Zifferrechnungen unter Aufsicht und Leitung eines Monitors durch eine Schulklasse lösen zu lassen; beim Kopfrechnen aber geht das nicht, da wird der Lehrschüler zu Besten gehalten, der besondere Zweck des Kopfrechnens: vermehrte Uebung des Zahlengedächtnisses und der Abstraktionskraft, besonders auch in der Richtung der Auffindung neuer Rechnungslösungen, geht zu leicht verloren, und gerade diejenigen Schüler, die diese Uebung am nöthigsten hätten, benutzen sie nicht oder treiben die Sachen verkehrt, weil der Lehrschüler zu schwach ist, seine flüchtigern Mitschüler gehörig an den Gegenstand zu fesseln. Ueberdieß ist nur der Lehrer im Stande, die vielseitige Thätigkeit, die sich hier bei einer ganzen Klasse entwickelt, zum rechten Ziele hinzuleiten, und nur er wird das Neue, das hiebei gefunden wird, recht zu verwerthen und daraus die Früchte zu ziehen wissen, die wieder allen Schülern zu gut kommen können. Also, wenn

nicht der Lehrer diese Uebungen leitet, so hat die Schule hierin ihren Lohn dahin.

Da also das Kopfrechnen als Unterricht und Uebung nicht zweckmäßig neben dem lauten Klassenunterricht als Spezialbeschäftigung der Schüler unter sich auftreten kann, so wird auch ein Uebungsbuch für den Schüler (siehe unten § 18) keinen besonders ausgeschiedenen Stoff fürs Kopfrechnen enthalten müssen. Diesen muß der Lehrer in der Hand haben, und wir werden zu dem Behufe eine Auswahl von dießfälligen Uebungen auf jeder Stufe geben. Es werden dieß vorzugsweise elementarische Uebungen sein müssen, die meist einer neuen Stufe im Zifferrechnen vorangehen können. Dieselben muß der Lehrer ganz in seiner Macht haben; er muß sie so einrichten, daß sie genau dem individuellen Stande seiner Schüler entsprechen; er muß damit vorbereiten, überleiten, ergänzen, befestigen; kurz es muß der Uebungsstoff fürs Kopfrechnen ein sehr beweglicher, elastischer sein, der durch den Lehrer eigens zu formen und geistig zu beleben ist.

Der methodische Gang des Kopfrechnens wird im Kurzen der folgende sein:

Die Zahlbildung und Auffassung der Zahleigenschaften (Zahlauffassung) geschieht zunächst ohne Mithülfe der Ziffer, ist also in erster Linie ausschließliches Kopfrechnen. Wird die Ziffer eingeführt, so ist vor jeder Weiterführung, vor jedem Uebergang zu einer neuen Stufe dieselbe auf dem Wege wirklicher Anschauung, also ohne Herbeiziehung der Ziffer, zuerst zu entwickeln und zu üben; worauf dann durch Benutzung der Ziffer die gehörige Abrundung, Kürze, Bestimmtheit, Fertigkeit und Festigkeit noch insbesondere erzielt werden soll. Dieß ist im Allgemeinen der Gang beim reinen Kopfrechnen. Beim angewandten wird zunächst und vorzüglich Gewicht auf die Auffindung der Operationen gelegt, durch welche eine angewandte Rechnungsaufgabe gelöst werden kann. Dann Uebung im fertigen Auflösen und Ausrechnen solcher Beispiele, die sich nicht in zu hohe Zahlen und zu schwierige Zahlverbindungen verlieren. Hierauf Zifferrechnen und Verbindung desselben mit dem Kopfrechnen in der Weise, daß nur die wichtigern Zwischenresultate notirt, die dazu nöthigen Operationen aber im Kopfe, d. h. ohne Aufschreibung durch Ziffern, gelöst werden.

Das Einzelne siehe unten bei der Behandlung des Unterrichts auf den verschiedenen Schulstufen.

§ 14.

Ueber Sprachliches.

a. Die arithmetische Zeichensprache.

Leibnitz sagt: „Jedes menschliche Denken wird erst in gewissen Zeichen oder Charakteren vollendet.“ Wie wahr dieser Satz ist, zeigt sich besonders im mathematischen Gebiete. Schon in ganz gewöhnlichen Dingen ist es uns ein Beweis, daß Jemand um so klarer und bestimmter denke, je klarer und bestimmter er sich in Worten auszudrücken versteht; und umgekehrt zeugen uns unklare, verworrene Worte von unklarem, verworrenem Denken.

In der Mathematik erlangen die Ergebnisse des Denkens schon durch die Formulirung in Worten einen festern Boden; allein durch die Darstellung in mathematischen Zeichen erhalten sie erst ihre rechte Bestimmtheit und Vollendung. Die Kürze, die Abrundung, die Unzweideutigkeit der symbolischen Darstellungsweise ermöglicht hauptsächlich den raschen Fortschritt und die hohe Ausbildung des mathematischen Denkens. Mit welcher Langsamkeit würde man sich z. B. beim Rechnen fortbewegen, wenn man alle Operationsverbindungen in Worten ausdrücken und sämmtliche Einheiten, die wir durch Ziffern kurz bezeichnen, beständig aus einander halten oder etwa durch eben so viele Striche darstellen wollte. Und in welchem Umfange könnten wir bei dieser Bezeichnungsweise rechnen, was für Rechnungen vermöchten wir überhaupt auszuführen? —

Man hat darum schon für das gemeine Rechnen Zahl-, Zähl- (Operations-) und Vergleichungszeichen, durch deren Anwendung wir die Rechnungsresultate auf weit kürzerem und sichererm Wege erhalten als durch alle Rechenpfennige.

Vor Allem aus ist unser Ziffernsystem ein so zweckmäßiges und vollendetes, daß es nicht bloß die Zahlgröße und Zahlform im schönsten Einklange zusammen darstellt, sondern auch die Operation auf die vortheilhafteste Weise unterstützt. Das Bestreben, die Schüler das Zahl- und Ziffernsystem möglichst vollkommen erfassen zu lassen, ist daher ein sehr begründetes.

Ueber den Vortheil unsers Ziffernsystems drückt sich Dr. A. Mayer in seinen Untersuchungen über die Methode also aus: „Wie viel ein gutes Ziffernsystem zum Wachsthum einer Wissenschaft beitragen kann, ist leicht aus den unvollkommenen Ziffernsystemen der Griechen und Römer einzusehen. Rechnungen, die heutzutage selbst von minder Geübten aufs Leichteste ausgeführt werden, waren den größten Mathematikern des Alterthums

ganz unmöglich, weil sie nicht durch ein gutes und brauchbares Ziffernsystem unterstützt waren."

Nicht minder wichtig als die Ziffern sind die Geschäftszeichen (Operationszeichen) in Verbindung mit der Stellung der Operationsglieder. Wie man mit wenigen Ziffern systematisch die Zahlen ausdrücken kann, so ist man durch die einzelnen Operationszeichen in Verbindung mit den Ziffern im Stande, jede Zahl und Zahlform darzustellen. Daß die Schüler die Bedeutung der Operationszeichen und Operationsglieder ganz bestimmt auffassen, ist ein unerläßliches Erforderniß; es darf in diese durchaus nichts Vages und Willkürliches gelegt werden, sonst wird der Schüler an Unklarheit und Ungenauigkeit, wo nicht gar an Gedankenlosigkeit gewöhnt. Hierin wird aber noch viel zu häufig gefehlt, sowohl in Schulbüchern als beim wirklichen Schulunterricht. Wir finden sogar in Schullehrmitteln, von denen man es nicht erwarten sollte, viele derartige Verstöße.

Wir wollen die auffallendsten derselben so wie diejenigen, die in manchen Schulen noch häufig beim Unterrichte vorkommen, besonders anführen:

α. mit Beziehung auf Addition und Subtraktion und die hierauf bezüglichen Zeichen + und —. Sehr oft findet man Ausdrücke durch das erstere dieser Zeichen verbunden, bei denen vernünftigerweise von Addition nicht die Rede sein kann, wie z. B. die +Verbindung einer benannten Zahl mit einer unbenannten oder mit einer benannten von ganz verschiedener Art. Besonders häufig trifft man die fehlerhafte und unsinnige +Verbindung des Quotienten mit dem Rest z. B.

17 Frkn. : 5 = 3 Frkn. + 2 Frkn. Rest,
20 Fuß : 3 Fuß = 6 + 2 Fuß Rest.
(Siehe manche Schullehrmittel.)

Weniger häufig wird im richtigen Gebrauche des —Zeichens gefehlt; doch ist es auch da verwerflich, die Schüler z. B. schreiben zu lassen 125 — 113 Frkn. statt (125 — 113) Frkn. oder 125 Frkn. — 113 Frkn.; auch sollten die Abkürzungen 1—2, 5—7 ꝛc. im Sinne von 1 bis 2, 5 bis 7 ꝛc. beim Rechnungsunterrichte durchaus vermieden werden.

In einigen Schulen haben wir schon statt der Redeweise „3 von 9 (weggezählt) gleich 6" sprechen gehört: „3 weniger 9 ist 6". Wie sehr diese Verwechslung zu tadeln ist, wollen wir nicht weiter hervorheben.

β. Bei der Multiplikation und Division trifft man oft Schreibweisen, die in mehr als einer Beziehung fehlerhaft und verderblich sind.

Noch mehr als in einer Schule kann man die Redeweisen hören: „Fuße mit Fußen multipliziren", „Thaler durch Ellen dividiren", „Geldsummen Pfunde mal nehmen" ꝛc. * Man muß sich hierüber nicht verwundern, denn so handgreiflich der Unsinn auch ist, so wird er doch so lange noch vorkommen, als die gleiche unsinnige Schreibweise nicht abgelegt wird. Man scheut sich aber nicht, den Schülern z. B. bei den Regeldetriaufgaben immer noch Ansätze vorzulegen, wie der folgende ist:

3 Pfund : 14 Frkn. × 7 Pfund.

Es ist darum durchaus nicht auffallend, wenn der Schüler, der den Operationszeichen eine feste Bedeutung unterlegen will, auch liest und spricht: ich muß hier 14 Frkn. durch 3 Pfunde dividiren, und was herauskommt, 7 Pfunde mal nehmen. Wenn sich der Schüler so an Ungereimtheiten und Widersprüche gewöhnt und dabei das richtige Denken verlernt statt erlernt, so ist es nicht seine Schuld, es ist die Schuld der Schule, die ihm solche Verkehrtheiten vorführt. Statt obigen fehlerhaften Ansatzes ist zudem ja nicht schwer, einen richtigen zu setzen, aus dem der Schüler ohne Mühe die genannte Zahl herausfindet, die denjenigen Operationen zu unterwerfen ist, welche der Aufgabe entsprechen.

Nicht gleichgültig ist bei der Multiplikation sowohl als vorzüglich bei der Division die Stellung der zur Operation gegebenen Zahlen, d. h. der Operationsglieder. Obschon bei der Multiplikation die Faktoren, wenn beide unbenannt sind, verwechselt werden können, so ist doch rathsam, daß der Schüler sie in der Rechnung von einander unterscheide. Wir werden zu diesem Behufe den Multiplikator immer rechts vom Multiplikand setzen, weil diese Stellung die gebräuchlichere ist. Der sprachliche Ausdruck unterscheidet hier nicht

---

* Es erinnert uns dieses jedesmal an jenen Lehrer, der in einer Rechnungsaufgabe mit seinen Schülern »Wochen mit Ochsen« multiplizirte und dann für das Resultat die plausible Interpretation fand, es stelle gleichsam »Wochenochsen« dar. Der Wahrheit eben so nahe stand ein Anderer, der sich zum Nachweis der Behauptung, daß die Faktoren eines Produktes beide wohl auch benannt sein könnten, auf das Beispiel stützte: »24 Stecken, von denen jeder 2 Ellen lang, machen doch 48 Ellstecken.«

scharf; desto nothwendiger ist es daher, daß die schriftliche Bezeichnung völlig bestimmt sei und daß der Schüler durch diese genau ausdrücke, wie er die Multiplikation ausführen, d. h. aus welcher Zahl er das Produkt bilden wolle; das zwingt ihn zum bestimmten und konsequenten Denken. Beim mündlichen Ausdruck wird hierin meist nicht genau unterschieden; man spricht z. B. 5 mal 3 oft in dem Sinne, daß 5 dreimal zu nehmen sei, oft aber auch, ja vielleicht noch häufiger, bezeichnet 5 mal 3, es sei 3 fünfmal zu nehmen. Die Ausdrücke 3 Franken, 4 Hunderter, 5 x ꝛc. . . weisen fast darauf hin, daß die Sprache lieber den unbenannten Multiplikator links vorsetzt und es wäre aus dieser Rücksicht der Uebereinstimmung vielleicht besser und konsequenter gewesen, wenn es arithmetischer Gebrauch geworden wäre, da wo eine Multiplikation auszuführen ist, auch den Multiplikator links vor den Multiplikand zu setzen. Indessen ist es minder wichtig, welcher der beiden Faktoren zuerst, d. h. links vor dem andern stehe, als daß immer die gleiche Stellung inne gehalten werde, und daß der Lehrer von den Schülern immer das Nämliche verlange.

Weit wichtiger noch ist die rechte Stellung der Operationsglieder bei der Division; da trägt die Verwechslung die schlimmsten Früchte. Eine konsequente Schreibweise ist hier durchaus unerläßlich, wenn nicht die schädlichste Konfusion eintreten soll. Wir haben schon viele Schüler, welche nach ihren geistigen Anlagen keineswegs zu den schwachen zählten, bei ihren dießfälligen Rechnungen in solcher Ungewißheit gesehen, daß sie zu bemitleiden waren. Was sie selbst geschrieben hatten, z. B. 4 : 8, wußten sie nicht auszulegen; ob dieß zwei Ganze oder ein Halbes bedeute, konnten sie nicht sicher angeben: solche Schüler sind für den ganzen weitern Rechnungsunterricht beinahe verdorben, und nur die scheinbar unwichtige Inkonsequenz und Ungenauigkeit in der Schreibweise, oder die Gewohnheit, den Divisor bald vor, bald nach dem Dividend zu schreiben, hat sie allmälig zu dieser Unsicherheit und Gedankenlosigkeit gebracht.

Die Schreibweise, nach welcher der Dividendus vor (links vor) dem Divisor steht, ist die neuere, die umgekehrte die ältere. In mancher Schule, in welcher der Lehrer sich nicht fest für die eine oder andere entschieden, machen sich nun beide neben einander

geltend und da gibt es in der That kaum etwas Verderblicheres; auch in einzelnen Sukzessivklassen, wo die Lehrer nicht übereinstimmend genug verfahren, tritt der gerügte Uebelstand nicht selten hervor.

Wir besprechen daher diesen Punkt, der manchem weniger erfahrenen Lehrer als ziemlich untergeordnet vorkommen dürfte, absichtlich etwas ausführlicher. Die neuere Schreibweise, den Dividend vor dem Divisor zu setzen, hat alle innern Gründe für sich, und wer beim Unterricht auf diese sieht, muß sich auch für dieselbe entscheiden. Maßgebend ist hier nämlich die innere Verwandtschaft und Uebereinstimmung mit dem Vorausgehenden und Nachfolgenden. Der Division entspricht aber in vorausgehender Stufe die Subtraktion und bei dieser schreibt man für den Minuend, d. i. die Summe, vor dem Subtrahend. Nun ist der Dividend gemäß der Ableitung der Operationen ebenfalls ein Minuend (nämlich eine spezielle Summe aus lauter gleichen Summanden) und von ihm wird entweder der Divisor so oft abgezogen, als es angeht, oder es wird eine Zahl gesucht, die sich vom Dividend so oft wegzählen läßt, als der Divisor anzeigt; in jedem Falle gleicht also der Dividend einem Minuend. Den Minuend schreibt man aber zuerst, folglich verlangt auch die angedeutete Uebereinstimmung, daß man den Dividend zuerst setze. Das ist die Verwandtschaft mit dem Vorausgegangenen. Diejenige mit dem Nachfolgenden liegt noch mehr auf der Hand; und hier führt der Bruch, als eine angedeutete Division, die entscheidende Stimme. Was schreibt und spricht man beim Bruch zuerst, doch wohl den Zähler, d. i. den Dividend? — Also verlangt auch die Analogie mit dem Bruch die Befolgung der neuern Schreibweise; man hat zu setzen $^3/_4 = 3 : 4$ und nicht umgekehrt $= 4 : 3$.

Das Einzige, das sich zu Gunsten der alten Schreibweise $^3/_4 = 4 : 3$ anführen läßt, ist etwa das, daß man beim Theilen sagt: der 4te Theil von 3 ist $= {}^3/_4$ und beim Messen: 4 ist in 3 $^3/_4$ enthalten; allein man kann ja eben so gut und in Uebereinstimmung mit der neuern bessern Schreibweise sprechen: 3 getheilt durch 4 ist gleich $^3/_4$ und in 3 ist 4 $^3/_4$ mal enthalten u. s. w. Gewiß thut der Lehrer wohl daran, wenn er, besonders beim Elementarunterricht, den sprachlichen Ausdruck in genaue Uebereinstimmung bringt mit der arithmetischen Bezeichnungsweise.

γ. Diejenigen arithmetischen Vergleichungszeichen, die für den Rechnungsunterricht der Volksschule von Bedeutung sind, sind erstens und vorzüglich das Gleichheitszeichen = und dann (aber schon weit untergeordneter) die Ungleichheitszeichen $>$ und $<$. Die letztern können fast nicht unrichtig angewendet werden; dagegen wird mit dem Zeichen der Gleichheit sehr häufig noch ein arger Mißbrauch getrieben. Man sollte es nicht glauben; allein nicht nur in vielen Schulen, sondern sogar in neuern Schulbüchern werden immer noch eine Menge von Ausdrücken durch das = Zeichen verbunden, d. h. einander gleich gesetzt, die entweder von ungleichem Zahlenwerthe, oder von ganz ungleicher Art, oder gar beides zugleich sind. Wir wollen einige solche abschreckende Beispiele hieher setzen; lassen aber absichtlich die Namen der Rechnungsbücher, aus denen dieselben entlehnt sind, weg, um Niemanden zu beleidigen.

1. Es sind von 1000 nach und nach 20; 40; 60 u. s. f. wegzuzählen. Da wird in mancher Schule geschrieben:
   $1000 - 20 = 980 - 40 = 940 - 60 = 880 - \ldots$ u. s. f.
2. Oder als Reihenfolge von Additionen und Subtraktionen zugleich:
   $1000 + 20 - 40 + 60 - 80 + 100 -$ u. s. f. $\ldots =$
   $= 1000 + 20 = 1020 - 40 = 980 + 60 = 1040 - 80$
   $= 960 + 100$ u. s. f.
3. Ferner, um $7\frac{3}{4}$ in einem Bruche auszudrücken, findet man:
   $7 = \frac{4}{4} \cdot 7 = \frac{28}{4} + \frac{3}{4} = \frac{31}{4}$
4. Oder, um von 12 zu subtrahiren den Bruch $\frac{31}{4}$, setzt Jemand:
   $12 = \frac{4}{4} \cdot 12 = \frac{48}{4} - \frac{31}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$
5. Bei Auslassung der Größenbenennung wird das Gleichheitszeichen in folgender Art oft falsch gebraucht:
   a. $5\frac{4}{7}$ Centner = ? Pfund?
   Es ist $\frac{1}{7}$ Centner $= 100 : 7 = 14\frac{2}{7}$ Pfund;
   also $\frac{4}{7}$ Centner $= 14\frac{2}{7} \cdot 4 = 57\frac{1}{7}$ Pfund;
   also $5\frac{4}{7}$ Centner $= 5 \cdot 100 = 500 + 57\frac{1}{7}$ Pfund;
   $= 557\frac{1}{7}$ Pfund.
   b. $2\frac{1}{6}$ Fuß $+ 19\frac{5}{6}$ Fuß $=$?
   Es ist $2 + 19 = 21 + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 22$ Fuß.
6. Einen merkwürdigen unrichtigen Gebrauch des Gleichheitszeichens bei der Ausführung der Division finden wir in einem erst neulich erschienenen Schulbuche. Da wird sogar geschrieben:

$8 : 2 = 4$ und daneben $8 : 3 = 2 \cdot 3 + 2$ Rest.

Ferner $9 : 2 = 4 \cdot 2 + 1$ Rest.

u. s. f. bei den vorkommenden Divisionen.

7. Beim Gebrauche der Ungleichheitszeichen $>$ und $<$ wird im Allgemeinen seltener gefehlt, weil dieselben weniger in Anwendung kommen. Doch trifft man auch hierin bisweilen Fehler; in einem neuern Buche über Zahldenkübung sogar sehr viele. Das Gleichheitszeichen ist hiebei ebenfalls falsch mitangewendet. Um z. B. auszudrücken, daß 80 um 30 größer ist als 50, wird geschrieben:

$$80 > 30 = 50$$
$$\text{und in ähnlicher Weise } 44 < 30 = 74. \quad (1)$$

Daß hier das Zeichen $=$ nicht, wie es beim richtigen Gebrauche immer soll, das Prädikat „ist gleich", oder „sind gleich", bezeichnet, zeigt das einfache Lesen; offenbar sollte statt obiger falschen Bezeichnungsweise stehen:

$$80 - 30 = 50$$
$$\text{und } 44 + 30 = 74, \quad (2)$$

denn in der ganzen Mathematik werden die Zeichen $>$ und $<$ nie als Operationszeichen in dem Sinne angewendet, daß zwei Zahlenausdrücke mit einander durch eines dieser Zeichen verbunden einen neuen Ausdruck erzeugen, sondern $>$ und $<$ sind einfache Vergleichungszeichen, die anzeigen, daß eine Größe schlechthin entweder größer oder kleiner als die andere ist. Das Wieviel des Unterschiedes zu ermitteln, ist Sache der Operation, und soll dieses aufgefunden, muß die Addition (oder Subtraktion) angewendet werden. Man kann also wohl die Ansätze bei (2), nicht aber diejenigen bei (1) als zulässige betrachten, wofern nicht in die so scharf bestimmte Zeichensprache der Arithmetik Unbestimmtheit und Verwirrung gebracht werden soll.

Daß eine scharf bestimmte und konsequente Schreibweise beim arithmetischen Schulunterrichte unerläßlich ist, ist nicht nöthig weiter zu begründen; die Erfahrung bestätigt nur zu häufig und in zu großem Maßstabe, welch verderblichen Einfluß Schreibweisen, wie die oben mitgetheilten, in der Schule ausüben. Wenn nun auch offenbar in den meisten derselben — so absurd sie auf den ersten Blick erscheinen — doch eine rechte Meinung versteckt liegt, so wirken sie dennoch bei all den Widersprüchen und Inkonsequenzen, die sie enthalten, so schädlich auf die Schüler ein, daß viele das

Nachdenken verlernen, den scharfen, prüfenden Blick verlieren und am Ende dazu kommen, die unsinnigsten Ungleichheiten als Gleichheiten zu behandeln, wobei zuletzt thatsächlicher Irrthum, thatsächliche Unwahrheit herauskommt. Die Bedeutung der arithmetischen Symbole darf also dem Schüler nie zweifelhaft sein, er muß sie eben so sicher verstehen als gebrauchen lernen; dann leisten sie ihm, was keine Worte vermögen: sie führen ihn kurz, leicht und sicher ans Ziel seiner Rechnungen.

In Beziehung auf den arithmetischen Ansatz beim angewandten Rechnen, den man ebenfalls oft undeutlich und verworren und im Widerspruche mit der reinen arithmetischen Sprache antrifft, werden wir bei der speziellen Behandlung des Rechnungsunterrichts auf den einzelnen Schulstufen je das Nothwendige und geeignet Scheinende mittheilen.

b. Arithmetische Redensarten.

Nüchtern und trocken, wie die Arithmetik ist, sollte man nicht meinen, daß ihre Sprache so viele uneigentliche Ausdrücke und Redensarten enthält, wie dieß wirklich der Fall ist. Es sind dieselben für den Unterricht durchaus von keinem Nachtheil, im Gegentheil tragen sie nur dazu bei, daß dem Schüler die Wahrheiten um so lebendiger vor die Seele treten und fester in ihm haften. Es handelt sich hier um die Wortsprache; für den trockenen und strengen Ausdruck durch Zeichen ist, wie oben besprochen wurde, schon gesorgt. Der Rechnungsunterricht kann der figürlichen Ausdrucksweise nicht entbehren; er würde sonst in eine Breite und Subtilität ausarten, die dem Zwecke des Unterrichts sehr hinderlich wäre, während jene dem Gegenstande gerade die nöthige Frische und Beweglichkeit verleiht. Eine superkluge Schulweisheit nimmt zwar Anstand an der genannten Ausdrucksweise; allein der Tadel läuft auf bloße Sylbenstecherei hinaus und die Verbesserungsvorschläge würden meistens nur Verschlimmbesserungen herbeiführen.

Es ist z. B. ein uneigentlicher Ausdruck, wenn man sagt, die Zahl 5 fl. gebe 3 mal genommen oder zu sich gezählt 15 fl; allein die Bedeutung ist für Jung und Alt klar und man hat durchaus nicht zu fürchten, daß Jemand hiebei auf den falschen Gedanken komme: wenn er 5 fl. besitze, so dürfe er sie nur 3 mal hinter einander zählen, um dann 15 fl. zu haben; ein Jeder weiß zu gut, daß, wenn er einmal seine 5 fl. gezählt hat, er beim nochmaligen Zählen eben wieder Gulden um Gulden wegnimmt. Wollte man obigen Ausdruck vermeiden, um ja nichts Un-

eigentliches zu sagen, so würde man wohl weitläufiger werden, aber nichts dadurch gewinnen.

Etwas Uneigentliches liegt in den meisten arithmetischen Redeformen. Die Ausdrücke „Hinzuthun" und „Wegnehmen", deren man sich schon bei den ersten Zählverrichtungen bedient, haben bildliche Bedeutung, denn sie sind von außen entlehnt; dem Kinde werden dieselben in ihrem arithmetischen Sinne mit der Erfassung des Zählens zugleich klar und geläufig.

Aehnlich verhält es sich mit folgender Version: „Von zwei gegebenen Zahlen, z. B. 8 Fuß und 5 Fuß, soll die letztere von der erstern abgezogen werden". Die Sache würde sich sonderbar machen, wenn man 8 Fuße auf der einen und 5 Fuße auf der andern Seite wirklich vorlegen und alsdann verlangen wollte, es sollen die letztern von den erstern weggenommen werden. Die wirkliche Bedeutung kann hier dem Schüler, mit welchem das Zählen vernunftgemäß betrieben wird, durchaus nicht entgehen.

Sogar die Ausdrücke „Mehrfaches" oder „Vielfaches" einer Zahl haben bei Einigen schon Anstoß gefunden und man hat hierüber vergleichungsweise angeführt: „Das Kind begreife nicht, wie man z. B. ein Glas Bier zweimal trinken könne". Solche Einwände können offenbar nur von einem Standpunkte aus gemacht werden, wo man Abstraktes und Konkretes noch mit einander verwechselt, wo man die Zahl mit den Dingen identifizirt, von denen sie abstrahirt werden soll. (Eine Gesammtheit von gleichen Dingen ist noch lange nicht eine Zahl, die Zahl beginnt erst für den zu existiren, der sie in sich durch das Zählen jener Dinge bildet: keine Zahl konnte da sein, bevor man zählte.) Die Redensarten „eine Zahl eine andere mal nehmen" oder „das Mehrfache einer Zahl bilden" können also wohl umschrieben, kaum aber durch eben so kurze als passende ersetzt werden. Die Umschreibung „zu einer Zahl eine gleich große zählen, zu dem, was herauskommt, wieder eine so große zählen u. s. f." wird nie in die arithmetische Terminologie statt des kurzen Ausdruckes „Vielfaches einer Zahl" aufgenommen werden, wohl aber soll der Schüler natürlich diese Bedeutung der genannten Redeweise kennen.

Es verhält sich hiemit ähnlich wie mit manchen Redensarten in der Geometrie. Der Satz: der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich der Länge mal der Breite mal der Höhe" kann z. B. folgendermaßen umschrieben werden: „Der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich einem gewissen Kubus multiplizirt mit

dem Produkt dreier Zahlen, von denen die erste angibt, wie oft eine Kante des Kubus in der Länge, die zweite, wie oft diese Kante in der Breite und die dritte, wie oft dieselbe Kante in der Höhe des Parallelepipeds enthalten ist". Wollte man nun für den genannten Satz und für alle ähnlichen beim Unterrichte stets die entsprechende Umschreibung (wie die angeführte) gebrauchen, so würde man dadurch in eine Lehrmanier verfallen, die eben so schwerfällig und lästig, als weitschweifig wäre. Daß dagegen der Schüler die wahre Bedeutung solcher Redensarten kenne, ist unerläßlich, ebenso, daß er sich einer jeden erst dann bediene, wenn er bereits dasjenige in der That versteht, was sie bezeichnet.

Verschieden von der gewöhnlichen sprachlichen Bedeutung ist ebenfalls diejenige der folgenden bei der Division gebräuchlichen Ausdrücke: „Zweiter, dritter, vierter, fünfter Theil u. s. f." — Es geht gar nicht so schnell, bis der junge Schüler die richtige arithmetische Bedeutung dieser Ausdrücke erfaßt hat; es müssen daher manche Uebungen im wirklichen Theilen vorangehen.

Endlich sind vorzüglich noch folgende eigenthümliche arithmetische Ausdrücke ins Auge zu fassen: „Wie viel mehr, oder um wie viel mehr oder weniger" und „Wie viel mal so viel und wie viel mal mehr oder weniger". Man fragt: Wie viele Einheiten enthält eine Zahl mehr oder weniger als eine andere, oder um wie viel ist eine Zahl größer oder kleiner als eine andere? Dieß beantwortet die Addition oder die Subtraktion; wie man will. Die Schüler verwechseln hier sehr gerne und setzen statt „wie viel mehr" und „wie viel mal mehr" falsch „um wie viel mal mehr". Diese Vermengung des arithmetischen und geometrischen Verhältnisses zweier Zahlen findet um so häufiger statt, als es von Seite des Schülers einen ziemlich hohen Grad der Einsicht in die Bedeutung der Subtraktion und Division bedarf, um diese Verhältnisse klar von einander zu unterscheiden.

Es ist hier schon darauf hingewiesen, daß die Ausdrücke „wie viel mal so viel und wie viel mal mehr" auf die Division (das geometrische Verhältniß) fußen; es besteht aber zwischen beiden, obwohl sie in vielen Fällen ganz gleich gebraucht werden, dennoch ein Unterschied. Der Ausdruck „ein Gewisses mal so viel" ist allgemeiner als der „ein Gewisses mal mehr"; den erstern kann man in allen Fällen dieses Verhältnisses gebrauchen, den letztern nur dann, wenn es schon ausgemacht ist, daß eine Zahl wirklich mehr beträgt, als eine zweite. So kann man ganz wohl

sagen „6 ist 3 mal so viel als 2, oder 6 ist 3 mal mehr als 2", nicht aber „4 ist $^2/_3$ mal mehr als 6", dagegen wohl „4 ist $^2/_3$ mal so viel als 6". Aehnlich wie mit „ein Gewisses mal mehr" verhält es sich mit der Bezeichnung „ein Gewisses mal weniger".

Die Redensart „einmal mehr" oder „einmal weniger" im Sinne vom Zweifachen oder von der Hälfte einer Zahl sollte der Lehrer, um jedem Widerspruch und jeder Verwirrung vorzubeugen, beim Unterrichte nie dulden *.

§ 15.

Ueber Rechnungsproben oder Verifikationen.

Die „Proben" spielten früher (in der alten Schule) eine sehr große Rolle und zwar mit Recht; denn dazumal waren sie das Einzige, das bei dem fast ganz äußerlichen und mechanischen Rechnungsverfahren, wenn nicht gerade Licht, doch etwelche Sicherheit in die Handlung brachte. Man bedurfte ihrer um so mehr, je weniger man eigentlich wußte, *was* und *wie* man rechnete und mit welchem Rechte man so oder so verfuhr. Der neuere rationellere Unterricht bedurfte derselben weniger, weil eine Probe und Garantie für die Richtigkeit der Ergebnisse hauptsächlich schon im *bewußten Operiren* lag, bei dem man sich Schritt für Schritt von der Richtigkeit der sich ergebenden Resultate überzeugen konnte.

Nun läßt sich aber nicht läugnen, daß eine sichere und zweckmäßige Probe selbst dem geübtern Rechner meist willkommen ist; denn *mathematisch gewiß* ist nur der *Geist der Mathematik*, fehlerhaft können aber unsere Rechnungsergebnisse dennoch oft ausfallen, weil wir sowohl in der sinnlichen Wahrnehmung und Auffassung, als im Gedächtniß und Vorstellungsvermögen bei der Anwendung mathematischer Operationen *irren* können. Die Prüfung eines gefundenen Resultates ist daher meistens sehr am Platze, oft sogar unerläßlich.

---

* Wir möchten nicht rathen, den Ausdruck „n mal mehr" im Sinne vom (n + 1) fachen einer Zahl zu gebrauchen. Wenn z. B. eine Linie 8', eine zweite 2' beträgt; so würden wir wohl sagen lassen: die erstere ist 4 mal größer oder 4 mal so groß als die zweite, nicht aber: sie ist 3 mal größer als die zweite, weil die letztere Ausdrucksweise neben den erstern, die einmal entschieden angenommen sind, nur Verwirrung hervorbringt. Siehe das Rechenbuch von J. Schmid nach Pestalozzischen Grundsätzen.

Hat aber die neuere Schule die Verifikation der Rechnungsresultate nicht zu sehr vernachlässigt? Diese Frage darf wohl mit Recht gestellt werden. Bevor wir dieselbe beantworten, wollen wir uns noch etwas näher über die Sache selbst aussprechen.

Es gibt zweierlei Rechnungsproben: Mit der einen kann man sowohl den Gedankengang der Rechnung (in Hinsicht auf die gemachten Schlüsse) als auch die Ausführung der Rechnungsoperationen prüfen; die andere ist eine bloße Operationsprobe, durch welche man untersucht, ob das Rechnungsgeschäft als solches richtig vollzogen worden sei, nicht aber, ob die angewandten Operationen wirklich das wahre, der Aufgabe entsprechende Resultat herbeiführen müssen oder nicht. Die erstere verdient am meisten Beachtung; sie ist eine vollständige Rechnungsverifikation, denn durch sie erfahren wir, ob wir überhaupt bei der Rechnung, sei es im Gedankengang oder in der äußern Verrichtung, gefehlt haben oder nicht. In dieser Beziehung gilt sie so viel als ein Beweis, d. h. sie ist ein Nachweis. Die zweite ist minder wichtig, denn sie ist gewöhnlich eine bloße Umkehrung des in erster Linie eingeschlagenen Rechnungsverfahrens, und sie ist daher in den meisten Fällen mit Behutsamkeit anzuwenden, da sie nicht einen vollständigen Beweis davon liefert, daß das Ergebniß wirklich in jeder Beziehung richtig sei. Die alte Schule benutzte gewöhnlich diese zweite Art von Probe.

Da die neuere Schule all ihr Rechnen auf das bewußte Operiren, d. h. auf das Denken, stützte, so glaubte man nicht selten der Proben entbehren zu können. Es ist dieß aber ein offenbarer Mangel beim Rechnungsunterricht, und in dieser Beziehung muß die oben gestellte Frage zu Ungunsten der neuern Schule beantwortet werden. Schüler, von denen wir gerne zugeben, daß sie mit Verstand und Nachdenken rechnen (wie sie dazu auch von Seite der Schule angeleitet werden), machen dennoch häufig Fehlschlüsse und Operationsfehler, die sie selbst leicht auffinden könnten, die sie aber nicht auffinden, weil sie das einmal erhaltene Resultat ruhig liegen lassen, bis der Lehrer darnach frägt und mit dem Rechnungsschlüssel in der Hand das falsche Resultat rügt; sie denken nicht daran, zu untersuchen, zu prüfen, was sie gefunden. Das ist ein großer Fehler, dem die Schule vorbeugen muß. Sie muß den Schüler gewöhnen, auf den einmal gefundenen Rechnungsergebnissen nicht auszuruhen; sie muß ihm die Mittel an die Hand geben, jene Ergebnisse zu kontroliren, und der Schüler muß in diese durchaus Mißtrauen setzen, bis sie die rechte

Probe bestanden haben. Das gibt ihm dann erst die wahre Selbstständigkeit, wenn er die Hülfsmittel besitzt und anwendet, durch welche er dessen, was er rechnet, vollständig sicher werden kann.

Es ist gewissermaßen nur etwas Halbes, eine Rechnung zu lösen, auch wenn es mit Verstand und Einsicht geschieht; das andere Halbe, das erst mit jenem das rechte Ganze ausmacht, ist die Verifikation der Rechnung. Wir haben häufig bemerkt, daß die meisten Schüler nur bei jenem halben Rechnen stehen bleiben und daß zu wenig gethan wird, um sie aus dieser Halbheit herauszuziehen. Die Schüler ihre einmal gelösten Beispiele nochmals auf dem gleichen Wege rechnen zu lassen oder sie ihnen nachzurechnen, ist nicht genug; noch weniger taugt es, ihnen die richtigen Resultate aus dem Schlüssel mitzutheilen. Was durchaus unerläßlich ist, ist die Anleitung zur Verifikation und die strenge Anhaltung dazu. Lieber wenige Rechnungen, aber richtig, als viele und wenige richtig! „Die Menge thut's hier nicht." So werden aus dem Rechnungsunterrichte bessere Früchte für das Leben erwachsen, wir werden weniger flüchtige, dagegen weit mehr sichere Rechner erhalten, auf deren Rechnungsergebnisse man sich verlassen kann.

Was nun die Anleitung zur Verifikation anbelangt, so verweisen wir hierüber auf die nachfolgende Behandlung des Rechnungsunterrichts auf den einzelnen Schulstufen, wo jene im Speziellen berücksichtigt werden wird. Zu bemerken ist jedoch, daß der Natur der Sache nach erst von der Realstufe an diese Richtung beim Rechnungsunterrichte eigentlich verfolgt werden kann und daß hiefür auf der Elementarstufe bloß die einfachste Einleitung zu machen ist.

Einen Punkt aber müssen wir hier noch näher ins Auge fassen, der zu der Frage über die Rechnungsproben in sehr naher Beziehung steht; es betrifft derselbe die annäherungsweise schnelle Bestimmung der Rechnungsergebnisse oder das Schätzen derselben. Es ist dieß ebenfalls eine Art Probe, und zwar eine sehr praktische, da sie ohne Schwierigkeit und aufs schnellste zeigt, ob ein erhaltenes Rechnungsergebniß in Beziehung auf die gegebene Aufgabe wenigstens ein mögliches ist oder nicht.

Die meisten Aufgaben, deren genaue Lösung einige Schwierigkeit darbietet und die aus diesem Grunde gerne Veranlassung zu Rechnungsfehlern geben, lassen sich leicht durch einige Modifikationen so umformen, daß die Ergebnisse der modifizirten Aufgaben, ohne von denjenigen der wirklichen Aufgaben bedeutend abzuweichen, bald, oft in einem Augenblick, angegeben

werden können. So lassen sich gewöhnlich schnell zwei Gränzwerthe bestimmen, zwischen welchen sich das zu ermittelnde genaue Resultat befinden muß, und hieraus ersieht man dann, ob dasjenige, das man bei der wirklichen Rechnungsausführung erhalten hat, in Hinsicht auf jene Gränzwerthe möglich ist, oder nicht. Zudem ist die Fertigkeit, einen schnellen Rechnungsüberschlag machen zu können, an und für sich schon werthvoll, und sie gewährt auch in vielen Fällen des Lebens einen sehr willkommenen Vortheil. Diese Fertigkeit kommt aber dem Schüler nicht durch die gewöhnliche Rechnungsweise; es bedarf, um sie zu erwerben, besonderer Anweisung und Uebung, und dieß muß vom Lehrer ausgehen. — Auch hierüber verweisen wir auf die nachfolgende spezielle Anleitung.

Ueber Hülfsmittel für den Rechnungsunterricht der Volksschule.

§ 16.

Veranschaulichungsmittel.

Wie sehr das Gute und Zweckmäßige mißverstanden und aus Mißverstand oder Unkenntniß mißbraucht werden kann, zeigt sich besonders in der Auffassung und Anwendung des methodischen Prinzips der Anschauung. Ein Grundsatz, der die Essenz der Unterrichtsmethode (hauptsächlich seit Pestalozzi) bildet, führt, falsch verstanden, zum Uebel und Verderben. Der Begriff der „Anschauung" ist ein Heilsbegriff für die Volksschule, allein das bloße Wort ist schon häufig zum Deckmantel für den Mechanismus und Schlendrian gemacht worden und hat so dazu gedient, Todtes und Faules für Lebendiges und Frisches auszugeben.

Diese unheilvolle Erscheinung ist insbesondere auch beim mathematischen Unterrichte zu Tage getreten. Wo dieser Unterricht ohne innern Zusammenhang, ohne Saft und Kraft, mit eben so wenig eigener Erfassung als anderseitiger Anregung auf die Schüler ertheilt wurde, da haben wir schon die Worte gehört: „Ja ich mache die Sache ganz einfach, halt so ganz nach dem Grundsatze der Anschauung". Dieser suffisante Ausspruch bildet ein schönes und bezeichnendes Seitenstück zu jenem „Nur recht praktisch!"

Auf Anschauung ist derjenige Rechnungsunterricht noch nicht gegründet, nach welchem die Rechnungs-Größen, -Verhältnisse, -Regeln und -Manieren bloß äußerlich (wenn sonst noch so sorgfältig) vorgeführt und an einander gereiht werden. Die Vorführung und Durchführung des Lehrgegenstandes muß die Herkunft des Einzelnen sowohl als den innern Zusammenhang des Ganzen deutlich offenbaren, muß, wie das leibliche, so insbesondere das geistige Auge des Schülers fesseln und ein lebendiges inneres Sehen (Anschauen), ein Erkennen und Erfassen im gesetzmäßigen Zusammenhange (bei welchem eine Erkenntniß naturgemäß aus der andern fließt) zur Folge haben. Darauf beruht die lebendige Anschauung, die einzig wahre, die es gibt.

Nun ist es von entschiedener Wichtigkeit, sich die Frage richtig zu beantworten:

Was kann man beim Rechnungsunterrichte eigentlich veranschaulichen? —

Man hat hiebei Zweierlei zu unterscheiden: den Akt des Denkens (Zählens), d. i. die Operation, und das Resultat der Operation, d. i. die Zahl. Kann man nun beides veranschaulichen, den Denkakt sowohl als dessen Resultat, die Zahl? — Wir sind der bestimmten Ansicht, daß die Veranschaulichung sich nur auf das Letztere, die Zahl (Zahlmenge) beziehen kann.

Wenn die Fundamentaloperation, aus der alle andern abgeleitet sind, das Zählen ist, so müßte, wenn sich die Operationen überhaupt veranschaulichen ließen, auch dieses sich veranschaulichen lassen. Es ist aber unmöglich, den geistigen Vorgang, durch den wir irgend ein Urtheil bilden, als Vorgang zu versinnlichen, und eben so wenig wird sich das Zählen äußerlich darstellen lassen. Wer keinen Begriff vom Zählen hat, kann auch keine Veranschaulichung desselben darin finden, daß wir z. B. einen Pfenning um den andern nehmen und zusammen an eine Reihe legen, indem wir sprechen: eins, zwei, drei, vier u. s. f.; er würde eben die äußere Hantirung auffassen, wie kleine Kinder es thun, die auch Stück für Stück zusammenreihen, indem sie ganz richtig dazu sprechen: eins, zwei, drei u. s. f., aber bei all diesem Formelwerk, so genau sie den äußern Hergang auch vollziehen, doch nicht zählen.

Wenn sich die allereinfachste Operation nicht veranschaulichen läßt, so wird hievon noch viel weniger bei den von ihr abgeleiteten höhern Operationen die Rede sein können, wie sich Jedermann überzeugen wird, wenn

er z. B. versuchen will, den geistigen Vorgang des Potenzirens zu versinnlichen. Dagegen kann man wohl die Menge der zählbaren Theile der Operationsergebnisse äußerlich darstellen, wodurch die richtige Auffassung der Operationen unterstützt und erleichtert wird, und das ist der Hauptzweck, den man durch die arithmetischen Veranschaulichungsmittel erreichen kann.

Man hat sich also hinsichtlich der genannten Hülfsmittel keiner Täuschung hinzugeben, man weiß, was man von ihnen erwarten darf und was nicht; besser ist es auch immer, von einem Hülfsmittel etwas weniger als zu viel zu erwarten.

Es ist nach dem Gesagten natürlich, daß alle die gemachten Versuche zur Veranschaulichung der Operationen mißlingen mußten; einige dieser Versuche beruhen überdieß noch auf dem Uebelstande, daß die zur Zählung vorgelegten realen Dinge mit symbolischen Zeichen vermischt und konkrete und abstrakte Einheiten durch dieselben Realzeichen dargestellt werden, wodurch bloß eine verstümmelte symbolische Darstellungsweise entsteht.

Einige setzen z. B., um, wie sie vermeinen, die Addition und Subtraktion zu veranschaulichen:

$$\text{II} + \text{II} = \text{IIII} \text{ und } \text{IIII} - \text{II} = \text{II}$$

oder etwa auch $00 + 00 = 0000$ und $0000 - 00 = 00$.

Zählbare Zeichen sind hier allerdings dargestellt; aber wo ist die Veranschaulichung der „Operation"? Bedenklich sieht dann die Sache insbesondere noch bei der dargestellten Subtraktion aus; was soll hier der Schüler denken? — Und was soll er dann thun? —

Bei der Multiplikation und Division wird etwa gesetzt:

$$\text{II} \times \text{II} = \text{IIII} \text{ und } \text{IIII} : \text{II} = \text{II}$$

oder etwa $00 \times 00 = 0000$ und $0000 : 00 = 00$.

Worin besteht hier der Unterschied zwischen der vermeintlichen Veranschaulichung der Addition und derjenigen der Multiplikation? Antwort: Bei jener hat man ein stehendes Kreuz, bei dieser ein schiefes. Ist also durch dieses Kreuz die Operation veranschaulicht? Eine ganz gleiche Betrachtung ergibt sich bei der Vergleichung je zweier andern der dargestellten Operationen.

Der Widerspruch in der gleichen Darstellungsweise der „zu setzenden Dinge" und des „Wie oft" des Setzens, oder die Verwechslung des Konkreten und Abstrakten fällt hier ebenfalls deutlich auf.

Wir bleiben also dabei, daß sich wohl die Menge gewisser zählbarer Dinge, nicht aber das Zählgeschäft selber, die Operation, veranschaulichen läßt.

Die Hülfsmittel zur Zahlauffassung (Zahlanschauungsmittel) werden aus der nächsten Umgebung des Schülers genommen. Gleichartige Dinge, wie die Finger, Griffel, Federn, Kugeln, Würfel, Hölzchen, Striche, Punkte, Ringe ꝛc., werden gezählt, und es ist zweckmäßig, hiebei die gehörige Abwechslung zu berücksichtigen. Sehr gut eignen sich hiezu diejenigen Dinge, welche sich leicht zu gleichartigen Ganzen vereinigen lassen, und in dieser Hinsicht sind die Würfel den Kugeln vorzuziehen. Mit Beziehung auf die Vereinigung der zählbaren Dinge zu Gesammtheiten ist zu bemerken, daß es wünschenswerth ist, diese Dinge auf die verschiedenartigste Weise (nicht bloß einseitig in einer Reihe) mit einander zu verbinden; der Schüler erhält durch diese abwechselnden Gruppirungen eine reinere und bessere Anschauung des Zahleninhaltes.

Zur Fortsetzung der Uebungen im Zählen und zur Auffassung der Zahlen im System ist besonders die Zählrahme (russische Rechenmaschine) mit zehn Zehnerreihen beweglicher Einheiten zu empfehlen. Dieses Hülfsmittel ist um so zweckmäßiger, je inniger es die getrennten Einheiten zu ganzen Kollektiveinheiten vereinigt; deßwegen sind Würfelzählrahmen, bei denen die Zehnerreihen sich zu einer ganzen Quadratplatte von hundert einzelnen Würfeln verbinden, sehr geeignet. Sind diese Würfel nach den landesgesetzlichen Maßen verfertigt, so gewährt eine solche Würfelzählrahme noch den Vortheil, daß sich durch deren Gebrauch beim Zählen und bei der Zahlbildung die Grundmaße den Schülern fast unverlierbar einprägen.

Bis jetzt ist die Zählrahme offenbar das bequemste und beste Veranschaulichungsmittel bei den Zählübungen; denn sie stellt nicht nur die einzelnen zählbaren Einer, sondern auch die Zehner und ihre Zusammenfassung zum Hunderter, als der nächst höhern dekadischen Einheit, am übersichtlichsten und natürlichsten dar, und sie erleichtert überdieß die Manipulation bei diesen Uebungen in einer so vortheilhaften Weise, wie dieß bei keinem andern Veranschaulichungsmittel gleich der Fall ist. Da in der Elementarschule die Veranschaulichung stets mit dem Rechnen Hand in Hand gehen muß, so sollte keine Elementarschule, die auf den Namen einer guten Anspruch machen will, dieses Hülfsmittels entbehren, denn dasselbe leistet leicht und schnell, was bei der Anwendung anderer Hülfsmittel weit schwerfälliger und

langsamer erzielt werden kann. Damit soll freilich nicht gesagt sein, daß eine Elementarschule in Hinsicht auf den Rechnungsunterricht schon deßwegen eine gute zu nennen sei, wenn sie sich des genannten Hülfsmittels bedient; es muß auch hier zum Voraus beherzigt werden, daß der Geist es ist, der lebendig macht.

An die Zählrahme schließt sich zur Versinnlichung der nächst folgenden dekadischen Einheit (des Tausenders) der Tausender-Kubus, der aus 10 Hunderter-Platten, beziehungsweise 1000 Einerwürfeln — gleich denen an der Zählrahme — zusammengesetzt ist. Hat der Schüler durch dieses Hülfsmittel die Vorstellung von 1000 fest erworben, so ist es beim Zählen der Tausender nun weniger mehr nothwendig, ihm stets den einzelnen Tausender vor Augen zu stellen; der Schüler hat bis dahin so kräftige Zahlanschauungen gewonnen, daß man seiner Abstraktionskraft wohl etwas mehr zumuthen und ihn bloß auf ein stellvertretendes Zeichen verweisen darf. Will man hier dennoch mit der Veranschaulichung noch eine Zeit lang fortfahren, so ist es — wenn man sich nicht mit einem zu schwerfälligen Apparate von Platten, Würfeln ꝛc. (auch wenn diese bloß aus Karton verfertigt wären) plagen, oder wenn man nicht Zuflucht zu den Zahlfiguren * auf Tabellen nehmen will, die eben für die wirklichen Einheiten der Zählrahme auch nur Realzeichen substituiren und oft die Zusammenfassung nicht sehr erleichtern — am zweckmäßigsten, einen kleinern Einer zum Zählen vorzulegen.

Zu diesem Ende kann der frühere Einerwürfel in zehn gleiche kleine Platten und eine derselben in zehn gleiche Stäbchen zerschnitten werden, von denen eines in zehn gleiche Würfelchen zerfällt wird, deren 1000 den frühern Einerwürfel ausmachen, so daß, wenn dieser ein Kubikzoll war, die nun zu zählenden Einer Kubiklinien bilden. Zur Versinnlichung der höhern dekadischen Einheiten: Zehntausender, Hunderttausender, Millionen, kann es zunächst kein passenderes Mittel geben; der Stab aus 10 Kubikzollen würde nun den Zehntausender, die Platte aus zehn solchen Stäben den Hunderttausender und der Würfel aus zehn solchen Platten, d. i. der Kubikfuß, die Million darstellen, wozu die Kubiklinie

---

* Bekannt sind diejenigen von Heer, die auf schwarzem Grunde die entsprechenden Einer als weiße Kreise enthalten. Man hat auch solche, die abwechselnd aus schwarzen und weißen Quadraten bestehen, ähnlich wie die Felder auf dem Schachbrette.

nun als Einer gilt. Zum Zählen der Zahlen über 1000 könnten nun wieder die Kubikzolle der Zählrahme, die Platten* des Kubikfußes ꝛc. dienen; dagegen würden die Summen, die unter 1000 fallen, ohne die Zählrahme gebildet (da dieses nach Vollendung der frühern Unterrichtsstufe nun wohl möglich sein soll) und sodann zur Summe der höhern Einheiten hinzugerechnet.

Es versteht sich, daß dieses durch Vorweisung der wirklichen Einheiten unterstützte Zählen der höhern Zahlen jedenfalls nicht zu lange hinausgezogen werden darf, denn der Schüler soll einmal zur Festigkeit und Sicherheit in der Abstraktion gelangen, so daß er der Versinnlichungsmittel entbehren kann; diese hatten ihm bloß feste und kräftige Zahlvorstellungen zu sichern.

Dagegen sind eben zur Bildung und Auffassung der genannten höhern Zahlen die vorgeschlagenen Veranschaulichungsmittel (oder ähnliche) unumgänglich nothwendig; ja es ist fast unerläßlich, daß der Schüler diese Zahlen nicht nur in der Anordnung nach den drei Dimensionen, wie sie durch den Würfel geboten wird, sondern auch in Gruppirungen nach einer oder nach zwei Dimensionen auffasse, damit er diese Zahlen um so sicherer und reiner besitze. Der Schüler hat gar so oft eine mangelhafte, ja bisweilen gar keine Vorstellung davon, wie schnell und stark das Verhältniß der höhern Zahlstellen zu den niedern, im Raume dargestellt, zunimmt. Wird er angeleitet, die Größe der Zahlen nach den verschiedenen Ausdehnungen im Raume sich zu denken, so lernt er erst ihre Bedeutung recht erkennen und verwechselt nicht mehr so leicht höhere und niedere Einheiten mit einander. Dieß hat besonders auch dann noch seine Geltung, wenn der Schüler in das Gebiet der Dezimalbrüche eingeführt wird. Schüler die keine frische Zahlanschauungen erworben haben, verwechseln so gerne Zehntel mit Zehnern, Hundertstel mit Hundertern u. s. f.; haben sie aber räumlich diese Einheiten durch einander gemessen, so prägt sich ihnen ihr gegenseitiges Verhältniß zu einander bleibend ein; sie sprechen nicht nur Zahlnamen und schreiben nicht nur Ziffern, sondern sie verbinden auch damit die richtigen Vorstellungen.

---

* Diese müssen dann aber nicht aus schwerem Holze, sondern aus leichtem Materiale, wie Karton ꝛc., verfertigt sein.

§ 17.

Die bürgerlichen Rechnungsgrößen: Maße, Gewichte, Münzen ꝛc.

Diese Größen gehören zum Theil auch zu den Veranschaulichungsmitteln der Zahl; jedenfalls sind es Hülfsmittel, welche in die Verhältnisse der Zahl einführen. Sie erleichtern aber neben der Zahlauffassung auch das Rechnen selbst; so erzielt man durch die Unterabtheilungen der einzelnen Maße, Gewichte und Münzen, daß man bei der Rechnung nicht gleich auf die Bruchform geräth, sondern sich bei den gewöhnlichen Rechnungsaufgaben des Lebens meist ohne Bruchzahlen behelfen kann. Viele dieser Größeneinheiten, besonders diejenigen, die nach dem Dezimalsysteme eingetheilt sind, eignen sich ganz vorzüglich zu Hülfsmitteln der Zahlauffassung, wie z. B. die Längenmaße: Linien, Zolle, Fuße, Ruthen ꝛc. (Rappen, Batzen, Franken ꝛc.). —

Nun ist eine Hauptfrage die:

Welche Maße, Gewichte, Münzen sollen in der Volksschule vorzugsweise in Berücksichtigung fallen? —

Es galt ehemals als eine Hauptsache beim Rechnungsunterrichte, den Schüler möglichst frühe in allen möglichen einheimischen und landesfremden Maßen, Gewichten und Münzen herumzujagen; man schien anzunehmen, daß gerade daraus die wahre Rechnungsfähigkeit und Rechnungskunde hervorgehe. Es durfte kaum ein noch so bizarres und unregelmäßiges Maß- und Münzwesen eines Ländchens in der Nachbarschaft geben, die betreffenden Größen mußten alle beim Rechnen aufmarschiren, damit sich der Schüler mit ihnen abplage. Was haben aber die Schüler mit all den Unzen, Drachmen, Skrupeln, Gran, Mark, Quintli, Stüber, Pfenning; Ballen, Schock, Mandeln; Kopf, Seidel, Vierling; Zürcher-, Winterthurer-, Eglisauer- Viertel und Saum (lauter und trüb); Luzerner-, Bündner- und Glarner- Gulden . . . und wie die unendlich bunte Schaar noch heißen mag — angefangen? Haben sie nicht diesen Ballast sobald wieder weggeworfen, als er ihnen nicht mehr aufgebürdet wurde? — Daß dieß wirklich geschah, war ganz natürlich und die vermeintlich praktisch so werthvolle Vorbildung für's Leben ging fast spurlos verloren; das haben unsere ältern Schüler (Repetirschüler) zur Genüge bewiesen.

Die oben gestellte Hauptfrage muß entschieden dahin beantwortet werden, daß in jeder Schule zunächst nur die landesgesetzlichen Maße,

Gewichte und Münzen in solcher Weise in Betracht fallen sollen, daß der Schüler an denselben wirklich rechnen lernt. Vor der dritten Schulstufe sind außer diesen einheimischen und im Leben gebräuchlichen Rechnungsgrößen keine andern in den Unterricht hereinzuziehen. In der Ergänzungsschule dagegen ist die Berücksichtigung einzelner wichtiger Rechnungsgrößen fremder Staaten wohl am Platze; aber es muß ausdrücklich bemerkt werden, daß man sich hiebei sehr zu hüten habe, zu weit ins Einzelne zu gehen, damit jene Ueberladung, die wir oben tadelten, sorgfältig vermieden bleibe. — Wer eben im Leben, veranlaßt durch diese oder jene Geschäfte, auf fremde Rechnungsgrößen stößt, der wird, falls er rechnen kann (und dieser Zweck ist erreichbar ohne die Kenntniß aller möglichen fremden Maße, Gewichte und Münzen), sich sehr leicht auch ohne Anleitung zurechtfinden können, wenn er nur die Grundlage der Vergleichung kennt. Die Schule soll nicht Alles lehren und mittheilen wollen; dazu hat sie keine Zeit und Kraft und es wäre ein solches Streben auch nicht pädagogisch. Der Schüler muß sich mit der erworbenen Kraft im Leben selbst zu helfen wissen; deßwegen erzieht man ihn eben zur Selbstständigkeit.

Wir haben bei der nachfolgenden Darstellung des Rechnungsunterrichts darauf verzichtet, den Schüler in den Wirrwarr der Maße, Gewichte und Münzen vieler Länder einzuführen; das neue eidgenössische Maß-, Gewicht- und Münzsystem ist dem Unterricht als Größenunterlage zu Grunde gestellt. Dieses System ist bekanntlich auf das neufranzösische oder metrische System gegründet; die Münzeinheiten stimmen mit den französischen ganz überein; die Einheiten der übrigen Größen sind Ableitung der entsprechenden französischen. Es ist hier nicht der Ort, ausführlicher über die Vortheile dieses Systems einzutreten; seine völlige Uebereinstimmung mit dem dekadischen Zahlensysteme ist allein schon ein hinreichender Grund, um seine Vorzüge an und für sich, so wie auch mit Hinsicht auf den Unterrichtszweck überhaupt einleuchtend zu machen.

Natürlich wird, wie oben schon hervorgehoben wurde, jeder Lehrer die in seinem Lande gesetzlichen Rechnungsgrößen zunächst und vorzugsweise berücksichtigen. Wo ein neues System dieser Größen eingeführt werden soll, da muß insbesondere die Schule zu dessen wirklicher Einführung im Volke mitwirken. Sie wird die neuen gesetzlichen Einheiten auf anschauliche Weise in ihrem Zusammenhange vorführen, nach denselben ausschließlich rechnen lassen und die alten Einheiten nur zur Vergleichung mit den neuen herbeiziehen, um irrthümlichen Verwechslungen im

Leben vorzubeugen. Ohne diese Mitwirkung von Seite der Volksschule ist eine Umänderung im Maß-, Gewichts- und Münzwesen mit den größten Schwierigkeiten verbunden. Das hat z. B. Frankreich erfahren, wo das neufranzösische System nach jahrelangen Bemühungen von Seite der Behörden noch nicht eigentlich beim Volke Eingang fand und der Verwirrung in dieser Hinsicht sehr lange nicht Einhalt gethan werden konnte *.

Alle gesetzlichen Erlasse, polizeilichen Verfügungen, amtlichen Tabellen u. s. f. richten nicht so viel aus, einem neuen Maß-, Gewichts- und Münzsystem Eingang beim Volk zu verschaffen, als die Volksschule ausrichten kann.

So ging die Einführung des neuen Münzfußes, der neuen Maße und Gewichte in der Schweiz ohne irgendwelche erhebliche Störung und Verwirrung mit Leichtigkeit von statten, so viele Besorgnisse man hierüber zuvor auch hatte, und es hat die Volksschule an der schnellen und glücklichen Durchführung dieser Reform gewiß nicht den geringsten Antheil.

Auf einen großen Fehler, der beim Rechnungsunterrichte hinsichtlich der Maß- und Gewichts-Einheiten ꝛc. in manchen Schulen begangen wird, müssen wir hier noch besonders aufmerksam machen. Es besteht derselbe darin, daß die genannten Einheiten häufig nur dem Namen nach und nicht nach ihrer wirklichen Größe und ihrem wirklichen Verhalten zu einander durch Anschauung und Vergleichung (oder wo möglich gar durch eigene Bildung) aufgefaßt werden. Da lernen die Kinder — wie an vielen Orten auf gleich verkehrte Weise das Einmaleins — bloß nach dem Gehör und gleich Liederversen auswendig:

1 ′ = 10 ″ = 100 ‴; 1 □′ = 100 □″ = 10000 □‴

1 Klafter = 6′; 1 □Klftr. = 36 □′; 1 Kubikklftr. = 216 Kubikfuß

1 Malter = 10 Viertel = 100 Immi (Mäßli); 1 Saum = 100 Maß

1 Cntr. = 100 Pfd.; 1 Pfd. = 500 Gramme; 1 Pfd. = 32 Loth ꝛc.

Dieser Fehler rührt daher, daß man dem Einen nicht gibt, was ihm gehört, und dem Andern läßt, was ihm nicht gehört. Wir meinen: So lange man die Erklärung der bürgerlichen Maße, Gewichte ꝛc. nicht der Geometrie anheimstellt, in der sie ihren natürlichen Ursprung haben, und durch die sie allein und ohne große Schwierigkeit zum rechten Verständniß gebracht werden können; so lange werden sie beim Rechnungs-

* Siehe Lacroix praktische Geometrie.

unterrichte nur flickweise behandelt. Und dieß geschieht besonders da, wo man den Rechnungsunterricht allein für den mathematischen Unterricht der Volksschule hält. Es geht da gerade eine Hauptsache verloren, nämlich die, daß der Schüler die Hülfsmittel sich selbst schaffen, den Apparat sich selbst aneignen lernt, durch welche er erst in den Stand gesetzt wird, die Rechnung selbstständig in Anwendung zu bringen. Ohne die Geometrie steht er mit seinen bloßen Rechnungskenntnissen in vielen Fällen des praktischen Lebens verlassen da; mit der Geometrie erlangt er die rechte Grundlage zur Kenntniß der Maße im allgemeinsten Sinne, er lernt messen und dadurch erst recht rechnen.

In welcher Weise und in welcher Aufeinanderfolge soll nun die Vorführung und Anwendung der bürgerlichen Maße, Gewichte und Münzen beim Unterrichte in Hinsicht auf die einzelnen Schulstufen geschehen?

Wir geben hierauf folgende Antwort:

Auf der Elementarstufe bilden gerade diejenigen Gegenstände, an denen der Schüler die Zahlen auffassen gelernt hat, die zweckmäßigsten Einheiten für das auf dieser Stufe erst in den einfachsten Anfängen auftretende angewandte Rechnen. Man bleibe doch diesem Schulkreise mit allen denjenigen Größen des bürgerlichen und technischen Verkehrs ferne, von welchen sich der Elementarschüler unmöglich schon einen richtigen Begriff gebildet hat, oder bilden kann, da sie nicht bloß eine bestimmte Auffassung der Grund-Größeneinheiten, sondern zudem eine erhöhte Abstraktionskraft voraussetzen. Manche Anleitungen zum Elementarrechnungsunterricht gehen hierin schon sehr weit. Man findet da schon Rechnungen auf Malter, Saum, Zentner, Scheffel, Wispel, Klafter, Ruthen, Meilen, Jucharten, Ries u. s. f., was Alles eine Erfahrung und Einsicht erfordert, die von dem Alter, um welches es sich hier handelt, nicht zu erwarten ist, wofern man keine Treibhausfrüchte verlangt. Die Einführung sämmtlicher höhern (überhaupt schwierigern) Maß- und Gewichtseinheiten ꝛc. in den Rechnungsunterricht fällt auf die Realstufe; die Elementarschule zieht bloß die allereinfachsten dieser Größen, diejenigen, von denen sich das Kind schon von Haus aus durch vielfache Anschauung und Anwendung einen ganz bestimmten Begriff bildet, wie z. B. die kleinern Münzen ꝛc., in den Unterricht herein.

Auf der Realstufe werden nach und nach die übrigen Größeneinheiten (besonders so weit möglich im Zusammenhange mit dem geometri-

schen Unterrichte), vorgeführt und zunächst durch unmittelbare Anschauung aufgefaßt, die höhern Einheiten, z. B. Zentner, Malter, Saum werden wie diejenigen der Zahlen durch schlußgemäße Ableitung aus den niedern gebildet.

Gegen das Ende dieser Schulstufe oder im Anfange der nächstfolgenden, der Ergänzungsschule, hat der geometrische Unterricht den vollständigen Zusammenhang und die Verwandtschaft dieser Größeneinheiten, die Bildung der einen aus den andern, mit einem Worte das System der Maße, Gewichte und Münzen genetisch zu erläutern und zum Bewußtsein zu bringen. Es hat dieser Gegenstand eine ganz besondere Wichtigkeit und der spätere Unterricht in der Naturkunde wird sich wiederholt hierauf stützen können.

§ 18.

Ueber ein individuelles Lehrmittel (Uebungsbuch) für den Rechnungsunterricht in der Volksschule.

Wir stellen zunächst die Frage:

Ist es nothwendig, den Schülern der Volksschule ein Rechnungslehrmittel in die Hände zu geben?

Bei der Beantwortung dieser Frage müssen wir unser Augenmerk auf verschiedene Gesichtspunkte richten. Dieselben liegen theils in den eigenthümlichen Verhältnissen der Volksschule (gemäß der Idee derselben), theils in dem Unterrichtsgegenstande selbst.

Jeder Lehrer bedarf zur Selbstbeschäftigung für die Schüler einen mannigfaltigen passenden Uebungsstoff, den man nicht gerade jeden Augenblick selbst auswählen und dessen Feststellung und Anordnung nicht allen Lehrern ohne Ausnahme überlassen werden kann, weil in ihm nicht bloß die verschiedenen Verhältnisse des Lebens aufs sorgfältigste berücksichtigt sein müssen, sondern derselbe auch einer bestimmten zweckmäßigen Methode genau zu entsprechen hat. Diese Forderungen zur Sicherung des Unterrichtszweckes machen ein besonderes Lehrmittel für den Schüler zur Nothwendigkeit *.

Dieses Lehrmittel bildet überdieß eine Erleichterung für das Lehrgeschäft. Die Mittheilung der Aufgaben an die Schüler wäre ohne ein beson-

---

* Natürlich wird ein tüchtiger Unterricht von Seite des Lehrers als Hauptsache vorausgesetzt.

deres Lehrmittel mit bedeutendem Zeitverlust verbunden, besonders da, wo der Lehrer viele Klassen zu unterrichten und gleichzeitig zu beschäftigen hat. Daß ohnedieß die Aufgaben im Buche dem Kinde deutlicher vorgeführt werden können als durch bloßes Diktiren oder durch Anschreibung an die Wandtafel, versteht sich von selbst.

Hauptsächlich machen es aber diejenigen Gründe, die in der Sache selbst liegen, wünschenswerth, daß dem Schüler ein Lehrmittel in die Hand gegeben werde. Fast nirgends ist die Uebersicht des Ganzen, die Einsicht in den Zusammenhang und die geistige Verwandtschaft der einzelnen Theile so nothwendig wie beim Rechnungsunterricht. Wo so viele Einzelnheiten in Zahlen, Zahleigenschaften, Zahlverbindungen, in reinen wie in angewandten Operationsaufgaben auftreten, wie hier: da wird es auch beim besten Streben des Lehrers nach Einheit und Zusammenhang dennoch nur zu häufig begegnen, daß der Schüler den Faden verliert, daß er bei dem Vielen und Vielerlei den Wald vor den Bäumen nicht mehr sieht. Ein zweckmäßiges methodisches Lehrmittel, das in seiner ganzen Anordnung und Gliederung den innern Zusammenhang seiner Theile offenbart, das also die nöthige Einsicht und Uebersicht zugleich erleichtert und ermittelt, ist darum für den Rechnungsunterricht nicht nur sehr wünschenswerth, sondern zu dessen rechtem Gelingen ganz unerläßlich.

Daß das Lehrmittel endlich für die einzelnen Schulen ein obligatorisches sein müsse, ergibt sich zum Theil schon aus dem Obigen, so wie insbesondere aus der allgemeinen Aufgabe der Volksschule, deren Zweck nach übereinstimmenden pädagogischen Grundsätzen erreicht werden soll. Eine weitere Erörterung des Grundsatzes der obligatorischen Lehrmittel ist indessen hier nicht am Platze, sie gehört in eine allgemeine Auseinandersetzung der innern Organisation der Volksschule.

Es frägt sich nun:

Wie soll ein Rechnungsmittel der Volksschule im Allgemeinen beschaffen sein? Soll es in didaktischer Weise wie ein Lehrbuch abgefaßt sein, oder soll es mehr die Form und den Charakter eines nach der Methode geordneten Uebungsmaterials haben?

Es würde dem Geiste der psychologisch-genetischen Methode widersprechen, dem Volksschüler ein Schulbuch vorzulegen, das ihm die Entwicklung und Lehre der Zahl vorführte. Die Methode unsers Schulfachs ver-

langt, daß der Schüler zunächst selbst erfahre und selbst bilde, woraus sich ihm der Ursprung einer Wahrheit, die Lehre ergibt und worauf sich seine Erkenntniß und Einsicht gründet. Der Lehrer hat diese Thätigkeit des Schülers hervorzurufen und auf das rechte Ziel hinzuleiten, und das Lehrmittel hat dem Schüler den entsprechenden nach dieser Methode geordneten Stoff zu liefern, an dem sich (unter der geeigneten Anleitung und Ueberwachung von Seite des Lehrers) die gewonnene Erkenntniß des Schülers durch vermehrte Erfahrung und Erprobung befestigen, sein Gesichtskreis und seine Begriffswelt sich erweitern und seine Einsicht und Kraft auf diesem Gebiete naturgemäß erstarken kann.

Nach diesem muß das in Rede stehende Lehrmittel eine Uebungsbuch oder eine Aufgabensammlung sein, jedoch in der Weise, daß die Grundzüge der Methode des Rechnungsunterrichtes in bestimmtem Gepräge hervortreten, damit es nicht zu den einander entgegengesetztesten Unterrichtsmethoden angewendet werden kann, sondern das Ziel des Unterrichtes gemäß der allgemeinen Aufgabe der Volksschule nach übereinstimmenden Grundsätzen fördern hilft.

Eine derartige Aufgabensammlung „soll der Mittelpunkt des Unterrichtes sein" (Dr. Wittstein), d. h. der Unterricht, der den Hauptanstoß zur Thätigkeit gibt, muß in derjenigen Beziehung zur Aufgabensammlung stehen, daß der Schüler dadurch in den Stand gesetzt wird, das in derselben dargebotene Material freithätig durchzuarbeiten, so daß hieran, dem allgemeinen Unterrichtszwecke entsprechend, eine fruchtbare Entwicklung des Schülers sich knüpft. Der Unterricht soll indessen nicht in dem Verhältnisse zur Aufgabensammlung stehen, daß er sich ängstlich auf jede Aufgabe derselben von a bis z zu beziehen hat; ein selbstständig ertheilter Unterricht wird je nach Umständen Einzelnes ausscheiden oder zusetzen, Einzelnes gedrängter oder ausführlicher behandeln können.

Wie soll die Rechnungsaufgabensammlung im Besondern nach Anlage und Inhalt beschaffen sein?

Das sämmtliche Uebungsmaterial wird nach der methodischen Gliederung des Unterrichtsstoffes eingetheilt und angeordnet werden müssen; wir verweisen hier auf die übersichtliche methodische Vertheilung des ganzen Unterrichtsstoffes nach den Schulstufen und Schuljahren in § 10.

Hervorzuheben ist insbesondere, daß der Stoff in zwei Hauptabtheilungen zerfallen muß, von denen die erste das Uebungsmaterial zur Zahlauffassung

und operationsmäßigen Zahlverbindung und die zweite das Uebungsmaterial für das bewußte Operiren zum Zwecke der Lösung bestimmter angewandter Aufgaben enthalten muß. In welchem Verhältnisse diese beiden Abtheilungen zu einander stehen müssen, ist in den frühern Untersuchungen betreffend die Methode des reinen und angewandten Rechnens § 9 und 10 erörtert.

Es ist schon von verschiedener Seite her verlangt worden, daß eine Aufgabensammlung oder ein Uebungsbuch auch sogenannte Auflösungen von jeder besondern Art der Aufgaben enthalten sollte, damit dem Schüler die Aufgabenlösung und dem Lehrer das Lehrgeschäft noch mehr erleichtert würden und jener auch *nach* der Schulzeit bei gegebenen Anlässen sich wieder Rath in jenen Musterlösungen erholen könnte. Wir finden diese Forderung so lange unbegründet und ihre Erfüllung unzulässig, als der Unterricht einen wahrhaft geistbildenden und erziehenden Einfluß auf den Schüler ausüben und nicht in eine handwerksmäßige Anleitungs- und Abrichtungskunst ausarten soll. Der Schüler — sagt *Unger* in seinem Rechenbuche — wird hiedurch (durch jene Auflösungen) an ein gedankenloses Nachbilden gewöhnt und seine ganze Beschäftigung besteht in einem mechanischen Befolgen der gegebenen Vorschriften; ihm dient das vorgerechnete Beispiel bloß als äußeres Muster, und wie wenig der Schüler bei dieser Uebung denkt, geht schon daraus hervor, daß er sehr oft das Zufällige in dem zur Erläuterung vorgerechneten Beispiele als das Wesentliche ansieht und umgekehrt.

Das Lehrmittel ist nun zunächst da, um dem Zwecke des Schulunterrichtes zu dienen; um anderer, wenn auch nützlicher Beziehungen willen darf man ihm nicht eine Form geben, die jenem Zwecke hinderlich wäre. Die Beigaben von Musterauflösungen würden aber demselben nur *hindernd* entgegentreten; sie würden bei den Schülern die *freie Thätigkeit*, das *eigene Nachdenken* und *Auffinden* nur hemmen. Diejenigen Schüler, welche nach vollendeter Schulzeit erst noch nach vorgerechneten Musterbeispielen greifen müssen, um die Rechnungsaufgaben des Lebens zu lösen, sind jedenfalls durch den Schulunterricht nicht zum selbstständigen und freien Denken erhoben worden; je mehr aber *dieses* erreicht werden wird, desto seltener werden solche Schüler werden und desto weniger werden jene Muster, Vorschriften — Rechnungsfaulenzer — mehr nöthig sein. Für ganz unfähige Schüler können indessen weder die Lehrmittel noch der Klassenunterricht extra eingerichtet werden, für solche muß jeder Lehrer je nach den Verhältnissen das speziell Zweckmäßige und möglichst Förderliche zu

treffen suchen; und was bei den übrigen Schülern das allfällige Vergessen gewisser Einzelnheiten anbelangt, so kann hierauf außer durch das Lehrmittel leicht auf anderm Wege Bedacht genommen werden.

Ueber den materiellen Inhalt, der den Aufgaben des Lehrmittels zu Grunde liegen soll, wurde schon früher bei der Betrachtung des angewandten Rechnens in § 9, II einläßlich eingetreten. In Hinsicht auf die geistige Seite der Aufgaben muß besonders hervorgehoben werden, daß ihr Inhalt stets ein würdiger sei, so daß sie bildend erziehend auf den Schüler einzuwirken vermögen.

Aufgaben, die den Schüler nicht zum Nachdenken zwingen, ihn nicht anstrengen, sind eben so verwerflich, als Aufgaben, die über seiner Fassungskraft, oder nicht in der Möglichkeit liegen, ihm verständlich und einsichtlich zu werden. Außerdem ist dabei auf die Bildung des sittlichen Gefühls sorgfältigst Rücksicht zu nehmen. Bei keinem Unterrichtsgegenstande ist so viel Gelegenheit geboten, durch eine unpassende Behandlungsweise in den Schülern einen zu materiellen Sinn, eine Neigung zum Eigennutz, zur Uebervortheilung Anderer zu nähren, als beim praktischen Rechnen. Daher werden mit Recht Aufgaben folgender Art getadelt: „Friedrich verkaufte ein schönes Messer für 18 Groschen; es waren 9 Groschen mehr, als er dafür gegeben hatte. Wie viel hatte er dafür geben müssen?", weil diese Aufgabe dem Schüler ein unreines Bild gibt, ohne daß es als solches bezeichnet wird. „Einem solchen Friedrich sollte man eine Tracht Prügel verordnen, aber seine Handlungsweise in keine Aufgabensammlung aufnehmen." *

Auf der andern Seite hat man sich aber ebenfalls zu hüten, den Aufgaben mit Gewalt eine besondere moralische oder religiöse Färbung zu geben; der Lohn ist dahin, den man auf solche Weise erreichen will, und Kopfhängerei ist eine eben so häßliche und kranke Richtung, als es auf der andern Seite die egoistisch-materielle ist. In wie weit überdieß das Wort „les extrêmes se touchent" auch hier noch seine besondere Geltung haben kann, wollen wir nicht untersuchen. Wir finden in einigen Aufgabenbüchern Beispiele der folgenden Art: „Nachdem Theodor zu dem

---

* Aus den Zahldenkübungen in elementarischer Allseitigkeit von Ch. G. Scholz.

Gelde, welches ihm die Frau Pathe in die Sparbüchse schenkte, 12 Wochen lang in jeder Woche 2 Sgr. von seinem Verdienste gelegt hatte, so konnte er von dem ganzen Inhalte der Sparbüchse eine Bibel, welche 1 Thlr. kostete, bezahlen und noch 4 Sgr. für die armen Abgebrannten zu Berga beisteuern; wie viel betrug das Geschenk der Frau Pathe?", und derartige Beispiele halten wir in pädagogischer Beziehung für gleich tadelnswerth, wie die eben vorhin berührten, gewissermaßen entgegengesetzten; denn auch das Gute soll man nicht durch ungeeignete Mittel und in ungeeigneter Verbindung, ohne daß ein begründeter innerer Zusammenhang hervortritt, den Schülern vorführen.

Für welche Schulklassen soll endlich die Aufgabensammlung bestimmt sein?

Es versteht sich von selbst, daß den Schülern bei ihrem Eintritt in die Volksschule noch keine Aufgabensammlung in die Hand gegeben werden kann. Wann und für wie lange soll nun dieses geschehen? — Wir haben früher schon darauf aufmerksam gemacht, daß es in der ganzen Natur des Elementarschulunterrichtes liege, daß derselbe hauptsächlich und größtentheils in der gegenseitigen Mündlichkeit zwischen Lehrer und Schüler besteht. Wir halten daher eine Aufgabensammlung für die Elementarschule nicht für durchaus nothwendig. Da aber der Schüler der dritten Elementarklasse doch schon eine gewisse Selbstständigkeit besitzt und hier die Aufgaben zur Operations- und Zahlentwicklung schon mannigfaltiger werden, indem sie sich auf alle vier Operationen erstrecken, da ferner die Einführung in die Auflösung von eingekleideten Rechnungsbeispielen ohne ein Lehrmittel mehr Zeit wegnehmen dürfte, so erscheint allerdings eine Aufgabensammlung schon für die dritte (letzte) Elementarklasse als wünschbar; sie muß aber um so mehr mit der möglichsten Einfachheit abgefaßt sein, da sie für den Schüler eine neue Erscheinung ist. Es wird daher gut sein, wenn sie ihm zunächst ganz Bekanntes vorführt, damit er sich bald in ihr zurecht findet und nicht durch sie abgeschreckt wird.

Die Aufgabensammlung wird endlich am zweckmäßigsten in Jahresheften abgefaßt sein und bis ans Ende der Ergänzungsschule reichen, bis wohin der reine und angewandte Rechnungsstoff gemäß den früher entwickelten Anforderungen abgeschlossen werden soll.

Zweite Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht

auf der ersten Schulstufe;

Elementarschule.

Einleitung.

§ 19.

Nach der frühern Untersuchung in § 9 und § 10 fällt auf die Stufe der Elementarschule die Entwicklung des arithmetischen Vorstellungs- und Denkvermögens (der Zähl- oder Operationskraft) und die dadurch ermöglichte, allmälig sich erweiternde Bildung und Auffassung der Zahl und Zahlform (ganze Zahl) im Gebiete der Einer, Zehner und Hunderter, jedenfalls nicht über die Tausender.

Wir werden den Unterricht gemäß unserer frühern Eintheilung und Abstufung nach Jahreskursen verfolgen, mit steter Rücksicht auf den Stand des Schülers im Allgemeinen, so wie mit Beziehung auf seine Fortschritte in den übrigen Unterrichtsfächern.

I.

Erstes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem sechsten und siebenten Altersjahre.

§ 20.

Aufgabe.

Gemäß den frühern Betrachtungen in der ersten Abtheilung hat sich als Aufgabe des Rechnungsunterrichtes für das erste Schuljahr ergeben:

Weckung der Zählkraft und hieraus folgende Bildung der ersten absoluten Zahlen bis zu einer sehr mäßigen Höhe (die erstern Zehner). Befestigung durch's Zu- und Wegzählen. Erste Zahlbezeichnung.

§ 21.

Vorbereitungsunterricht.

Wie jeder beginnende Schulunterricht, so hat auch der erste Rechnungsunterricht in dem Umstande einige Schwierigkeiten, daß die Kinder hinsichtlich ihrer geistigen Entwicklung sehr ungleich in die Schule treten. Bei dem einen, zwar weitaus kleinern Theile von ihnen, ist der Zahlensinn noch in dem Stadium des Schlummers oder dann in den ersten Regungen des Aufwachens begriffen, während er bei manchen schon in höherm oder niedererm Grade thätig geworden ist.

Diese Thätigkeit ist indessen noch bedeutend ungeregelt und bei vielen Kindern kann der in diesem Alter sehr lebendige Nachahmungstrieb in der Sprache, nach welchem sie so leicht und gerne neue Wörter und Wortreihen nachsprechen und ins Gedächtniß aufnehmen, oft in der Weise täuschen, daß die Worte für die Zahlen genommen werden, d. h. daß man voraussetzt, die Kinder verbinden mit den Zahlnamen, die sie so geläufig sprechen, auch die entsprechenden richtigen Zahlvorstellungen.

Es ist darum nicht bloß zweckmäßig, sondern für einen gedeihlichen Unterricht ganz unerläßlich, nun in systematischer Weise die Zahlauffassung vorzubereiten und darnach allmälig zu vermitteln. Für die in diesem Gebiete noch weniger entwickelten Kinder bildet dieß die Brücke, um den übrigen angeregtern oder begabtern sich anzuschließen und ihnen folgen zu können, und für diese ist es nur vortheilhaft, wenn ihre in manchen Stücken noch ungeregelte und mangelhafte Vorbereitung auf eine festere Basis geführt wird.

Der Vorbereitungsunterricht im Rechnen wird demnach zunächst auf diejenigen Thätigkeiten Bezug haben, die das Zählen einleiten. Diese sind hauptsächlich: das Ausscheiden, wiederholte Setzen und Anordnen gleichartiger Dinge und die Unterscheidung von „mehr" und „weniger" solcher Dinge. Die Uebung dieser Thätigkeiten in ihrer direkten Richtung auf das Zählen wird am besten unterstützt durch ein Anschauungsmaterial, bestehend aus verschiedenen Arten gleicher Dinge, die sich leicht zum Zählen eignen können.

Der Lehrer bringt z. B. viele derartige Dinge, wie: gleiche Kugeln,

Bohnen, Würfel, Ringchen, Knöpfe, Hölzchen, Bleistifte, Federn, Griffel (Schieferstifte) ꝛc. (kurz, was er leicht bei der Hand hat und zweckmäßig findet) unter einander vermengt auf den Schultisch vor die Kinder. Nun läßt er sie aufsuchen, was für Dinge sich hier finden; er läßt die einzelnen Arten benennen. Hierauf hat ein Schüler um den andern bald Kugeln, bald Hölzchen, bald Bohnen, bald Stifte ꝛc. herauszusuchen; dann folgt das wiederholte Setzen und Anordnen, so wie das Unterscheiden größerer und kleinerer Quantitäten derselben. Da heißt es z. B.

Suche du Kugeln heraus! du Hölzchen! du Würfel! du Federn! ꝛc.
Leget sie in Häufchen, in Reihen u. s. w.
Nimm du lauter Bohnen und lege sie neben einander an eine Reihe!
Unter* einander in eine Reihe!
Lege mir Bohnen in die rechte Hand, in die linke Hand!
In welcher Hand habe ich mehr Bohnen?
In welcher weniger?
Sind das viele Bohnen?
Gib mir viele! Nur wenige!
Nimm alle wieder weg und lege sie in jene Schachtel!
Lese mir Hölzchen aus und lege sie zusammen an einen Haufen!
Bilde daraus viele Häufchen!
Welches ist das größte, das kleinste?
Bei welchem sind am meisten Hölzchen?
Bei welchem am wenigsten?
Lege Würfel neben, unter, auf einander!
Viele Bohnen an einen Ring! (ein Kränzchen).
Eine Bohne mitten in den Ring! (in die Mitte) —

und so fort in der mannigfaltigsten Weise, wie der Lehrer es für gut findet.

Die Schüler können nun veranlaßt werden, die vorliegenden Gegenstände nach verschiedenartigen Formen zu Gesammtheiten zu gruppiren. Ein Lehrschüler kann auch leicht diese Beschäftigung überwachen. Es ist gut, wenn den Schülern hierin einige Freiheit gelassen werden kann, damit das Ganze mit ihren frühern Unterhaltungen bei Hause so viel als möglich

---

* Die Bedeutung von »neben«, »unter« ꝛc. wird schon vorher beim allgemeinen (Sprach-) Unterricht berücksichtigt.

übereinstimmt; ein zu großer Kontrast gegen das Haus taugt nicht im ersten Schulleben; die Schüler finden anfänglich in der Schule doch Neues und Fremdes genug.

Was die Unterscheidungen der Verhältnisse von „mehr" oder „weniger" 2c. anbetrifft, so sind hierin die Kinder schon sehr frühe daheim. Lange, bevor sie zählen können, unterscheiden sie mit ziemlicher Sicherheit ein größeres oder kleineres Quantum, eine größere oder kleinere Mehrheit. Man darf Kindern nur diese oder jene Sachen, die sie gerne haben, austheilen; sie sehen bald, wo das größere Häufchen, überhaupt wo das Mehr ist. — Das „ein" gebrauchen sie vor dem Eintritt in die Schule schon sehr frühe, selbst vor den Unterscheidungen des „mehr" oder „weniger"; es ist ihnen mit dem Ding, dem Gegenstande verwachsen, ohne daß jedoch diese Vorstellung schon zum bestimmten Maße, zur bewußten Einheit geworden wäre.

Die Uebungen, die in diesen Paragraphen als Vorbereitungsunterricht zur Zahlauffassung bezeichnet sind, können je nach der Vorbereitung und dem geistigen Stande einer neu eingetretenen Schulklasse erweitert oder beschränkt, unter vorzüglich günstigen, freilich jetzt noch äußerst seltenen Verhältnissen sogar übergangen werden. Dieß muß dem einsichtigen, taktvollen Ermessen des Lehrers überlassen bleiben; es kann die Lehrmanier sich in der besondern Form dieser Uebungen ganz frei bewegen, doch sind dieselben nicht zu weit und nicht für zu lange Zeit auszuspinnen.

Das wiederholte Setzen und Anordnen der gleichen Dinge hat darum seine besondere Wichtigkeit, weil man später dem Schüler die Zahlveranschaulichung ebenfalls in Gruppirungen entweder nach einer oder zwei oder nach drei Dimensionen vorführt. Diese Vorbereitungsübungen sind daher für diejenigen Schüler ganz unerläßlich, die von Haus aus in dieser Richtung zu wenig Anregung erhalten haben.

Die Künste der sogenannten Kleinkinderschulen im fertigen Sprechen von Zahlnamen ändern da an der Hauptsache nichts. Manche sehr geschickte und erfahrene Lehrer bestätigen, daß sie es meist weiter mit denjenigen Kindern bringen, die nicht in der Kleinkinderschule waren. Es ist ganz begreiflich, daß eine bloße Namendressur den Kindern diejenige Frische nimmt, mit welcher naturgemäß angeregte Kinder beim eigentlichen Schulunterrichte so herrliche Fortschritte machen. — Besser wäre, die Kleinkinderschulen würden sich statt mit den oben berührten Leistungen einfach mit den, den Rechnungsunterricht vorbereitenden Thätigkeiten des Aufsuchens, Aus-

scheidens, wiederholten Setzens, Anordnens ꝛc. gleicher Dinge, und zwar in noch einfacherem Sinne als hier angedeutet wurde, befassen.

§ 22.

Bestimmte Auffassung der Einheit gegenüber der Vielheit: Bildung der Zahlen zwei und drei.

Unmittelbar mit dem Vorigen wird sich die bestimmte Auffassung der Einheit gegenüber der Vielheit (Mehrheit, Gesammtheit) verbinden. Es handelt sich darum, dem Schüler den Gegensatz zwischen dem Einzelnding und einer Mehrheit solcher Dinge so lebendig vorzuführen, daß es ihn selbst drängt, genauere Bekanntschaft mit der Mehrheit zu machen, so daß er jene mit dieser vergleicht und hiedurch die Zahlen bildet, d. h. zählt.

Die Uebungen gestalten sich nun folgendermaßen:

a. Das einzelne Ding wird einer Mehrheit solcher Dinge gegenübergestellt. Zweck: Bestimmtes Bewußtsein des Gegensatzes zwischen Einheit und Mehrheit.

b. Die Mehrheit wird spezialisirt und stufenweise (bei der Zweizahl beginnend) mit der Einheit verglichen. Zweck: Bildung der Zahlen zwei, drei u. s. w.

Uebungen zu a.

Der Lehrer wird hier das im vorigen Paragraphen angeführte Veranschaulichungsmaterial ebenfalls mitbenutzen. Die Uebungen können folgendermaßen angestellt werden, z. B. so:

Gib mir viele Hölzchen in die Hand!

Nimm du eines!

Wie manches hast du? — Und ich?

Nimm eines von meinen und leg es auf den Tisch! — Noch eines! u. s. f.

Lege zu meinen Hölzchen noch eines! — Und wieder eines! u. s. f.

Nimm einige davon! — Nimm alle!

Hier hast du Kugeln. Gib davon den andern Schülern jedem eine, bis dir auch nur noch eine bleibt!

Wo sind jetzt alle deine Kugeln? Wie viele davon hat jeder dieser Schüler? u. s. f.

Oder so:

Strecke du alle Finger auf!
Du (ein anderer Schüler) nur einen Finger!
Welcher hält mehr Finger auf?
Wie viele der erste? (Antwort: alle.) Und der zweite?
Alle Finger der rechten Hand auf!
Einen davon herunter! Noch einen! (u. s. f. bis auf einen.)
Wie mancher bleibt noch?
Da sind Federn. Lege bei Seite an eine Reihe: eine Feder — eine Feder — eine Feder — u. s. f. bis du aus bist.

Oder auf irgend eine andere passende Weise.

Es ist gar nicht gesagt, daß diese Uebungen wörtlich genau so angestellt werden müssen; es wäre dieß auch nicht möglich. Jeder Lehrer wird z. B. mit seinen neu eintretenden Schülern zuerst im gewohnten Dialekte sprechen müssen, bis sie ihn später in richtiger Schriftsprache verstehen können. Zudem ist das Feld der Lehrmanier, so weit sie sich innerhalb der Grundsätze der Methode bewegt und den allgemeinen Grundsätzen des Unterrichts entspricht, ein freies, auf welchem die Individualität des Lehrers nicht gefesselt, sondern nur den rechten Spielraum zu ihrer glücklichen Entfaltung erhalten soll. (Dieß Alles ebenfalls unter der Voraussetzung, daß der Lehrer seiner Aufgabe wirklich gewachsen sei.) Jene Uebungen sind also nur Beispiele aus dem unerschöpflichen und unendlich mannigfaltigen Gebiete des speziellen Lehrverfahrens, welche Beispiele auf etwas konkretere Weise den Sinn andeuten sollen, nach welchem den entwickelten Grundsätzen gemäß gearbeitet werden muß. Wir wollen diese Bemerkung für alle derartigen Uebungen ausdrücklich gemacht haben! —

Uebungen zu b.

Nachdem die Kinder den Gegensatz zwischen der Einheit und Mehrheit lebendig erfaßt haben, ist nun ihre Aufgabe, die Mehrheit immer genauer unterscheiden und kennen zu lernen. Die Mehrheiten werden ihnen stufenweise, indem man mit der Zweizahl beginnt, zur Unterscheidung und Auffassung vorgeführt. Diese Vorführung geschieht nach zwei Richtungen. Wir setzen einestheils zur Einheit immer eine solche mehr hinzu und trennen anderntheils von einer vorgelegten Mehrheit immer eine bekannte Anzahl oder Vielheit ab; es sind dieß schon die geistigen Grundbewegungen, welche die Operationen im Keime in sich schließen.

1. Zunächst werden Mehrheiten vorgeführt, die aus einem Dinge und einem gleichen bestehen, z. B. auf folgende Weise:

Hier hast du eine Kugel und da noch eine, du hast eine und eine. Gib eine dem Karl! — Wie viele hast du nun noch? — Gib ihm diese Kugel auch noch! Wie viele Kugeln hat jetzt Karl? (Antwort: eine und eine *.) Da ist ein Würfel und da noch einer; die machen zusammen ein schönes, ganzes Stück aus. Wie viele Würfel hat das ganze Stück? Ich gebe dem Heinrich diese Bleistifte (zwei); einen davon muß er aber dem Friedrich geben. Wie manchen Bleistift hat jetzt Heinrich? — Und Friedrich? Wie manchen Bleistift hatte Heinrich zuerst? — Jakob, halte du einen Finger auf, du Heinrich einen und noch einen, du Emil alle! Wer hält am meisten Finger auf? — Wer am wenigsten? — Wie viele Heinrich? — Wie viele Jakob? — Und Emil? (alle, viele ꝛc.) Da hast du viele Bohnen, eine ganze Handvoll; gib jedem von diesen Kindern eine und dann noch eine. Wer hat noch am meisten? — Welche haben gleich viele? — Wie viele? — Und wie viele hast du noch? — Eine Hand auf! — Noch eine! — Wie viele? — Ja, eine Hand und eine Hand sind zwei Hände. Eins und eins ist zwei, u. s. f. —

Die Schüler suchen nun verschiedene Beispiele auf, wo sie die Zweizahl (das Paar) finden; z. B. Der Mensch hat zwei Augen, zwei Ohren, zwei Wangen, zwei Füße ꝛc. Daneben werden ebenfalls Beispiele für die Einzahl angegeben. Das Ganze wird so lange anschaulich geübt, bis die Kinder die Zahl zwei richtig aufgefaßt haben und sicher unterscheiden können. — In gar zu vielerlei muß sich aber der Lehrer im ersten Gange der Entwicklung nicht einlassen; das stört und zerrüttet mehr, als daß es befestigt. Das ist eben ein Fehler jener „elementarischen Allseitigkeit", daß durch dieselbe auf einmal das Kind überladen und fast erdrückt wird. —

2. Nun werden den Schülern in gleicher Weise Mehrheiten vorge-

---

* Wenn die Kinder antworten: beide, oder alle, oder zwei ꝛc., so ist's auch recht; der Lehrer kann dann gerade in der Folge daran anknüpfen und bemerken: ja ein Ding und ein Ding sind eben zwei Dinge, eins und eins nennt man zwei.

führt, die aus drei gleichen Dingen bestehen. Dem Schüler muß hier zum Bewußtsein kommen, daß die Gesammtheit drei identisch ist mit einem und einem und einem, oder mit zwei und einem.

Die Uebungen zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse gestalten sich ähnlich wie früher; z. B.

Hier ist ein Würfel; daran lege ich noch einen Würfel und jetzt noch einen*; die machen zusammen ein ganzes Stück.

Wie manchen einzelnen Würfel hat dasselbe? (Einen und einen und einen. Wenn noch anders geantwortet wird, macht es nichts. Was Richtiges geantwortet wird, soll der Lehrer nicht verwerfen, wenn es auch nicht gerade in der erwünschten Form gegeben wird.)

Ich nehme einen Würfel weg. Wie viele bleiben noch?

Das ganze Stück hat einen Würfel und noch wie viele?

Ich nehme einen und noch einen Würfel weg; wie viele bleiben jetzt? —

Wie viele habe ich weggenommen?

Das ganze Stück hat zwei Würfel und noch wie manchen? —

Ja, ein und ein und ein Würfel, sind auch zwei und ein Würfel.

U. s. f. an manchen Beispielen. Dann:

Ein und ein und ein, oder zwei und ein Dinge nennt man auch drei Dinge.

Ferner:

Gib mir eine Kugel, zwei Kugeln, drei Kugeln! —

Eine Feder und noch zwei! — Wie viele sind das?

Zwei Bohnen und eine Bohne — wie viele?**

Halte du beide Hände auf. Der Nächste auch eine!

Wie viele Hände sind das zusammen?

Wie viele Schüler sind das: Karl, Viktor, Emil?

Wie könnten die zusammen drei Hände aufhalten?

Wie können zwei Schüler zusammen drei Hände aufhalten?

Wie viele Schieferstifte habe ich hier? (drei.) — Wie viele Bleistifte? (Zwei.) —

---

* Dieselben kann der Lehrer der Würfelzählrahme oder dem zerlegbaren künstlichen Kubikfuße, siehe Seite 103, entnehmen, damit sie sich zu schönen Ganzen zusammenfügen lassen.

** Natürlich werden die zu zählenden Dinge hier immer wirklich vorgewiesen.

Wie viele Federn? (Eine.) —
U. s. f., wie der Lehrer es gut findet.

Nun haben die Schüler verschiedene Beispiele aufzusuchen, wo sie die Dreizahl finden. Z. B.: Ich habe drei Griffel. Mein Bruder hat drei Bücher. Der Nachbar hat drei Kinder. Wenn wir Abends heimgehen, schlägt es drei. Ein Kleeblatt hat gewöhnlich drei Blättchen. Diese Gabel hat drei Zinken. Unser Tisch hat drei Füße. Der Daumen hat zwei Gelenke, die übrigen Finger haben drei. u. s. f.

Da die Dreizahl sich in Theilen eines und desselben Gegenstandes etwas seltener findet, so läßt man die Schüler mehr Beispiele, wie die erstern der obigen sind, aufsuchen. Dann kommen Uebungen folgender Art:

Ich gebe dir hier eine Kugel und jetzt noch eine. — Wie viele hast du nun? — Welche habe ich dir zuerst gegeben? — Das war die erste. Welche hast du dann bekommen? — Das war die zweite. — Und nun hast du hier noch eine; also wie viele zusammen? Welche hast du zuletzt bekommen? — Die wievielte? — Die dritte.

Diesem Schüler gebe ich einen Würfel, dem nächsten einen und einen und dem folgenden einen und dann noch zwei. — Wie viele Würfel hat der erste — der zweite — der dritte Schüler? Welcher hat am meisten Würfel? — Und welcher am wenigsten? — Welcher hat die mittlere Anzahl, oder mehr als der eine und weniger als der andere? u. s. f.

Durch die obigen Uebungen wäre somit der erste Gang in der Zahlauffassung der Grundbedeutung nach bezeichnet. Das Ergebniß muß sich hier darin zeigen, daß die Schüler in diesem kleinen Zahlumfange nun eben so leicht als sicher unterscheiden und dadurch so angeregt worden sind, daß sie mit derselben Leichtigkeit und Sicherheit die folgenden Zahlen zu bilden und scharf aufzufassen im Stande sind. — Nur kein bloßes Vorsprechen und Nachsprechen der Zahlnamen, wie z. B.: Sprecht nach: Eins, zwei, drei, vier, fünf u. s. f. Was hab' ich zuerst gesprochen? Was dann? Und dann? — Was folgt auf eins — was auf zwei — was auf drei — ? u. s. f. So machte es die alte Schule, die zuerst die Zahlnamen und dann auch die hierauf folgenden Zahlverbindungen, das sogenannte Eins und Eins, das Eins von Eins, das Ein mal Eins, das Eins in Eins ꝛc. bloß auswendig lernen ließ. Leider ist dieser „phonetische" Rechnungsunterricht, so wie davon insbesondere das Zahlnamen-

erlernen (von den Meistern dieser Kunst mit Unrecht zählen genannt) noch nicht ganz abhanden gekommen.

Es kann wohl der eine oder andere Lehrer die letztern obigen Uebungen, die sich auf das Verständniß und die bestimmte Unterscheidung der Ordinalien ꝛc. beziehen, bis nach den folgenden Uebungen versparen. Diese kleine Abweichung im Lehrverfahren kann ganz am Platze sein; die Methode bleibt doch dieselbe.

Ebenso könnte nun, in ähnlicher Weise wie oben, zur Auffassung der nächsten Zahl u. s. f. übergegangen werden, besonders in Schulen, wo sich der Lehrer viel oder gar fortwährend mit einer Klasse beschäftigen kann, weil er nicht deren mehrere zu leiten hat. In Schulen mit mehrern oder gar manchen Klassen ist es aber nöthig, den Kindern immer einen passenden Stoff zur stillen Selbstbeschäftigung geben zu können und in dieser Absicht lassen wir nun gleich einige Uebungen folgen, welche die Schüler auf ihren Schiefertafeln ausführen können.

§ 23.

Darstellung der Zahlenmenge durch Zeichen; zunächst für eins, zwei, drei.

Die Kinder stellen gerne auf ihren Schiefertafeln irgend etwas in Zeichen dar. Sie können nun zweckmäßig die Menge der Einheiten einer jeden Zahl, die sie aufgefaßt haben, durch Zeichen darstellen. Sie zeichnen z. B. ein Tüpfchen oder einen Punkt (natürlich von jeder geometrischen Bedeutung abgesehen), dann zwei Punkte, dann drei Punkte, dann dieselben in Reihen ꝛc.; hierauf ein, zwei, drei Striche, Kreuzchen, Ringchen ꝛc. Dann dieselben in verschiedenen Gruppen und Reihen. Der Lehrer wird natürlich zuerst das Nöthige vormachen.

Spezielle Uebungen.

Macht auf euere Tafeln einen Punkt, daneben dann zwei Punkte, und wieder daneben noch drei Punkte.

Unter den Punkt wieder einen und dann noch einen und noch einen u. s. f.!

Unter die zwei Punkte wieder zwei, dann noch zwei und noch zwei u. s. f.!

Unter die drei Punkte wieder drei, dann noch drei und wieder drei u. s. f.!

Die Schüler machen es etwa in der Weise:

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . . u. s. f.

oder mit Strichen: | | | | | | | | |
| | | | | | | | | u. s. f.

oder mit Kreuzchen: † † † † † † † † † u. s. f.

mit Ringchen: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 u. s. f.

Böglein, Halbmöndchen:))))))))) u. s. f.

Macht viele Punkte in eine Reihe, dann allemal nach einem Punkt einen Strich!

Wieder so, dann allemal nach zwei Punkten einen Strich!

Wieder so, dann je nach drei Punkten einen Strich! u. s. f.

Wieder so mit Strichen, dann je nach einem Strich einen Punkt; dann allemal nach zweien, dann nach dreien ꝛc.

So mit Ringchen, dann je nach ein, zwei, drei einen Strich! Und so beliebig; z. B.

· | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |

· · | · · | · · | · · | · · | · · | · · |

· · · | · · · | · · · | · · · | · · · | · · · |

| | · | | · | | · | | · | | · | | · | | · u. s. f.

0 0 0 | 0 0 0 | 0 0 0 | 0 0 0 | 0 0 0 | u. s. f.

Dann auch Uebungen folgender Art:

— | 0 0 — 0 0 0
— | | 0 — — 0 0
— | | | — — — 0

Wer schon vorher zur Auffassung der nächsten Zahlen vier, fünf ꝛc. übergegangen ist, wird dieselben obigen Uebungen auch auf diese Zahlen ausdehnen. Es sind diese Uebungen als Selbstbeschäftigung für die Schüler nicht bloß in der Richtung des Anordnens, Eintheilens und Gruppirens bildend, sie befestigen nicht bloß die bereits erworbenen Zahlen, sondern sie lassen dieselben auch noch reiner auffassen. Wenn der Schüler die Zahlen nur nach einer Art der Gruppirung auffassen würde, so wäre diese Auffassung noch sehr einseitig, eben weil sie immer noch von jener bestimmten Form der Gruppirung abhängig wäre; er muß also die Zahlen nach den mannigfaltigsten Verbindungen der Einheit auffassen, so wird er sich

dieselben zuletzt rein und unabhängig von der äußern Gruppirung erwerben. Diesen Gang schlägt gerade auch die Natur ein, indem sie dem Menschen die Zahlmenge in unendlich mannigfaltigen Formen und Gruppirungen vorführt.

Die obigen Uebungen lassen sich natürlich in Hinsicht auf Gestalt und Anordnung des Zählbaren beliebig erweitern oder beschränken. Der taktvolle Lehrer, der den Stand seiner Schüler und die besondern Verhältnisse seiner Schule im Auge hat, wird hier leicht das Zweckmäßige treffen. Wir machen nur noch darauf aufmerksam, daß sich die Ausführung der genannten Uebungen ja nicht in eine bloße Spielerei und Tändelei verlieren möge, zu der sie durch zu weite Ausspinnung der Sache und Hintansetzung des eigentlichen Zweckes etwa ausarten könnte. —

§ 24.

Bildung der Zahlen vier, fünf, sechs.

Der Gang der Entwicklung ist hier ganz derselbe wie bei den frühern Zahlen. Es werden zunächst Mehrheiten vorgeführt, die aus vier gleichen Dingen bestehen und der Schüler soll hiebei erkennen, daß diese Gesammtheit identisch ist mit einem und einem und einem und einem, oder mit drei und einem. Diese neue Mehrheit lernt er mit dem Namen vier benennen. — Hierauf Uebungen. —

So die Bildung und dann die Benennung der Zahl fünf. — Hierauf Uebungen. —

So die Bildung und dann die Benennung der Zahl sechs. — Hierauf Uebungen. —

a. Uebungen zur Auffassung der Zahl vier, mit Benutzung des frühern Anschauungsmaterials.

z. B. Hier habe ich Würfel in einer Reihe; zähle wie manchen! — Einen, noch einen, noch einen und noch einen . . . . drei und einen.

Nimm von der ganzen Reihe einen Würfel weg; wie viele bleiben dann noch? — Ein und ein und ein Würfel oder drei Würfel.

Nimm von der ganzen Reihe drei Würfel weg; wie viele bleiben jetzt? —

Die ganze Reihe enthält also drei Würfel und noch wie manchen? — Ja, ein und ein und ein Würfel sind auch drei und ein Würfel. U. s. f. an manchen Beispielen. Dann:

Ein und ein und ein und ein, oder drei und ein . . Dinge nennt man auch vier Dinge.

Ferner:

Zähle mir vor vier Kugeln — vier Bohnen — vier Hölzchen — vier Federn — vier Steinchen ꝛc.

Gib mir schnell vier Bleistifte, vier Griffel ꝛc. . .

Gib mir drei Bohnen, jetzt noch eine! Wie viele habe ich jetzt?

Gib mir zwei Bohnen — noch eine — noch eine! Wie viele jetzt?

Wie viele Federn halte ich in der Hand? (drei) — Ich nehme noch eine dazu; wie viele sind jetzt?

Haltet vier Finger der rechten Hand auf! — Vier Finger der linken! —

Drei Finger der rechten — einen Finger der linken! Wie viele? Und so viele derartige Fragen und Uebungen.

Hierauf haben die Schüler verschiedenartige Beispiele für die Zahl vier aus dem Kreise ihrer Beobachtungen anzugeben. Z. B. Das Pferd hat vier Füße; ebenso die Kuh, das Schaf, der Hund u. s. f. Die Kutsche hat vier Räder. An diesem Tische sind vier Füße. In diesem Zimmer hat es vier Fenster. Die Tafel hat vier Ecken. Diese Fensterscheibe hat vier Ecken.

b. Uebungen zur Auffassung der Zahl fünf, dann der Zahl sechs.

Die Vorführung von fünf, sechs Dingen, die zusammen ein stetiges Ganzes ausmachen, geschieht sehr zweckmäßig wieder durch Würfel. Es ist aber eben so nothwendig, daß die Einheiten der Zahl nicht bloß im Kontinuum, sondern auch in beliebiger Unterbrechung und Trennung, so wie in der mannigfaltigsten Zusammenbeziehung aufgefaßt werden, damit sich die Zahlbegriffe nicht einseitig, sondern möglichst rein und frei gestalten.

Z. B. mit Würfeln:

Hier sind Würfel an eine Reihe gelegt; siehe nach, wie mancher. — Ein — ein — ein — ein — ein Würfel.

Lasse den letzten weg; wie viele sind dann noch? —

Nimm alle ohne den ersten; wie manchen hast du dann?

Im Ganzen sind vier Würfel und noch wie mancher?

U. s. f. mit Kugeln, Hölzchen ꝛc.

Dann eins und eins und eins und eins und eins (unter Vorweisung des Gezählten) sind vier und eins oder sind fünf.

Ebenso mit sechs.

Nun verschiedenartige Uebungen:

Z. B. so:

Zähle mir vor: fünf Federn, fünf Bleistifte, fünf Blätter ꝛc.

Gib mir schnell fünf Erbsen, fünf Kugeln, fünf Würfel! . .

Zähle die Finger an der rechten Hand, an der linken! — Wie viele Finger sind an jeder Hand? —

Vier Finger der linken Hand auf! Einen Finger der rechten! — Wie viele Finger sind das?

Drei Finger der rechten Hand auf! — Noch einen Finger der linken! Und noch einen! — Wie viele? ꝛc.

Suchet verschiedene Beispiele auf für die Zahl fünf!

Z. B. In dieser Bank sitzen fünf Kinder. Heinrich hat fünf Geschwister. In einer Stunde nach 4 Uhr schlägt es fünf. Der Mensch hat an einem Fuße fünf Zehen u. s. f.

Zähle mir Kugeln bis auf sechs, Hölzchen bis auf sechs, Würfel bis auf sechs.

U. s. f. viele ähnliche oder andere Beispiele wie bei fünf.

Dann zur Unterscheidung der Ordnung, des Ranges oder der Stelle in einer Reihe.

Z. B. so:

Die Knaben in der ersten Bank kommen hieher an eine Reihe! Zuerst Emil, dann Heinrich, dann Karl, dann Viktor, dann Robert und dann Jakob!

Wie viele Knaben sind im Ganzen? — Welches ist der erste — der zweite — der dritte? Wie viele sind von Emil bis und mit Viktor? — Der wievielte ist Viktor? Wie viele sind bis und mit Robert? — Der wievielte ist er also? — Der wievielte ist Jakob? — Welches ist der dritte — der sechste — der fünfte? u. s. f.

Oder so:

Dort sind sechs Würfel an einer Reihe (z. B. an der Zählrahme). Welches ist der zweite? — Zeige den fünften! Der wievielte ist der letzte? —

Wie viele Würfel gehen dem dritten voraus? —

Wie viele gehen dem sechsten voraus? — Wie viele dem fünften?

Wenn bei einer Reihe von Knaben der letzte der fünfte ist, wie viele sind dann?

Wenn ich davon drei gezählt habe, der wievielte kommt dann? u. s. f.

Welches ist der erste Schultag in der Woche? Der zweite — dritte vierte — fünfte — sechste?

Der wievielte Schultag ist der Mittwoch — der Freitag — der Samstag?

Der wievielte Schüler bist du in der Bank? Und da dein Nachbar? Oder in beliebigen andern passenden Beispielen.

§ 25.

Darstellung der Zahlmenge von vier, fünf, sechs in Zeichen, mit Einflechtung der frühern hierauf bezüglichen Uebungen.

Der Gang ist derselbe wie in § 23.

Z. B.: Zeichnet auf euern Tafeln vier Punkte in eine Reihe, dann ebenso vier Striche, dann vier Ringe ꝛc.

Dann unter je vier wieder vier, dann wieder vier u. s. f.

Nun fünf Punkte in eine Reihe, dann fünf Striche, fünf Ringe ꝛc.

Nun sechs Punkte, dann sechs Striche, sechs Ringchen ꝛc.

Zeichnet einen Punkt, darauf zwei, dann drei u. s. w. bis sechs.

Ebenso mit Strichen, Ringchen ꝛc., z. B.:

·	|	0
· ·	||	0 0
· · ·	|||	0 0 0
· · · ·	||||	0 0 0 0
· · · · ·	|||||	0 0 0 0 0
· · · · · ·	||||||	0 0 0 0 0 0

Nach welchen verschiedenen Seiten kann man hier stets einen, zwei, drei, vier, fünf, sechs Punkte oder Striche oder Ringe zählen?

Macht viele Punkte in eine Reihe, dann allemal nach vier Punkten einen Strich!

Wieder so, dann allemal nach fünf — sechs Punkten einen Strich!

Macht viele Striche in eine Reihe, dann allemal nach vier — fünf — sechs Strichen einen Punkt

Viele Ringchen in eine Reihe, dann je nach vier — fünf — sechs einen Strich! (wie z. B. auf Seite 125).

Nun folgt die Darstellung der Zahlmengen von vier, fünf, sechs in verschiedenen Gruppenformen, damit der Schüler sich diese Zahlen nach

und nach möglichst unabhängig von der äußern Form erwerbe. Die Uebungen dürfen jedoch nicht in leeres Spiel ausarten und nicht zu viel Zeit wegnehmen.

Beispiele: Zeichnet je vier Punkte in ganz verschiedenen Gruppen (Häufchen), z. B. u. s. f.

So etwa mit Strichen, Ringchen.

Nun mit fünf, z. B. Ringe: u. s. f.

Mit sechs, z. B. Striche: u. s. f.

Wo man mit der Zeit nicht zu kurz kommt, wie z. B. da, wo der Lehrer nur eine Klasse zu unterrichten hat, können zweckmäßige Fragen übers Zählen an diese Gruppenformen angeknüpft werden.

§ 26.

Die ersten Uebungen im inversen Zählen, Wegzählen von Einheiten.

Es wäre nicht unnatürlich und ließe sich wohl rechtfertigen, wenn der Lehrer den Gang der Zahlbildung durchs Einheitenzählen nun gleich weiter fortsetzen und auf ganz ähnlichem Wege, wie bis jetzt, etwa bis zur Zahl zehn oder elf vorrücken würde. Indessen macht sich das geistige Bedürfniß der Vereinigung des direkten mit dem inversen Zählen (siehe die dießfälligen Betrachtungen in § 9, I) schon jetzt geltend und das letztere wird nun ganz passend auf den bis jetzt durchlaufenen Zahlenraum angewendet.

Dagegen wäre wohl beim ersten Gange der Zahlbildung dem Kinde zu viel zugemuthet, wenn es mit dem schrittweisen (Einheiten=) Zählen schon das sprungweise (Zahlen=) Zählen verbinden, d. h. wenn es die zu bildenden Zahlen schon als Inbegriffe von Zahlen statt bloß von Einheiten auffassen sollte. Es genügt vollkommen und ist ganz natürlich, daß der Schüler zunächst die Zahl bloß als Vereinigung von Einheiten auffaßt und daß ihm das als Eigenschaftsmerkmal jeder nächst höhern Zahl gilt,

daß sie eins mehr ist als die vorige. Wollte man z. B. zur ersten Auffassung der Zahl fünf nicht nur das als Begriffsmerkmal entwickeln, daß sie eins und eins und eins und eins und eins oder vier und eins ist, sondern daß sie zugleich noch identisch ist mit zwei mehr drei, mit eins mehr drei mehr eins, mit zwei mehr zwei mehr eins ꝛc., so wäre dieß auf ein Mal eine Ueberladung für den Schüler, die ihm nicht gut bekommen würde. Mit den beiden ersten Merkmalen faßt er die Zahl ganz leicht und doch scharf als das auf, was sie ist, und lernt dann durch die spätere Zahlentwicklung die übrigen Eigenschaften der Zahl ganz naturgemäß erkennen.

Uebungen zum Wegzählen von Einheiten.

Z. B. so: Hier zähle ich euch Würfel vor: Ein Würfel und ein Würfel, wie viele?

Ich nehme davon wieder einen weg; wie viele bleiben dann noch? — Von zwei Würfeln ein Würfel weg — bleibt wie mancher? Davon noch ein Würfel weg, bleibt — kein Würfel, null Würfel. So von zwei Kugeln eine Kugel weg; bleibt wie manche? Von zwei Hölzchen eines weg — oder zwei Hölzchen weniger eins — bleibt eins u. s. f. an beliebigen passenden Beispielen.

Oder so: Hier in der rechten Hand habe ich zwei Hölzchen, in der linken eines. In welcher Hand habe ich mehr — in welcher weniger? Wie manches habe ich in der linken weniger? Eins weniger als zwei, oder zwei weniger eins sind wie viele? u. s. f.

Auf ähnliche Weise:

drei davon eins gibt zwei, oder drei weniger eins ist zwei,
vier davon eins gibt drei, oder ähnlich wie oben,
fünf davon eins gibt vier, oder ähnlich wie oben,
sechs davon eins gibt fünf, oder ähnlich wie oben.

Dieß Alles unter mannigfaltigen Veranschaulichungen und Uebungen.

§ 27.

Das erste sprungweise Zählen

(innerhalb des Zahlenraumes von eins bis etwa sechs).

So leicht diese Zählform demjenigen auch vorkommt, der sie einmal erworben hat, und so enge sich dieselbe auch an die Zahlauffassung anschließen läßt, so geht doch dem jungen Schüler diese neue Denkweise nicht so schnell und mit so wenig Mühe von statten, als es Manchem vorkommen mag. Der Schüler faßt die Zusammensetzungen nur leicht und sicher auf,

wenn der Gang ein allmäliger ist; daher würden wir hier innerhalb des erfaßten Zahlenraumes zunächst bloß zwei (allenfalls dann noch drei, aber nicht mehr) zu- oder wegzählen; das Weitere kommt in der Folge ja doch, und zwar nur um so leichter.

Spezielle Uebungen.

Z. B.: In dieser Hand halte ich ein Hölzchen, in der andern zwei; wie viele habe ich im Ganzen? — Also eins und zwei sind wie viele?

Hier sind drei Würfel beisammen. Ich schiebe einen zur Seite; wie viele bleiben dann noch bei einander? — Also einer und zwei machen zusammen wie viele?

Gib mir zwei Kugeln und noch zwei! Wie viele habe ich jetzt?

Von vier Kugeln nehme ich zwei weg; wie viele bleiben noch? u. s. f.

Also zwei und zwei machen wie viel?

Und vier weniger zwei wie viel?

Diesem Schüler gebe ich zwei Federn und dem fünf Federn. Welcher hat mehr? — Wie viele hat der mehr als jener? — Wie viel machen also drei mehr zwei?

Wie viele Federn hat jener Schüler weniger als dieser? — Wie viel machen also fünf weniger zwei? u. s. f.

Diese Zählweise wird auf solche oder ähnliche Art fortgesetzt bis auf sechs; zunächst immer, indem man zu einer Zahl zwei mehr hinzuzählt und dann auch von der letztern wieder zwei wegzählt. Das Wegzählen könnte eben so wohl auch erst folgen, wenn der Gang des Zuzählens bis zu sechs vollendet ist. Das sind kleinere Variationen, die bald so, bald anders sich am passendsten im Unterrichtsgange ergeben. So sind also folgende Zählübungen zu entwickeln und zu befestigen:

Eins mehr zwei sind drei.	Drei weniger zwei macht eins.
Zwei mehr zwei sind vier.	Vier weniger zwei sind zwei.
Drei mehr zwei sind fünf.	Fünf weniger zwei sind drei.
Vier mehr zwei sind sechs.	Sechs weniger zwei sind vier.

Und, sollte noch zu drei übergegangen werden, in ähnlicher Weise:

Eins mehr drei sind vier.	Vier weniger drei sind eins.
Zwei mehr drei sind fünf.	Fünf weniger drei sind zwei.
Drei mehr drei sind sechs.	Sechs weniger drei sind drei.

Zwei weniger zwei sind Nichts oder Null.

Drei weniger drei sind Nichts — Null.

§ 28.

Erweiterung des Zahlenraumes bis zehn oder elf. *

Die Sprengung des Zahlenraumes nach oben geschieht stets durch die Addition (Zuzählen). Die vorliegende Erweiterung wird ganz durch ähnliche Mittel bewirkt wie früher. Der Lehrer, welcher finden sollte, daß er zweckmäßiger verfahren könnte, wenn er schon vor dem sprungweisen Zählen die Zahlbildung bis zehn erledige, mag es thun; er wird aber immerhin Grund genug haben, nicht zu schnell fortzuschreiten, und er wird besonders dann beim sprungweisen Zählen so lange bei den einfachern Fällen verweilen, bis da völlige Sicherheit erlangt ist.

Uebungen zur Bildung der Zahlen sieben, acht ꝛc.

Z. B.: Hier sind Würfel (sieben). Zähle alle bis auf einen. Wie viele? — Sechs und noch einer.

Haltet eben so viele Finger auf! — Fünf Finger der einen und noch ein Finger der andern Hand sind — sechs Finger, und noch ein Finger sind — sechs und ein oder sieben Finger u. s. f.

Sechs und eins sind sieben.

Hierauf Bezeichnung durch Punkte, Striche, Ringe ꝛc.

Verbindung dieser Bezeichnung mit derjenigen der frühern Zahlen.

Verschiedene Gruppirungen der Sieben.

Dieses Alles wie in § 23 und § 25.

Hierauf in der nämlichen Weise Bildung der Zahlen acht, neun, zehn, elf, indem jede zunächst bloß als eins mehr als die vorhergehende aufgefaßt wird. Der Fortschritt wird hier schon etwas rascher sein können als bei der Bildung der ersten Zahlen; auch kann hier der Gebrauch der Zählrahme schon etwas bevorzugt werden. Endlich sind, ganz ähnlich wie früher, die den neu gebildeten Zahlen entsprechenden Ordinalien einzuführen und zu üben. Für die Folge ist dann aber diese Ausführlichkeit nicht mehr nöthig, da das entsprechende Bildungsgesetz den Kindern sich bald einprägt; statt lückenlosen Fortschrittes genügen dann einzelne Beispiele und Fragen.

---

* Es hat natürlich nie die Meinung, daß das, was in einem Paragraphen zusammengefaßt ist, auch nur eine Uebung bilde. Der Lehrer muß Uebung und Lehrgang selbst bilden; diese werden sich je nach den Verhältnissen einer Schule eigenthümlich gestalten, und es wird dieß stets dem subjektiven Lehrverfahren anheimfallen müssen.

Fragen und Aufgaben über die Zahlen sieben, acht ꝛc. in Verbindung mit den frühern Zahlen.

Z. B.: Zählet alle Tage in einer Woche. Wie viele?

Welchen Tag muß man auslassen, wenn man nur alle Werktage zählen will. Wie viele Werktage sind gewöhnlich in einer Woche?

Der Sonntag ist der erste Wochentag; der wievielte ist der Samstag — der Donnerstag? ꝛc.

Wie viele Schüler sitzen in dieser Bank?

Der wievielte Schüler bist du auf der Bank? — Welches ist der achte?

Wie viel schlägt es an der Uhr, wenn am Morgen die Schule angeht?

Und sie ist aus, wenn es wie viel schlägt?

Wie viele Ecken hat es an einem Würfel?

Wie viele Finger hast du an beiden Händen zusammen?

Halte alle Finger auf bis auf einen; wie viele sind jetzt?

Zeichne mir auf der Tafel in einer Reihe zehn Punkte — zehn Striche — zehn Ringchen ꝛc.

Zeichnet auf eure Tafeln:

acht Punkte in einer Reihe, dann in verschiedenen Gruppen (Häufchen),

acht Striche " " " " " " " "

acht Ringchen " " " " " " " "

neun Punkte, Striche, Ringchen ꝛc.

zehn " " "

Hierauf Uebungen in Verbindung mit den frühern Zahlen, ähnlich wie in den §§ 23 und 25.

§ 29.

Fertiges Zu- und Wegzählen bis zehn oder elf; schrittweise und sprungweise.

Folgende Zählungen sind anschaulich zu entwickeln und zu üben:

Sechs mehr eins sind sieben.	Sechs weniger eins sind fünf.
Sieben mehr eins ꝛc.	Sieben weniger eins ꝛc.
Acht " "	Acht " "
Neun " "	Neun " "
Zehn " "	Zehn " "

Dann:

Fünf mehr zwei sind sieben. Sieben weniger zwei sind fünf.
Sechs „ „ „ acht. Acht „ „ ꝛc.
Sieben „ „ ꝛc. Neun „ „
Acht „ „ Zehn „ „

Dann:

Vier mehr drei ꝛc. Sieben weniger drei ꝛc.
Fünf „ „ Acht „ „
Sechs „ „ Neun „ „
Sieben „ „ Zehn „ „

Dann:

Eins mehr vier ꝛc. Vier weniger vier ꝛc.
Zwei „ „ Fünf „ „
Drei „ „ Sechs „ „
Vier „ „ Sieben „ „
Fünf „ „ Acht „ „
Sechs „ „ Neun „ „
Sieben „ „ Zehn „ „

Endlich so mit fünf, sechs, sieben bis neun!

Ausführung:

Z. B.: Hier sind vier Kugeln. Lege dazu noch drei, und zähle nun alle. — Wie viele? — Vier Kugeln und drei Kugeln sind wie viele Kugeln?

Wie viel wären vier und eine? — vier und zwei? — und noch zwei? — Wie viele Kugeln sind also vier und vier Kugeln? — Stelle dieses dar.

Zeige die erste Kugel an dieser Reihe! Die sechste, achte, zehnte ꝛc.

Diese Uebungen werden schon sehr zweckmäßig an der Zählrahme ausgeführt.

Nun dieselben Uebungen auf dem Wege des Zerlegens:

Z. B.: Schiebe an der Zählrahme sieben Würfel (Kugeln) vor!

Trenne vier davon ab! — Wie viele bleiben noch?

Wie viel sind also vier Würfel und drei Würfel?

Wenn man von sieben Würfeln drei nimmt; wie viele bleiben?

Und wenn man von sieben Würfeln vier nimmt?

Wie viel sind also sieben und davon weg (weniger) drei? — und sieben weniger vier? u. s. f.

Oder so durch Vergleichung:

Ich gebe dem ersten Schüler fünf Federn und dem zweiten neun; wie manche Feder muß ich dem ersten noch zuzählen, bis er so viele hat wie der zweite?

Wie viele hat der zweite mehr als der erste? — Wie viele hat der erste weniger als der zweite?

Um wie viel ist also neun mehr (größer) als fünf? — Um wie viel ist fünf weniger (kleiner) als neun? u. s. f.

Wie viel sind drei mehr vier? — sechs mehr vier? — zwei mehr fünf? — sieben mehr drei? — drei mehr sechs? u. s. f.

Wie viel sind sieben weniger vier? — acht weniger vier? — neun weniger drei? — zehn weniger sieben? u. s. f.

Was macht mit drei fünf? — mit vier sieben? — mit fünf acht?

Wie viel muß man zu sechs zählen, bis man neun hat? — zu vier, bis man sieben, neun, zehn, acht ꝛc. hat? u. s. f.

Was gibt zu drei, fünf, sieben, sechs, zwei ꝛc. gezählt zehn? u. s. f.

Der Lehrer wird solche und ähnliche Uebungen so lange fortsetzen, bis sie fest und sicher gehen, und die Schüler mit Bewußtsein und Fertigkeit innerhalb des bezeichneten Zahlenraumes zu- und wegzählen. — Wie es von großer Wichtigkeit ist, daß die Schüler schnell und sicher zu jeder einstelligen Zahl diejenige angeben können, die mit ihr eine höhere einstellige ausmacht; so ist es insbesondere (gewissermaßen als Schlußpunkt dieser Uebungen) nun nothwendig, daß die Schüler mit der größten Sicherheit jede einstellige Zahl zu zehn ergänzen können. Nur dann wird die Auffassung der folgenden Zahlen nach dem Zehnersystem leicht und sicher.

§ 30.

Bildung der Zahlvorstellungen von zehn bis zwanzig oder einundzwanzig.

Da sich die Zahlen von nun an stets auf die Grundzahl zehn beziehen, indem wir zunächst nur dekadische Zahlen zu bilden haben, so hat man hier ein Veranschaulichungsmittel zu wählen, in welchem die Anordnung nach zehn möglichst klar und übersichtlich hervortritt und mit möglichster Leichtigkeit befolgt werden kann. Auf dieses Mittel haben wir schon mehrmals hingewiesen; es ist die Zählrahme. Daneben sind andere Veranschaulichungen durch gleichartige Dinge, Realzeichen . . . nicht nur ganz am Platze, sondern müssen zur festern und reinern Zahlauffassung ebenfalls berücksichtigt werden.

Der Zahlbildungsgang ist zwar im Wesentlichen noch derselbe wie früher; jede nächst neue Zahl entsteht aus der vorhergehenden durch Hinzufügung von eins, aber eine jede wird zudem noch auf zehn selbst bezogen; z. B. zehn und eins = elf, elf und eins = zwölf, zwölf und eins = dreizehn, dreizehn und eins = vierzehn ꝛc., aber auch: vierzehn = zehn und vier, dreizehn = zehn und drei, zwölf = zehn und zwei ꝛc. Während also früher zum Begriff einer jeden Zahl in erster Linie nur gehörte, daß sie eins mehr enthält als die vorhergehende, gehört jetzt außer diesem Merkmal schon zum ersten Begriff einer jeden nächsten Zahl, wie viel sie mehr ist als zehn (die andern Zahleigenschaften ergeben sich, wie früher, aus den speziellen Zählübungen erst nach und nach). — Die Zahlwörter sind, elf und zwölf ausgenommen (wir sehen hier natürlich von der etymologischen Bedeutung von elf und zwölf ab), mit dieser Auffassung ganz in Uebereinstimmung, und der ähnliche Fortgang in Begriff und Wort tritt auch bei jedem neuen Zehner für das Kind so deutlich hervor, daß die Zahlbildung und Zahlbewahrung hiedurch sehr erleichtert wird.

Die spezielle Ausführung gestaltet sich auf ähnliche Weise wie früher:

Z. B.: Zehn Würfel vor! (auf der Zählrahme). — Noch einen Würfel auf der nächsten Reihe! — Wie viele zusammen? (zehn und ein, d. h. elf).

Noch einen Würfel auf dieser Reihe dazu! — Wie viele zusammen? (elf und ein oder zehn und zwei, d. h. zwölf).

Noch einen dazu! — Es sind zwölf und ein oder zehn und drei, d. h. dreizehn, u. s. f.

Obwohl man bei jeder neuen Zahl einen Haltpunkt machen und die Zahlmenge durch andere Dinge und auf andere Weise darstellen kann, so geht die Sache doch hier bedeutend schneller als bei der Bildung der ersten Zahlen. Der Lehrer wird hier die Schüler fleißig üben in der Darstellung der Zahlmenge durch Dinge je gleicher Art.

Z. B.: Zähle mir zwölf, vierzehn, siebzehn, neunzehn Kugeln vor!

Hole mir elf Federn, fünfzehn Griffel! ꝛc.

Schnell an der Zählrahme zwanzig Würfel vor! — Fünfzehn Würfel! — Zwölf Würfel!

Die beiden ersten Knaben halten zusammen zwanzig Finger auf!

Die drei ersten zusammen sechszehn! u. s. f.

Zeichne an die Wandtafel achtzehn Striche! Du vierzehn Punkte! Du fünfzehn Ringchen!

Welches ist der erste Strich? — der zehnte? — der siebzehnte? u. s. f.

Zur stillen Selbstbeschäftigung haben nun die Schüler auf ihren Schiefertafeln, ähnlich wie es in den §§ 23, 25 und 28 verlangt wurde, die Zahlmenge in Punkten, Strichen, Ringchen ꝛc. darzustellen. Die Ordnung des Zehnersystems muß aber auch hier festgehalten werden, geschehe dieses durch Unterbrechung der zehn ersten Zeichen durch ein anderes, oder durch größere Trennung, oder durch den Beginn einer neuen Reihe. Je nach Zeit und Umständen kann hier der Lehrer mannigfaltige und nützliche Abwechslung eintreten lassen.

§ 31.

Zu- und Wegzählen bis zwanzig; schrittweise und sprungweise.

Das schrittweise Zu- und Wegzählen wird in diesem Zahlraume nun bald abgethan sein; das erstere gelangt schon durch die Zahlerweiterung selbst und die damit verbundenen Uebungen zur Geläufigkeit und das zweite ist dadurch dann bald erzielt. Weitere Bemerkungen für den Lehrer sind hier nicht nöthig.

Folgende Uebungen sind nun zunächst an der Hand der Zählrahme durchzumachen und dann allgemeiner zu befestigen. Zuerst kommt zur Vervollständigung der früheren Uebungen die Verbindung von je zwei Zahlen *unter* zehn, die zusammen *mehr* als zehn ausmachen; denn beim vorausgegangenen sprungweisen Zählen (siehe z. B. die Uebungen in § 29) wurden bloß solche Paare von Grundzahlen gewählt, deren Summe nicht über zehn (oder elf) ging.

Es folgen Uebungen wie:

a. Neun mehr zwei sind ꝛc., neun mehr drei sind ꝛc., neun mehr vier . . ., neun mehr fünf . . . bis neun mehr neun.
Acht mehr drei, acht mehr vier, acht mehr fünf . . . bis acht mehr neun.
Sieben mehr vier, sieben mehr fünf . . . bis sieben mehr neun.
Sechs mehr fünf, sechs mehr sechs . . . bis sechs mehr neun.
Fünf mehr sechs, fünf mehr sieben . . . bis fünf mehr neun.
Vier mehr sieben, vier mehr acht, vier mehr neun.
Drei mehr acht, drei mehr neun. — Zwei mehr neun.

Bei jedem Beispiel könnte gleich auch das inverse genommen werden. z. B. acht mehr sechs = vierzehn; also vierzehn weniger sechs ꝛc

Hierauf kommen Uebungen folgender Art:

b.	Zehn mehr zwei sind ꝛc.	Elf weniger zwei sind ꝛc.
	Elf " " "	Zwölf " " "
	Zwölf " " "	Dreizehn " " "
	Dreizehn " " "	Vierzehn " " "
	Vierzehn " " "	Fünfzehn " " "
	Fünfzehn " " "	Sechszehn " " "
	Sechszehn " " "	Siebzehn " " "
	Siebzehn " " "	Achtzehn " " "
	Achtzehn " " "	Neunzehn " " "
	Neunzehn " " "	Zwanzig " " "
c.	Zehn mehr drei ꝛc.	Elf weniger drei ꝛc.
	Elf " "	Zwölf " "
	. . . . .	. . . . .
	Bis achtzehn . .	Einundzwanzig . .
d.	Zehn mehr vier ꝛc.	Elf weniger vier ꝛc.
	. . . . .	. . . . .
	Bis siebzehn ꝛc.	Einundzwanzig . .
e.	Zehn mehr fünf ꝛc.	Elf weniger fünf ꝛc.
	Bis sechszehn . .	Einundzwanzig . .
f.	Zehn mehr sechs ꝛc	Elf weniger sechs ꝛc.
	Bis fünfzehn . .	Einundzwanzig . .

U. s. f. g, h bis k zehn mehr zehn.

Auf welche konkrete Unterlage diese Uebungen im Zahlenzählen zu stellen und in welchem Sinne dieselben zu behandeln sind, erhellet hinreichend aus der beispielsweise angeführten Behandlung der Zählübungen in den frühern Paragraphen. Es ist gut, wenn diese Zählungen auch noch an andern zählbaren Dingen, als den Kugeln oder Würfeln der Zählrahme, vorgenommen werden, um die Kinder nicht zu sehr an ein — wenn auch das zweckmäßigste — Hülfsmittel zu fesseln und sie dadurch freier und selbstständiger zu machen.

§ 32.

Erweiterung des Zahlengebietes bis in die dreißig oder vierzig * und Zu- und Wegzählen innerhalb dieses Gebietes.

Der Gang dieser fortgesetzten Zahlbildung ist ganz derselbe, wie er in § 30 dargestellt wurde. Zu zwei zusammengefaßten Zehnern hat der Schüler

* Es liegt gar nicht so sehr daran, daß der Lehrer schon im ersten Jahre

zunächst schrittweise Einheit um Einheit mehr hinzuzufügen, aber jede neue Zahl nicht bloß als eins mehr als die vorhergehende aufzufassen, sondern auch als zwanzig mehr wie viel zu betrachten. Ebenso von dreißig an u. s. f. Uebungen an der Zählrahme, so wie an anderm passenden Zählmaterial im Auffassen und Darstellen der Zahlmenge wechseln nun ähnlich, wie oben verlangt und theilweise dargestellt wurde, mit einander ab. Insbesondere ist ein vielfaches Bezeichnen des Zahleninhaltes durch einfache Realzeichen, wie Punkte, Striche, Ringchen ꝛc., sehr zweckmäßig. Zur stillen Beschäftigung für die Schüler eignen sich auch diese Uebungen, die der Lehrer beliebig vermehren oder vermindern kann, am besten. Wie die Zehnerordnung hiebei zu berücksichtigen sei, ist leicht einzusehen.

Die Uebungen im Zahlenzählen innerhalb des neuen Zahlenraumes gestalten sich im Allgemeinen ähnlich wie bei den frühern Erweiterungen; doch würden wir es nicht für zweckmäßig erachten, schon im ersten Jahre alle dießfälligen Verbindungen auch der zweistelligen Zahlen vorzunehmen. Es ist gewiß ausreichend, wenn der Schüler auf dieser Stufe zu je einer zweistelligen Zahl innerhalb des durchgenommenen Zahlenfeldes je eine einstellige mit geistigem Erfassen addiren kann.

Mit dieser Beschränkung gruppire nun der Lehrer die erweiterten Uebungen im Zu- und Wegzählen ähnlich wie in § 31 nach Reihen und unterstütze das Zählen nach gewohnter Weise durch die Zählrahme ꝛc. Die nach Reihen fortschreitenden Uebungen im Zählen führen bei richtiger, sachgemäßer Behandlung nicht zum Mechanismus, wohl aber dahin, daß der Schüler lernt, aus gewissen, in einer Reihe fortschreitenden Gliedern eine Regelmäßigkeit, ein Gesetz zu entdecken, was auf die Bildung des Schülers einen wichtigern Einfluß ausübt, als man es gewöhnlich ansieht.

Die Uebungen im Zahlenzählen, in der Betrachtung der Zahlen beim Zerlegen, z B. durch das Wegzählen, haben den Schüler nun zur Erkenntniß

---

recht weit komme, besonders da, wo die Schüler sonst etwas frühe in die Schule einzutreten pflegen; dagegen liegt alles daran, daß die Schüler schon im ersten Jahre recht frische und kräftige Zahlvorstellungen und ein recht regsames Zählvermögen erhalten, und würde dann der durchlaufene Zahlenraum auch bloß bis in die Zwanzig reichen. Ein sorgfältiger, wenn auch langsamer Unterrichtsgang bewirkt hier, daß ein späterer Unterricht nur um so schneller und sicherer fortschreiten kann. Will ein Lehrer noch weiter gehen, als wir oben andeuteten, so müssen wir das seinem einsichtigen und taktvollen Ermessen der besondern Verhältnisse seiner Schule überlassen.

vieler Eigenschaften der Zahlen hinsichtlich ihrer Zusammensetzung geführt, die er nun bei jeder ihm bekannt gewordenen Zahl mit Leichtigkeit angeben kann. Die hierauf bezüglichen Uebungen erscheinen als einfache Wiederholungen, z. B.

acht ist = sieben und eins, sechs und zwei, vier und vier, fünf und drei ꝛc.

elf ist = zehn und eins, acht und drei, sechs und fünf, vier und sieben ꝛc.

Dieselben eignen sich zu schriftlichen Darstellungen dann am besten, wenn der Schüler mit den Ziffern bekannt ist, was wir nun im folgenden Paragraphen berücksichtigen wollen.

§ 33.

Darstellung der Zahlen durch symbolische Zeichen, Ziffern und Benutzung derselben zur Aufzeichnung der Zählaufgaben und deren Ergebnisse.

Mit dem Vorausgegangenen ist in Hinsicht auf die innere Entwicklung die Aufgabe des ersten Schuljahres eigentlich schon erfüllt und durch die nun folgende Herbeiziehung der Ziffer wird der Schüler im Rechnen als solchem für das erste Jahr nicht weiter geführt, als er schon stand; allein mit der Aneignung der Ziffer bahnt er sich einen Fortschritt an, der dann im zweiten Schuljahre gleich merklich zu Tage tritt.

Die Bildung der Ziffern fällt im Allgemeinen mit der Bildung der Schriftzeichen zusammen und gehört dem Schreibunterrichte an, d. h. die gleichen Elementarvorübungen gelten für die einen wie für die andern. Die Einführung in die Ziffern muß für den Schüler eine Rekapitulation der Zahlbildung sein, d. h. die realen Einheiten je einer Zahl werden ihm nochmals vorgeführt und der Zahlbegriff dadurch reproduzirt; hierauf wird die entsprechende Ziffer vorgebildet und dieselbe dann nachbilden gelehrt, um Sache, Begriff und Zeichen neben einander in der Vergleichung zu haben.

Wenn dann der Schüler für jede Zahl bis neun die entsprechende Ziffer schreiben gelernt hat (natürlich geht die Sache nicht in einem Lauf, es sind Ruhepunkte nothwendig), so mögen zur Befestigung Uebungen folgender Art kommen:

Z. B.: Mit welcher Ziffer bezeichnet man die Zahl acht, fünf, neun? ꝛc.
Was bedeutet diese Ziffer 9? Diese Ziffer 6? Diese 7? ꝛc. —
Machet eben so viele Striche, als jede bedeutet!
Schreibet die Ziffern der Reihe nach von eins bis neun!

Schreibet die Ziffer, welche die Anzahl Finger an einer Hand ausdrückt!

Bezeichne mit einer Ziffer die Zahl der Tage in einer Woche, die Zahl der Schüler in dieser Bank, die Zahl der Bänke in dieser Klasse, die Zahl der Füße dieses Tisches, die Zahl der Glockenschläge um acht Uhr! u. s. f.

Wenn früher bei der Darstellung des Zahleninhaltes durch Realzeichen die Anordnung nach Zehnergruppen, unterschieden von den Einern, sorgfältig beobachtet wurde, so ist nun gar nicht schwer, den Schüler die ihm bekannten Zahlen, welche Zehner und Einer enthalten, so anschreiben oder bezeichnen zu lehren, daß er zuerst die Ziffer setzt, welche die Anzahl Zehner, und rechts davon diejenige, welche die Anzahl Einer ausdrückt. Nach einigen Uebungen wird der Schüler bald fest sein. Hierauf folgen Fragen und Aufgaben zur sichern Einprägung der Schreib- und Leseweise der hiehergehörenden zweistelligen Ziffern, ähnlich wie oben bei den einstelligen.

Endlich werden noch die durchgemachten Zählübungen von Stufe zu Stufe, indem sie nochmals durchrechnet werden, in Ziffern geschrieben. Die Sache darf aber hiebei schon schneller und kursorischer gehen, denn der Schüler hat nun bald die Bedeutung des Ziffernansatzes verstanden.

Z. B.: Wie viel ist eins mehr (und) eins? — Das kann man nun auch so schreiben: $1 + 1 = 2$.

Wie viel ist zwei mehr eins? — Das wird ganz in gleicher Art geschrieben: $2 + 1 = 3$.

Ebenso $1 + 1 + 1 = 3$.

Das Zeichen + bedeutet so viel wie beim Zählen das Wort „mehr" (und), d. h. es sollen die Zahlen, die durch die Ziffer links und rechts von dem + bezeichnet sind, zusammengezählt werden. Das Zeichen = bedeutet „ist gleich" oder „sind gleich", d. h. wenn das, was vor diesem Zeichen geschrieben steht, gezählt oder ausgerechnet wird, so muß es gleich viel geben, wie das rechts nach diesem Zeichen.

Ebenso wird das Wegzählen mit schriftlicher Aufzeichnung durch Ziffern eingeleitet und das hierauf bezügliche Operationszeichen (—) eingeführt.

Sind so die einfachsten Zählungen schriftlich darstellen gelehrt worden, so folgen eigentliche Additions- und Subtraktionsbeispiele, die im Ziffernansatze gegeben sind. Zuerst leichtere:

Z. B.: $1 + 1 = ?$ $1 + 1 + 1 = ?$ $1 + 1 + 1 + 1 = ?$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. f.

$2+1=?\ldots 4+1=?\ldots 7+1=?\ 8+1=?\ 9+1=?$
$10-1=?\ldots 8-1=?\ldots 6-1=?\ 3-1=?\ 2-1=?$

$1+2=?\qquad 1+2+2=?\qquad 2+2+2=?$

dann: $1+2+2+2+2\ldots$ u. s. f. $=?$
$2+2+2+2+2\ldots$ u. s. f. $=?$

oder auch:

$3+2=?$	$10-2=?$	$20-2=?$
$4+2=?$	$9-2=?$	$19-2=?$
$5+2=?$	$8-2=?$	$18-2=?$
$6+2=?$	$7-2=?$	$17-2=?$
u. s. f. etwa bis 20.	u. s. f. bis 0.	u. s. f. bis 10.

Hierauf mit 3 ganz ähnlich, z. B:

$1+3=?\ 1+3+3=?\ 2+3=?\ 2+3+3=?$
$3+3=?\ 3+3+3=?\ 3+3+3+3=?$

dann: $1+3+3+3+3\ldots$ u. s. f. $=?$
$2+3+3+3+3\ldots\ldots=?$
$3+3+3+3+3\ldots\ldots=?$

Oder ähnlich wie bei den obigen Ansätzen in stehenden Reihen und dann auch fürs Wegzählen.

So wird — so viel für diesen Kurs noch Zeit übrig bleibt — mit der Zu- und Wegzählung der nächsten Grundzahlen innerhalb des durchlaufenen Zahlraumes fortgefahren Die Uebungen werden stets zuerst von dem Lehrer an der Wandtafel vorgenommen. Wo es irgendwo beim Zählen nicht sicher und rasch geht, so muß man dasselbe durch das Mittel der Zählrahme ꝛc. unterstützen, bis vollständig richtige Auffassung, Festigkeit und Geläufigkeit erzielt ist. Ein Schüler kann die Rechnung leicht durch Vorschiebung der entsprechenden Einer an der Zählrahme begleiten.

Nun die zusammenfassenden Uebungen im Zerlegen der Grundzahlen zur zusammenhängenden Darstellung der Eigenschaften der Zahlen hinsichtlich ihrer Bildung aus der Addition, z. B.:

$2=1+1;\ 3=1+1+1=2+1;\ 4=1+1+1+1$
$=3+1=2+2=$ ꝛc.
$5=1+1+1+1+1=4+1=3+2=2+2+1$ ꝛc.
$6=1+1+1+1+1+1=5+1=4+2=3+3$ ꝛc.
u. s. f. bis 9.

Sollte ein Lehrer in diesem Kurse noch zu Mehrerem Zeit finden, so mag er ähnliche Zerlegungen für die folgenden höhern Zahlen vornehmen und schriftlich darstellen lassen. Die Zerlegungen selbst fallen dem Schüler nun nicht mehr schwer. Bei seinen Additionsaufgaben hat er die Resultate dazu bereits schon gewonnen, er braucht sie hier nur zusammenzutragen. Man halte indessen dennoch den Schüler dazu an, die einzelnen Zerlegungen an der Zählrahme zu rechtfertigen, um sich stets von seiner wirklichen Einsicht überzeugen zu können.

II.

Zweites Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem siebenten und achten Altersjahre.

§ 34.

Aufgabe.

Die allgemeine Aufgabe des Rechnungsunterrichts im zweiten Schuljahre ist gemäß den frühern Betrachtungen in der ersten Abtheilung folgende: Fortsetzung der Zahlbildung durch die Operationsfähigkeit im Zu- und Wegzählen bis zum Hunderter. Fortbildung des Zählvermögens durch die Anfänge des Vervielfachens und Entvielfachens. —

§ 35.

Wiederholungen.

Der Beginn eines neuen Schuljahres wird sich sehr zweckmäßig zunächst an die Uebungen aus dem vorangegangenen Schuljahre anlehnen. Der Lehrer kann hiedurch seine Schüler prüfen, inwieweit sie sich in dem frühern Unterrichtskreise befestigt haben. Folgende Uebungen können an die Wandtafel geschrieben und von den Schülern als stille Pensen gelöst werden; der Lehrer wird indessen wohl auch Gelegenheit haben, noch Einzelnes davon mündlich mit der Klasse zu behandeln.

Uebung I.

$1 + 1 = ?$	$1 - 1 = ?$
$2 + 1 = ?$	$2 - 1 = ?$
$4 + 1 = ?$	$4 - 1 = ?$
$3 + 1 = ?$	$5 - 1 = ?$

5 + 1 = ?	3 — 1 = ?
7 + 1 = ?	6 — 1 = ?
8 + 1 = ?	9 — 1 = ?
6 + 1 = ?	7 — 1 = ?
9 + 1 = ?	8 — 1 = ?
10 + 1 = ?	10 — 1 = ?

Oder auch: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 . . . . u. s. f. bis etwa auf 20

30 — 1 — 1 — 1 — 1 . . . . u. s. f. bis zu 0.

Die Ausführung der fortlaufenden Rechnung geschieht in ähnlichen Stücken wie bei den Aufgaben der Vertikalreihen, z. B. fürs Wegzählen:

30 — 1 = 29; 29 — 1 = 28; 28 — 1 = 27 u. s. f.

Uebung II.

1 + 2 + 2 + 2 + 2 . . . u. s. f. etwa bis 29.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 . . . u. s. f. etwa bis 30.

30 — 2 — 2 — 2 — 2 . . . u. s. f. bis etwa zu 0.

Die Ausführung wieder gleich wie in der vorigen Uebung, z. B.

1 + 2 = 3; 3 + 2 = 5; 5 + 2 = 7 ꝛc. und

2 + 2 = 4; 4 + 2 = 6; 6 + 2 = 8 ꝛc. und

30 — 2 = 28; 28 — 2 = 26 . . ꝛc.

Oder Alles auf einmal enthaltend, und etwa vermischt wie in Uebung I:

1 + 2 = ?	2 — 2 = ?
3 + 2 = ?	4 — 2 = ?
2 + 2 = ?	3 — 2 = ?
4 + 2 = ?	5 — 2 = ?
6 + 2 = ?	7 — 2 = ?
5 + 2 = ?	6 — 2 = ?
u. s. f bis	u. s. f. bis
28 + 2 = ?	30 — 2 = ?

Uebung III.

1 + 3 = ?	3 — 3 = ?
3 + 3 = ?	5 — 3 = ?
2 + 3 = ?	4 — 3 = ?
4 + 3 = ?	6 — 3 = ?
6 + 3 = ?	8 — 3 = ?
5 + 3 = ?	7 — 3 = ?
u. s. f. bis	u. s. f. bis
27 + 3 = ?	30 — 3 = ?

Oder auch in Reihen 1 + 3 + 3 ꝛc.; 2 + 3 + 3 + ꝛc.; 3 + 3 + 3 + ꝛc. und 30 — 3 — 3 — ꝛc.

Uebung IV.

1 + 4 = ?	30 — 4 = ?
3 + 4 = ?	29 — 4 = ?
2 + 4 = ?	26 — 4 = ?
4 + 4 = ?	28 — 4 = ?
6 + 4 = ?	25 — 4 = ?
5 + 4 = ?	27 — 4 = ?
u. ſ. f. bis	u. ſ. f. bis
26 + 4 = ?	4 — 4 = ?

Oder wie oben in fortlaufenden Reihen 1 + 4 + 4 . .; 2 + 4 + 4 . . . 3 + 4 + 4 . .; 4 + 4 + 4 . . . bis 30 und rückwärts.

Uebung V.

1 + 5 = ?	5 — 5 = ?
3 + 5 = ?	7 — 5 = ?
2 + 5 = ?	6 — 5 = ?
4 + 5 = ?	8 — 5 = ?
6 + 5 = ?	10 — 5 = ?
5 + 5 = ?	9 — 5 = ?
7 + 5 = ?	11 — 5 = ?
u. ſ. f. bis	u. ſ. f. bis
25 + 5 = ?	30 — 5 = ?

Oder auch in fortlaufenden Reihen wie oben.

Bei den folgenden Uebungen wird der Lehrer wegen ihrer ſchon etwas größeren Schwierigkeit wohl thun, wieder an der Hand der Zählrahme mitzurechnen, beſonders wenn dieſelben im erſten Jahre nicht öfter durchgemacht werden konnten.

Uebung VI.

1 + 6 = ?	30 — 6 = ?
3 + 6 = ?	28 — 6 = ?
2 + 6 = ?	29 — 6 = ?
4 + 6 = ?	27 — 6 = ?
6 + 6 = ?	25 — 6 = ?
5 + 6 = ?	26 — 6 = ?
u. ſ. f. bis	u. ſ. f. bis
24 + 6 = ?	6 — 6 = ?

Oder auch wie früher in fortlaufenden Reihen.

Uebung VII.

1 + 7 = ?	7 − 7 = ?
3 + 7 = ?	9 − 7 = ?
2 + 7 = ?	8 − 7 = ?
4 + 7 = ?	11 − 7 = ?
5 + 7 = ?	10 − 7 = ?
7 + 7 = ?	13 − 7 = ?
u. s. f. bis	u. s. f. bis
23 + 7 = ?	30 − 7 = ?

Oder auch in fortlaufenden Reihen.

Uebung VIII.

1 + 8 = ?	30 − 8 = ?
3 + 8 = ?	28 − 8 = ?
2 + 8 = ?	29 − 8 = ?
5 + 8 = ?	26 − 8 = ?
4 + 8 = ?	27 − 8 = ?
7 + 8 = ?	24 − 8 = ?
u. s. f. bis	u. s. f. bis
22 + 8 = ?	8 − 8 = ?

Oder auch in fortlaufenden Reihen.

Uebung IX.

1 + 9 = ?	9 − 9 = ?
3 + 9 = ?	11 − 9 = ?
2 + 9 = ?	10 − 9 = ?
5 + 9 = ?	13 − 9 = ?
4 + 9 = ?	12 − 9 = ?
7 + 9 = ?	15 − 9 = ?
u. s. f. bis	u. s. f. bis
21 + 9 = ?	30 − 9 = ?

Oder auch in fortlaufenden Reihen.

Uebung X.

2 + 2 + 3 + 5 + 8 + 1 + 9 = ?

30 − 3 − 9 − 6 − 1 − 7 − 4 = ?

So zu lösen:

2 + 2 = 4	30 − 3 = 27
4 + 3 = 7	27 − 9 = 18
7 + 5 = 12	18 − 6 = 12
12 + 8 = 20	12 − 1 = 11

$20 + 1 = 21$ $\quad$ $11 - 7 = 4$
$21 + 9 = 30$ $\quad$ $4 - 4 = 0$

u. dgl. m.

Die letzten Uebungen besonders mögen auch mündlich durchgemacht werden; überhaupt ist es gut, wenn der Lehrer alle so oft wiederholen läßt, bis sie ganz schnell und sicher gehen. Die Darstellungen an der Zählrahme gelten als Belege für die richtige Einsicht in die einzelnen Zu- und Wegzählungen; es ist gut, wenn die Schüler hierin abwechseln müssen, um zu zeigen, daß alle es verstehen. — Noch größere Abwechslung in die äußere Ausführung der Zählübungen wird der Lehrer leicht zu bringen wissen; das Gebiet der Manier ist ja ein unerschöpfliches. Besonders ist auch hinsichtlich der Beschäftigung der ganzen Klasse Abwechslung in der äußern Form von wohlthätigem Einfluß.

§ 36.

Erweiterung des Zahlengebietes bis zu Hundert.

Entsprechende Darstellung in Realzeichen und Bezeichnung durch Ziffern.

Der Lehrer läßt an der Zählrahme die Zehnerreihen zählen. Wie viele solche Reihen (wie viele Zehner) sind da? — Ein, zwei, drei, vier . . . bis zehn Zehner. Wie viel machen die zwei ersten Reihen oder die zwei Zehner? — Zwanzig Einer. Die drei ersten Zehner? — Dreißig. Nun wollen wir die folgenden auch genau auffassen lernen: Schiebe du zu den drei ersten Reihen noch einen Einer vor; wie viel sind jetzt im Ganzen? — Dreißig und ein oder einunddreißig. Noch einen Einer! Wie viele jetzt? — Dreißig und zwei oder zweiunddreißig. So dreißig und drei oder dreiunddreißig u. s. f. bis dreißig und zehn oder? — Vierzig. — Wie viel sind drei Zehner und fünf? — Fünfunddreißig. Stelle diese an der Zählrahme dar u. s. f. Nun vierzig und ein oder einundvierzig . . . bis fünfzig . . . sechzig.

Wenn der Lehrer eine fähige, vorgerückte Klasse hat, so mag er in dieser begonnenen Weise den Zahlbildungsgang bis 100 fortsetzen; hält er dieß nicht für ganz gerathen, so mag er sich noch länger und einläßlicher mit den neu gebildeten Zahlen bis sechszig abgeben und hieran dann die Bezeichnung derselben durch die entsprechenden dekadischen Ziffern knüpfen.

Das sprachliche Gesetz in der Bezeichnung der reinen Zehner sowohl als der Zehner in Verbindung mit Einern tritt für den Schüler, wenn

der Lehrer nur einigermaßen darauf hinweist, deutlich hervor. Vor der Bezeichnung durch Ziffern sind Uebungen folgender Art von wohlthätiger Wirkung:

Wie viele Zehner enthalten siebenundvierzig? — Und dann noch wie viele Einer? —

Wie viele Zehner und dann noch Einer sind in neunundvierzig — achtundsechszig — zweiundsiebenzig — vierundachtzig — sechsundneunzig? — u. s. f.

Wie viele Einer sind fünf Zehner und ein Einer? — Wie viele sind sieben Zehner und drei Einer? — Sechs Zehner und fünf Einer? — Neun Zehner und neun Einer?

Zeige an der Zählrahme, wie viele Zehner und dann noch Einer in dreiundsiebenzig sind! — Und in siebenunddreißig? — In fünfundsechszig — und in sechsundfünfzig! — Gibt's hier gleich viel? u. s. f.

Zeige an der Zählrahme, wie viele Einer sieben Zehner und neun Einer machen! u. s. f.

Stelle an der Wandtafel vier Zehner und drei Einer in Ringchen dar! (Vier Zehnerreihen und noch drei Einer.) Ebenso siebenundfünfzig! (Als fünf Zehner und sieben Einer.)

Auf euern Schiefertafeln in Ringchen oder Strichen oder Punkten: Dreiundvierzig! Sechsundfünfzig! Sieben Zehner und vier Einer ꝛc.

Nun folgt die Bezeichnung dieser Zahlen durch Ziffern. Dieselbe hat nunmehr für den Schüler fast gar keine Schwierigkeit mehr. Er hat bei jeder dieser Zahlen die Zehner und Einer klar aufgefaßt, nun schreibt er auch ohne Mühe die Anzahl Zehner durch eine Ziffer und rechts von derselben ebenso die Anzahl Einer.

Z. B. Siebenundfünfzig! Wie viele Zehner sind hier? — Und wie viele Einer? Wir wollen zuerst die Zehner schreiben, also 5, und dann müssen wir immer rechts davon setzen, wie viele Einer noch dazu kommen; also hier 57. Stelle die 57 durch Einer an der Zählrahme dar! — Ja, die 5 Zehnerreihen bilden das Meiste in dieser Zahl; man schreibt auch das Meiste, also diese Zehner zuerst auf und dann rechts davon den kleinern Theil, die 7 Einer, also 57 bezeichnet 5 Zehner und 7 Einer oder siebenundfünfzig Einer.

Wie viele Zehner hat sechszig? — Und dann noch wie viele Einer? — Ja, keinen Einer mehr, also 0 Einer. Darum schreibt man auch 60 als 6 Zehner und 0 Einer, weil man auf der rechten Seite immer setzen muß, wie viele Einer noch außer den Zehnern seien.

U. s. f. in dieser oder in ähnlicher Weise, wie es gerade der spezielle Lehrgang mit sich bringt. In der Regel wird man gut thun, auch diese höhern Zahlen nach ihrer natürlichen Fortschreitung sukzessive durch Ziffern bezeichnen zu lehren.

Dann Uebungen, z. B.:

Schiebe 6 Zehner und 3 Einer an der Zählrahme vor! — Schreib' so viel an die Wandtafel auf! — Wie viele Einer bezeichnen diese Zahlzeichen oder Ziffern? —

Nun 89 Einer vor! — Schreib' diese auf! —

Schreibt auf euere Tafeln folgende Zahlen auf, die ich euch sage: Siebenundsechszig — vierundsiebenzig — zweiundneunzig ꝛc.!

Schiebe du nun so viele Einer an der Zählrahme vor, als die erste Zahl angibt — du so viele, wie die zweite — so viele, wie die dritte.

Ich schreibe eine Zahl an der Wandtafel auf (76); wer kann mir so viele Einer an der Zählrahme zusammenstellen, als die Zahl angibt? — Wie viele Reihen Zehner? — Und dann noch wie manchen Einer? u. s. f.

Sprecht die Zahlen aus, die ich hier mit Ziffern bezeichne:

53; 64; 89; 71; 60; 47; 90; 99; 70.

Stellt durch Ringchen dar, wie viele Einer (in Zehnerreihen und dann noch übrigen Einern) folgende Ziffern ausdrücken:

27; 39; 40; 51; 65; 71; 59.

Schreibet alle Zahlen von 30 bis 60 in Ziffern auf; neben einander! unter einander!

Ebenso von 60 bis 99!

Endlich beliebige Abwechslung in der Verbindung der einzelnen Uebungen. —

§ 37.

Einfache Zählübungen im Umfange des ersten Hunderters.

Wenn die frühern Uebungen in § 35 wirklich gut gehen, so wird man das Zuzählen der Grundzahlen etwa von 30 an bis 99 beginnen

können. Sollte dieß nicht der Fall sein, so wird man wohl thun, wieder von 1 an bis gegen die 100 in der bekannten Weise zuzählen zu lassen.

Also: 30 + 1 + 1 + 1 + 1 . . . bis gegen 100.
30 + 2 + 2 + 2 + 2 . . . „ „ „
30 + 3 + 3 + 3 + 3 . . . „ „ „
30 + 4 + 4 + 4 + 4 . . . „ „ „
30 + 5 + 5 + 5 + 5 . . . „ „ „

Oder dann dieselben Uebungen von 1 an.

Auch etwa in der Weise:

31 + 2 + 2 + 2 . . . . bis gegen 100.
31 + 3 + 3 + 3 . . . . „ „ „
u. s. f.

Das Zuzählen der obern Grundzahlen 6; 7; 8; 9 dürfte wohl wieder von 1 an beginnen, weil durch sie der Raum bis 30 ja bald zurückgelegt ist und sie überdieß schon etwas mehr Schwierigkeiten beim Zählen darbieten, also auch mehr Uebung erheischen. Man hätte also:

1 + 6 + 6 + 6 + 6 . . . bis gegen 100.
2 + 6 + 6 + 6 + 6 . . . „ „ „
3 + 6 + 6 + 6 + 6 „ „ „
4 + 6 + 6 + 6 + 6 „ „ „
5 + 6 + 6 + 6 + 6 „ „ „
6 + 6 + 6 + 6 + 6 „ „ „

Ebenso für 7; 8; 9.

Endlich werden einstellige Zahlen in beliebiger Folge innerhalb des bezeichneten Zahlumfanges zusammengezählt, z. B.:

4 + 3 + 7 + 5 + 2 + 9 + 6 + 8 u. s. f.

Die Ausführung, so wie die schriftliche Bezeichnung aller obigen Zusammenzählungen findet in getrennten Einzelrechnungen statt, z. B.:

1 + 6 = 7; 7 + 6 = 13; 13 + 6 = 19; 19 + 6 = 25;
25 + 6 = 31 u. s. f.

Es versteht sich wohl von selbst, daß der Lehrer jede dieser Uebungen mit den Schülern zuerst ohne alle Ziffern durchnimmt, also als Kopfrechnen betreibt und erst dann den entsprechenden Ziffernsatz einführt. Zur konkreten Unterstützung des Zählens dient wieder die Zählrahme. Auf die Ergänzungen zu ganzen Zehnern nehme der Lehrer bei diesen Uebungen besonders sorgfältige Rücksicht, z. B. 45 + 7 = (45 + 5) + 2 = 52. (An der Zählrahme sind 4 ganze Zehner und 5 Einer vorgeschoben. Der

Schüler schiebt noch 5 Einer hinzu und hat so 50; dann noch 2 Einer und erhält so aus 45 + 5 + 2, d. i. 45 + 7, die 52.)

Das Wegzählen wird nach ähnlichem Gange und mit Benutzung des gleichen Zahlveranschaulichungsmittels geübt. Die Uebungen (als Kopfrechnen, so wie später mit Zifferansatz) mögen etwa folgende sein:

98 — 2 — 2 — 2 — 2 . . u. s. f. bis weniger als der Subtrahend bleibt.
99 — 2 — 2 — 2 — 2 . . " " " " " " "
99 — 3 — 3 — 3 — 3 . . " " " " " " "
98 — 3 — 3 — 3 — 3 . . " " " " " " "
97 — 3 — 3 — 3 — 3 . . " " " " " " "
99 — 4 — 4 — 4 — 4 . . " " " " " " "
98 — 4 — 4 — 4 — 4 . . " " " " " " "
96 — 4 — 4 — 4 — 4 . . " " " " " " "
95 — 4 — 4 — 4 — 4 . . " " " " " " "

u. s. f. mit den Zahlen 5; 6; 7; 8; 9.

Die Ausführung zunächst wieder nach Einzelnrechnungen, z. B.

96 — 4 = 92; 92 — 4 = 88; 88 — 4 = 84 u. s. f. f.

bis zuletzt schnell abwärts gezählt wird 96, 92, 88, 84 . . ꝛc.

Endlich: 99 — 8 — 7 — 6 — 9 — 1 — 5 — 4 ꝛc.

9 + 6 — 7 + 5 — 8 + 9 — 2 + 4 ꝛc.

§ 38.

Erweiterung des Zahlgebietes über die 100 hinaus und entsprechende Uebungen im Umfange der paar ersten Hunderter.

Wie viele Reihen Zehner enthält die ganze Zählrahme? — Zehn solche Reihen, zehn Zehner. Die zehn Zehner machen einhundert Einer aus. Ein Hundert ist also neunzig und wie viel? — achtzig und wie viel? — siebenzig und wie viel? — u. s. f. — neunundneunzig und wie viel? — achtundneunzig und wie viel? — siebenundneunzig und wie viel? u. s. f.

Der Lehrer kann hierauf die hundert Einer durch eine Hunderter-Platte des Kubikfußes ꝛc. repräsentiren und dann noch einen Einer an der Zählrahme vorschieben, der mit der Platte also hundert und einen Einer (oder Würfel) ausmacht. Hierauf ebenso hundert und zwei, hundert und drei u. s. f. bis hundert und hundert, d. i. zweihundert. Die Schüler, die den Hunderter recht aufgefaßt haben, werden sich leicht die genannten Zahlen als Zusammenfassungen von hundert mit schon bekann-

ten Zahlen bilden; der Lehrer wird indessen bei dieser Zahlerweiterung Ruhepunkte machen, wo und wie oft er es für nothwendig erachtet. Dazwischen sind Uebungen am Platze wie die folgenden:

Stelle mir dar (mittelst der Hunderterplatte und der Würfelzählrahme — oder mit Reihen von Kugeln wie an der Kugelrahme — oder mit den sogenannten Zahlfiguren ꝛc.): hundert und vier — hundert und neun — hundert und siebenzehn — hundertzwanzig — hundertsechsundzwanzig — hunderdreiunddreißig — hundertachtundvierzig — hundertfünfundfünfzig Einer u. s. f. — beliebig innerhalb des neugesprengten Zahlenraumes!

Wie viele Zehner und Einer haben außer dem Hunderter: hundertzweiundachtzig — hundertvierundneunzig — hundertsechsundsechszig — hundertsiebenzig — hundertachtzig — hundertacht — hundertdreiundachtzig ꝛc.?

Komm und stelle dieses dar!

Dann beliebige Uebungen in der Darstellung des Inhaltes solcher Zahlen.

Das Aufschreiben dieser neuen Zahlen durch Ziffern hat nach diesen Uebungen nicht viele Schwierigkeiten. Die Schüler schreiben in Ziffern wie viele Hunderter, rechts davon noch wie viele Zehner und wieder rechts noch wie viele Einer eine Zahl enthält.

Z. B.: Wie viele Zehner hat hundert? Und außer diesen dann noch wie viele Einer? (keinen, null Einer). Schreibe nun durch eine Ziffer die 10 Zehner und rechts davon noch die null Einer, also 100.

Wie bezeichnet man also hundert oder 1 Hunderter? — Ja, mit 1 und rechts davon 0 (Zehner) und wieder rechts noch 0 (Einer).

Hier lege ich vor hundert und einen Einer. Wie viele Hunderter — und dann noch wie viele Zehner — und dann noch wie viele Einer? — Schreibe auf 1 (Hunderter), rechts davon wie viele Zehner (0) und wieder rechts wie viele Einer (1), also 101 u. s. f.

Hier sind hundertsechsundzwanzig Einer. — Wie viele Hunderter? — Und noch wie viele Zehner? — Und noch wie viele Einer? — Schreibt nun auf 1 (Hunderter) rechts davon die Zehner (2) und wieder rechts noch die Einer (6), also 126; u. s. f., bis diese Zahlbezeichnung im erweiterten Gebiete richtig geht.

Nun folgen Diktirübungen zur schnellen und geläufigen Zahlbezeichnung durch Ziffern; hiemit werden abwechselnd noch die konkreten Darstellungen des Zahleninhaltes verbunden, um sicher zu sein, daß der Schüler mit den

geschriebenen Ziffern die richtigen Zahlbegriffe verknüpft. Zuletzt kommen die Uebungen im Lesen beliebiger dießfälliger Ziffern.

Z. B.: Hier schreibe ich eine Zahl an der Wandtafel auf (183). Welche Ziffer bezeichnet da Hunderter? — Welche Zehner? — Welche Einer? — Wie manchen Hunderter — und noch wie manchen Zehner — und noch wie manchen Einer hat die Zahl? — Also? — einhundertdreiundachtzig. — Wir wollen so viele Würfel vorlegen ꝛc.

Sprecht die Zahlen aus, die ich hier mit Ziffern bezeichne:
109; 123; 113; 144; 176; 189; 200; 180; 108.

Schreibet alle Zahlen von 100 bis 150 in Ziffern auf, neben einander! unter einander!

Ebenso von 150 bis 200!

§ 39.

Erweiterte Uebungen im Zu- und Wegzählen.

Die folgenden Zählübungen werden natürlich wie immer zuerst ohne Ziffern, also als eigentliches Kopfrechnen und erst dann mit Benutzung des Ziffernsatzes als fertiges Zifferrechnen durchgenommen. Ebenso dient die Zählrahme in Verbindung mit dem vorgelegten Hunderter als Unterstützungsmittel.

a. Zusammenzählen.

Uebung I.

100 + 2 = ?	101 + 1 = ?	110 + 1 = ?
100 + 3 = ?	101 + 2 = ?	112 + 2 = ?
100 + 7 = ?	104 + 2 = ?	114 + 4 = ?
100 + 9 = ?	105 + 3 = ?	124 + 3 = ?
100 + 6 = ?	102 + 9 = ?	137 + 3 = ?

u. s. f., besonders das Zuzählen von 1, 2, 3, 4 zu beliebigen Zahlen von 100 bis 200 berücksichtigend.

Uebung II.

100 + 5 = 105	101 + 5 = 106	102 + 5 = 107
105 + 5 = 110	106 + 5 = 111	107 + 5 = 112
110 + 5 = 115	111 + 5 = 116	112 + 5 = 117
u. s. f. bis gegen 200.	u. s. f. bis gegen 200	u. s. f. bis gegen 200.

103 + 5 = 108	104 + 5 = 109
108 + 5 = 113	109 + 5 = 114
113 + 5 = 118	114 + 5 = 119
u. s. f. bis gegen 200.	u. s. f. bis gegen 200.

Uebung III.

In ähnlicher Weise wie Uebung II wird ausgeführt:

100 + 6 + 6 + 6 + 6 u. s. f. bis gegen 200
101 + 6 + 6 + 6 + 6 " " " "
102 + 6 + 6 + 6 + 6 " " " "
103 + 6 + 6 + 6 + 6 " " " "
104 + 6 + 6 + 6 + 6 " " " "
105 + 6 + 6 + 6 + 6 " " " "

U. s. f. die folgenden Uebungen im Zuzählen der Zahlen 7, 8, 9; dann in beliebiger Folge: 100 + 8 + 6 + 9 + 7 + 3 + 5 + 7 ꝛc.

b. Wegzählen.

Uebung I.

110 — 1 = ?	150 — 2 = 148	151 — 2 = 149
108 — 1 = ?	148 — 2 = 146	149 — 2 = 147
110 — 3 = ?	146 — 2 = 144	147 — 2 = 145
110 — 7 = ?	144 — 2 = 142	145 — 2 = 143
110 — 6 = ?	142 — 2 = 140	143 — 2 = 141
110 — 8 = ?	u. s. f. f. bis 0.	u s. f. f. bis 1.

Uebung II.

200 — 3 = 197	199 — 3 = 196	198 — 3 = 195
197 — 3 = 194	196 — 3 = 193	195 — 3 = 192
194 — 3 = 191	193 — 3 = 190	192 — 3 = 189
u. s. f. f. bis 101 od. bis 2	u. s. f. f. bis 100 od. bis 1.	u. s f f bis 102 od. bis 0.

Uebung III.

In ähnlicher Weise wie in Uebung II wird ausgeführt:

200 — 4 — 4 — 4 — 4 u. s. f.
199 — 4 — 4 — 4 — 4 "
198 — 4 — 4 — 4 — 4 "
197 — 4 — 4 — 4 — 4 "

Ebenso die folgenden Uebungen im Wegzählen der Zahlen 5, 6, 7, 8, 9; dann in beliebiger Folge: 200 — 8 — 7 — 9 — 1 — 6 — 4 — 3 — 5 ꝛc.

und 100 + 9 — 7 +8 + 6 — 4 + 7 + 5 — 9 ꝛc.
150 — 6 + 3 — 9 — 2 + 3 + 8 — 6 — 9 ꝛc.

Es ist nicht nöthig, ausführlich darauf hinzuweisen, wie die einzelnen Zählergebnisse zu veranschaulichen sind; die Art und Weise der Ausführung kann wesentlich die gleiche bleiben wie früher. Ein Hunderter bleibt vorgelegt; das Uebrige wird an der Zählrahme dargestellt. Z. B. 146 ± 8 = ?

Es ist vorgelegt 1 Hunderter (z. B. die früher erwähnte Hunderterplatte); an der Zählrahme werden ferner 4 Zehnerreihen vorgeschoben und auf einer neuen Reihe die 6 Einer. Diese werden nun beim Zuzählen zunächst durch 4 Einer zu einem ganzen Zehner ergänzt, wodurch man 150 erhält, und alsdann werden noch 4 Einer vorgeschoben, wodurch zusammen 154 entstehen; also 146 + 8 = 154. Beim Wegzählen werden zuerst die 6 Einer und hierauf von der vierten Zahlenreihe noch 2 Einer weggezählt, woraus sich ergibt 146 — 8 = 138.

§ 40.

Das Zu- und Wegzählen von Zehnern.

a. Zusammenzählung und Wegzählung reiner Zehner.

I.

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + ꝛc. . . = ?
20 + 10 = ? 40 + 10 = ? 50 + 10 = ? 70 + 10 = ? 90 + 10 = ?
20 + 20 = ? 10 + 20 = ? 40 + 20 = ? 50 + 20 = ?
20 + 20 + 20 + 20 + 20 + ꝛc. . . = ?
10 + 20 + 20 + 20 + 20 + ꝛc. . . = ?
70 + 20 = ? 110 + 10 = ? 130 + 20 = ? 180 + 20 = ?
10 + 30 = ? 20 + 30 = ? 30 + 30 = ? 50 + 30 = ?
10 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ?
20 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ?
30 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ?
So für die Zahlen 40; 50; 60; 70; 80; 90.

Bei den letztern Zahlen wird man nicht viele wiederholte Verbindungen erhalten, wenn man sich in einem etwas niedern Zahlenraume bewegen will. Es genügen da Zusammenzählungen folgender Art:
60 + 50 = ? 70 + 80 = ? 50 + 90 = ? 40 + 80 = ?
80 + 80 = ? 90 + 70 = ? 90 + 90 = ? 60 + 80 = ?
30 + 50 + 20 + 40 + 60 = ? 70 + 50 + 60 = ? u. s. f.

II.

10 — 10 = ? 20 — 10 = ? 40 — 10 = ? 70 — 10 = ? 130 — 10 = ?
200 — 10 — 10 — 10 — 10 — ꝛc. . = ?
30 — 20 = ? 60 — 20 = ? 110 — 20 = ? 170 — 20 = ?
200 — 20 — 20 — 20 — 20 — ꝛc. . . = ?
190 — 20 — 20 — 20 — 20 — ꝛc. . . = ?
40 — 30 = ? 60 — 30 = ? 100 — 30 = ? 120 — 30 = ?

200 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?
190 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?
180 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?
So für die Zahlen 40; 50; 60; 70; 80; 90.
Dann auch: 200 — 40 — 30 — 20 — 50 — 60 = ? ꝛc.
Endlich vermischt: 90 + 70 — 80 + 10 — 40 — 20 + 50 = ? ꝛc.

Die Veranschaulichung bei allen diesen Uebungen bleibt dieselbe wie früher.

Es ist gut, daß die Schüler die Zehner sowohl als solche, als auch in Einern aufgelöst, zu- und wegzählen lernen; z. B. 150 ± 30 als 15 Zehner + 3 Zehner = 18 Zehner oder 180 Einer, und 15 Zehner — 3 Zehner = 12 Zehner oder 120 Einer, dann auch auf ein Mal 150 Einer + 30 Einer = 180 Einer und 150 Einer — 30 Einer = 120 Einer.

b. Zuzählung reiner Zehner zu Zahlen, die aus Einern und Zehnern gemischt sind, und eben solche Wegzählung.

III.

11 + 10 = ? 12 + 10 = ? 23 + 10 = ? 34 + 10 = ? 56 + 10 = ?
11 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + ꝛc. . . = ?
13 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + ꝛc. . . = ? ꝛc.
14 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + ꝛc. . . = ?
24 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + ꝛc. . . = ? ꝛc.
15 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ?
25 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ?
35 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + ꝛc. . . = ? ꝛc.
16 + 40 + 40 + 40 + ꝛc. . . = ?
26 + 40 + 40 + 40 + ꝛc. . . = ?
36 + 40 + 40 + 40 + ꝛc. . . = ?
46 + 40 + 40 + 40 + ꝛc. . . = ?
So für 50; 60; 70; 80; 90. Für die letztern zunächst ganz einfache; z. B. 57 + 50 = ? 62 + 70 = ? 98 + 60 = ? 77 + 90 = ? 116 + 70 = ? ꝛc.

IV.

35 — 10 = ? 69 — 10 = ? 76 — 20 = ? 87 — 40 = ? 164 — 30 = ?
199 — 10 — 10 — 10 — 10 — ꝛc. . . = ? ꝛc.
197 — 20 — 20 — 20 — 20 — ꝛc. . . = ?
187 — 20 — 20 — 20 — 20 — ꝛc. . . = ? ꝛc.
195 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?
185 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?
175 — 30 — 30 — 30 — 30 — ꝛc. . . = ?

So für 40; 50; 60; 70; 80; 90. Die letztern einfach; z. B.
$101 - 80 = ?$ $97 - 70 = ?$ $182 - 90 ?$ $177 - 60 = ?$ ꝛc.

Endlich vermischt: $167 - 40 + 70 - 90 + 60 - 30 + \ldots = ?$ ꝛc.

c. Zu- und Wegzählen von Zahlen, die aus Zehnern und Einern gemischt sind.

V.

$12 + 21 = ?$ $23 + 19 = ?$ $34 + 27 = ?$ $52 + 46 = ?$ ꝛc.
$101 + 27 = ?$ $134 + 39 = ?$ $161 + 55 = ?$ $119 + 81 = ?$ ꝛc.
$34 + 26 + 17 + 58 + 31 + \ldots = ?$ u. s. f.

$24 - 13 = ?$ $49 - 26 = ?$ $35 - 27 = ?$ $79 - 62 = ?$ ꝛc.
$112 - 73 = ?$ $144 - 49 = ?$ $154 - 68 = ?$ $179 - 83 = ?$ ꝛc.
$200 - 12 - 24 - 37 - 45 - 51 - 17 - \ldots = ?$ ꝛc.
$200 - 97 - 25 + 69 + 17 - 44 + 57 - \ldots = ?$ ꝛc.

Alle diese Uebungen werden unter passender Veranschaulichung so lange fortgesetzt, bis sie fertig gehen. Die rechte Fertigkeit wird insbesondere durch ein zweckmäßiges Zerlegen erzielt, welches hauptsächlich auch bei den Uebungen unter c sorgfältig in Anwendung zu bringen ist. Z. B. $112 \pm 79 = ?$ Es sind hier mehrere Lösungsweisen möglich. Man lasse solche nach und nach durch die Schüler selbst auffinden. Es mögen etwa folgende Arten in Berücksichtigung fallen:

1) $112 + 79 = 110 + 70 + 2 + 9 = 180 + 11 = 191$
   $112 - 79 = 110 - 70 - 9 + 2 = 40 - 9 + 2 = 33$
2) $112 + 79 = 112 + 9 + 70 = 121 + 70 = 191$
   $112 - 79 = 112 - 9 - 70 = 103 - 70 = 33$
3) $112 + 79 = 9 + 2 + 110 + 70 = 10 + 180 + 1 = 191$
   $112 - 79 = 12 - 9 + 100 - 70 = 3 + 30 = 33$
4) $112 + 79 = 112 + 80 - 1 = 192 - 1 = 191$
   $112 - 79 = 112 - 80 + 1 = 32 + 1 = 33$
   u. s. f.

Natürlich ist dieß Alles in erster Linie Kopfrechnen, das man hauptsächlich im Anfange unterstützt durch den Anschauungsapparat. Dann erst, wenn schon einige Fertigkeit in der Ausrechnung vorhanden ist, wird die Ziffer eingeführt. Es werden auch hier alle Lösungsweisen berücksichtigt, was natürlich nun um so leichter geht; aber gleich von Anfang wird darauf gehalten, nicht zu viele Ziffern zu gebrauchen, um den Schüler sowohl an Kürze als an lebendige Thätigkeit im Kopfe zu gewöhnen.

VI.

Als Uebungen im Zerlegen z. B.

$40 = 10 + 10 + 10 + 10 = 20 + 20 = 30 + 10 = 12 + 12 + 12 + 4 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ ꝛc.

$56 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 6 = 20 + 20 + 16 = 28 + 28 = 14 + 14 + 14 + 14 = 12 + 12 + 12 + 12 + 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$ u. ſ. f.

$87 + 40 + 40 + 7 = 50 + ? = 61 + ? = 77 + ?$

Ferner zur Bildung aus höhern Zahlen durch Wegzählung, z. B.

$70 = 100 - 30 = 150 - 80 = 114 - 44 = 153 - 83$ ꝛc.

$81 = 90 - 9 = 100 - 19 = 122 - 41 = 89 - ? = 120 - ? = 145 - ?$ ꝛc.

u. ſ. w.

Die entſprechenden Veranſchaulichungen ſind leicht.

In dem Vorigen iſt nun die eigentliche Aufgabe des zweiten Schuljahres enthalten; die erſten Anfänge im Vervielfachen und Entvielfachen bilden eine bloße Ueberleitung zu einer folgenden Stufe, und wenn auch ein Lehrer unter Verhältniſſen nicht mehr Zeit hätte, zu jenen überzugehen, ſo läge keine gar große Einbuße darin. Nur recht friſche und kräftige Zahlvorſtellungen in dem durchlaufenen Gebiete und Feſtigkeit im Zu- und Wegzählen! — und alles Folgende wird ſich nur um ſo leichter geben. Wir nehmen indeſſen die Weiterführung der Operationsform im folgenden Paragraphen an die Hand.

§ 41.

Fortbildung des Zählvermögens durch die Anfänge des Vervielfachens und Entvielfachens.

Was die Kinder hier *zunächſt* zu thun haben, iſt ihnen nichts Neues und *ſoll* ihnen nichts Neues ſein. Sie zählen bloß gleiche Zahlen zuſammen; allein ſie erwerben ſo, vom Lehrer geleitet, unvermerkt eine neue Form, ſich dieſes Zählergebniß zu *denken*, ſie erhalten den erſten Begriff vom *Mehrfachen* einer Zahl. Dieſes Zählergebniß läßt ſich durch Striche, Punkte, durch die Tafeln von Heer ꝛc., am beſten aber durch die *Zählrahme* veranſchaulichen.

a. Direkte Uebungen.

Der Lehrgang kann z. B. so (oder auf irgend eine andere passende Weise) begonnen werden: *

Zählt! (An jeder Reihe der Zählrahme wird ein Einer vorgeschoben.): Ein, zwei, drei, vier, ... zehn Einer — zehn Eins!

Jetzt! (Von jeder Reihe werden nach und nach zwei Einer vorgeschoben, so daß zuletzt 10 Zweier unter einander geordnet vorliegen.): Zu oberst sind zwei Einer — (zwei Eins, zusammen ein ganzes Stück, ein Paar, ein Zweier). Nun darunter noch zwei! — Jetzt sind zwei und zwei, das sind vier. Nun noch zwei! So sind zwei und zwei und zwei oder sechs. U. s. f. bis zwanzig. Dann: Ein Paar zählt zwei, ist ein Zweier, ist einmal zwei. Die beiden ersten Paare sind wie viele zwei? (2 zwei). Wie vielmal zwei? (zweimal zwei). — Nun die drei ersten Paare: zwei und zwei und zwei, oder zwei mehr zwei mehr zwei sind wie viele zwei? — Wie manchmal zwei? — Gut! (Nun rückwärts:) Dreimal zwei oder drei zwei (Zweier) sind zwei mehr zwei mehr zwei, das sind sechs. Also dreimal zwei sind sechs. U. s. f. für viermal zwei, fünfmal zwei ... bis etwa zehnmal zwei.

Auf ähnliche Weise können die Gruppen: ein-, zwei-, drei-, vier- bis zehnmal drei angeschaut und die Ergebnisse gezählt werden. So wird nach und nach der Entwicklungsgang der Multiplikationsverbindung der Zahlen von eins, zwei bis neun oder zehn fortgesetzt. Natürlich hat jeder Lehrer je nach seinen besondern Verhältnissen die Ausdehnung des Lehrganges sowohl als die einzelnen Ruhepunkte selbst zu bestimmen. Von Zifferansätzen soll bei all diesen Uebungen natürlich noch gar keine Rede sein. Je nach gewissen Ruhepunkten können Uebungen zur Befestigung des Entwickelten folgen z. B. auf folgende Art:

---

* Wenn der Lehrer hier oder in einer Sprachstunde eine sprachliche Uebung zur allgemeinern und festern Auffassung der Bedeutung von »mal« beim Zählen der sich wiederholenden Thätigkeit vorausgehen läßt, so wird dieß die vorliegende Entwicklung unterstützen. Die Schüler bilden hiebei Beispiele, wie: Um 1 Uhr schlägt die Glocke einmal und um 2 Uhr zweimal ꝛc. Der Jäger schoß dreimal. Es blitzte fünfmal. Ich schreibe den Buchstaben o, die Ziffer 3 viermal. Ich mache zwei- drei- viermal einen Strich ꝛc. Zweimal wiederholen, setzen, nehmen ꝛc.

Stelle mir an der Zählrahme dar: Zweimal einen Einer (zweimal eins), zweimal zwei (zwei Zweier), zweimal drei, zweimal vier, zweimal fünf!

Neben einander! — Unter einander!

Nun unter einander: zweimal sechs, zweimal sieben, zweimal neun!

Neben einander: dreimal eins, dreimal zwei, dreimal drei!

Unter einander: dreimal vier, dreimal sechs, dreimal acht ꝛc.

Ebenso: viermal zwei, vier, fünf, sieben, acht ꝛc
fünfmal vier, sechs, drei, neun ꝛc.
sechsmal sieben, zwei, fünf, zehn ꝛc.
u. s. f. bis neunmal eins, zwei, drei ꝛc.

Oder: Mache an die Wandtafel: zweimal zwei Punkte, Striche, Ringe ꝛc.

Unter einander! Neben einander!

Dreimal vier Striche ꝛc. unter einander!

Fünfmal sechs Ringchen! u. s. f.

Ferner: Wie viel sind: dreimal zwei? (Sechs). Stelle dieß dar an der Zählrahme! Oder mit Punkten, Strichen ꝛc. an der Tafel!

Stelle mir in Reihen unter einander dar: viermal fünf — und schreibe nun auf die Tafel mit Ziffern, wie viel dieß ausmacht! (20)

Wie viel sind fünfmal drei, vier, fünf? ꝛc. — Stellt dieß auf euern Tafeln durch Ringchen oder Striche unter einander dar!

In eben solchen Reihen: sechsmal vier, fünf, sechs ꝛc. . . siebenmal zwei, drei, vier ꝛc. . . und schreibt jedesmal in Ziffern daneben, wie viel die Reihen darstellen.

Endlich: beliebige Fragen und Uebungen im Kreise dieser Verbindungen, bis dieselben ordentlich gehen.

Sollten diese Vervielfachungen schon in Ziffersätzen dargestellt werden wollen, so sei man ganz einfach; wir würden zuerst, um nicht zu viel auf einmal in Zeichen zu haben, bloß etwa nach folgender Weise schreiben: 2 mal 2 = 4 und noch nicht $2 \times 2 = 4$. Jedenfalls wird der genaue Zifferansatz für die Multiplikation wie für die Division mit Hinsicht auf die richtige Stellung der Operationsglieder erst im folgenden Jahre gründlich eingeführt werden können.

b. Inverse Uebungen.

Die inverse Richtung des Entvielfachens wird sich hier zweckmäßig nur auf die leichtern Fälle beziehen. Diese dürfen zunächst ganz in Verbindung mit dem Vorigen aufgefaßt werden. Z. B. Dreimal zwei sind wie viel? — Sechs! Wie vielmal zwei sind sechs? — Wie manchmal muß man zwei haben, bis man sechs hat? — Zeig' dieß an der Zählrahme. Wie manchmal muß man drei haben, bis man sechs hat? Zeig' dieß an der Zählrahme. Was gibt zweimal genommen sechs? Zeig' es an der Zählrahme. Was gibt dreimal genommen sechs? Hier sind vier Würfel. Schau, wie manchmal (wie oft) du zwei davon wegnehmen kannst! — Die vier sind also wie manchmal zwei? — u. s. f. für folgende einfache Beispiele:

Wie vielmal zwei sind acht, zehn, zwölf ꝛc.?
Zweimal wie viele Würfel sind acht, zehn, zwölf ꝛc. Würfel?
Wie manchmal drei Würfel sind sechs, neun, zwölf ꝛc. Würfel?
Viermal wie viele Würfel sind zwölf, zwanzig ꝛc. Würfel?
Wie vielmal fünf sind fünfzehn, fünfundzwanzig, vierzig ꝛc.?
Fünfmal wie viel macht dreißig, fünfunddreißig ꝛc.?

u. s. f. alle die einfacheren Entvielfachungen.

Wer in Form und Inhalt weiter gehen will und kann, findet die Fortsetzung bei den dießfälligen Uebungen im folgenden Schuljahre.

III.

Drittes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem achten und neunten Altersjahre.

§ 42.

Aufgabe.

Die Aufgabe dieses Schuljahres im Rechnungsunterrichte, wie sie in der ersten Abtheilung festgesetzt worden, ist folgende: Weiterführung der Zahlbildung bis zum Tausender. Befestigung des arithmetischen Denkens in Multiplikation und Division und Auffassung der hieraus folgenden Zahleigenschaften. Die einfachsten Operationseinkleidungen als Ueberleitung aus dem kindlichen Rechnungskreise in das Realgebiet des angewandten Rechnens.

§ 43.

Wiederholungen aus dem vorigen Schuljahre.

Diese Wiederholungen werden sich vorzüglich auf das fertige Zu- und Wegzählen ein- und zweistelliger Zahlen innerhalb des frühern Zahlenraumes beziehen. Es ist nicht schwer und wir wollen es daher dem Lehrer überlassen, eine zweckmäßige Reihenfolge solcher wiederholenden Uebungen aufzustellen; einige äußere Abwechslung, die leicht anzubringen ist, erscheint hiebei besonders des größern Interesses wegen, das dieselben dann für die Schüler haben, natürlich wünschenswerth. — Im ersten Hefte in unserer „methodisch gegliederten Rechnungsaufgabensammlung“ *, auf die wir von nun an mit Beziehung auf den Uebungsstoff wiederholt werden hinweisen müssen, finden sich ebenfalls einige solcher Aufgaben zur Wiederholung.

§ 44.

Erweiterung des frühern Zahlgebietes bis zum Tausender.

Als Kollektiveinheit haben die Schüler den Hunderter schon im vorigen Schuljahre aufgefaßt. Bei zweckmäßiger Veranschaulichung dieser höhern Einheit (z. B. durch die Tafeln nach Heer, etwa auch durch die Hunderterbünde, am besten durch die Hunderterplatten, die sich genau an die Würfelzählrahme anschließen) bilden die Schüler leicht die Zahlen zwei-, drei-, vier- . . . . bis zehnhundert oder bis tausend, welche neue Kollektiveinheit sich wieder im Kubus, aus tausend Einerwürfeln gebildet, zweckmäßig versinnlicht. Die zwischenliegenden Zahlen werden aus der Vereinigung einer ganzen Anzahl Hunderter mit den bekannten ein- und zweistelligen Zahlen gebildet; z. B. es liegen vor zwei Hunderterplatten, dazu werden ferner an der Zählrahme Einer um Einer vorwärts geschoben und zu jenen Hundertern gezählt, wodurch man der Reihe nach erhält 201; 202; 203; 204 u. s. f. . . . bis 300 Einer, und von da an wieder so fort bis 1000 Einer. Wenn noch weiter über 1000 gegangen wird, so geschieht dieß in ganz ähnlichem Sinne.

---

* Dieselbe ist bis jetzt in 4 Heften bis zum Schlusse der Realschule ausgearbeitet und ist, als obligatorisches Lehrmittel für die zürcherische Volksschule, bei der Kantonsschulverwaltung zu beziehen; Schlüssel dazu in der Verlagshandlung von Fr. Schultheß in Zürich. Von allfälligen Beurtheilern unsers Handbuches, das mit dem genannten Lehrmittel ein Ganzes ausmacht, müssen wir billigerweise voraussetzen, daß sie auch dieses Lehrmittel ihrer Durchsicht würdigen.

Dann kommen zweckmäßig Uebungen folgender Art:

Hier liegen vor: 2 Hunderter, 3 Zehner und 3 Einer; wie viele Einer machen die zusammen aus? (zweihundertdreiunddreißig).

Ferner: 7 Hunderter, 8 Zehner und 9 Einer; wie viele Einer? u. s. f.

Dann: Dreihundertsiebenundzwanzig Einer haben wie viele ganze Hunderter, — dann noch wie viele Zehner — und noch wie viele Einer? — Wir wollen uns diese wirklich vorlegen. — So; hier sind 3 Hunderter, 2 Zehner und noch 7 Einer, zusammen also —? — u. s. f.

Lege mir nun in der gleichen Weise vor: zweihundertneunundachtzig Einer! u. s. f. (Durch mehrere Schüler).

Bezeichnung der neuen Zahlen durch Ziffern.

Wir wollen uns vorlegen: vierhunderteinundneunzig Einer. Wie viele Hunderter, — dann noch wie viele Zehner — und noch wie viele Einer müssen wir haben? — Nun wollen wir wie früher durch eine Ziffer zuerst die Hunderter (die größten Einheiten) aufschreiben; nun rechts davon durch eine Ziffer die Anzahl Zehner — und jetzt wieder rechts noch die Anzahl Einer! — So: 491. — Wie viele Einer bezeichnet das im Ganzen? oder wie viele Hunderter und dann noch Zehner und dann noch Einer?

Schreibet so auf: sechshundertvierundvierzig; achthundertzweiundsiebenzig u. s. f.

Wie viele Hunderter waren bei der ersten Zahl zu schreiben? Dann wie viele Zehner? dann noch wie viele Einer? — Wie schreibt man die Hunderter, die Zehner, die Einer?

Ebenso bei der zweiten Zahl! u. s. f.

Wir wollen einmal tausend durch Ziffern aufschreiben! — Wie viele Hunderter sind das? — Gut, 10 Hunderter und dann keinen Zehner und keinen Einer mehr. Wir schreiben also die 10 als Hunderter auf; rechts davon, wie man muß, keinen oder 0 Zehner und 0 Einer, also: 1000. Es bezeichnet auch 1000 einen ganzen Tausender und dann keinen oder 0 Hunderter, 0 Zehner und 0 Einer mehr.

Und so ähnlich für die Zahlen über 1000, wenn schon etwas weiter gegangen werden will.

Ferner: Wie viele Zehner haben 1 Hunderter; 2 Hunderter; 5 Hunderter; 7 Hunderter und 3 Zehner? u. s. f.

Wie viele ganze Zehner sind in 50, 560, 730, 607, 743 Einern?
Wie viele ganze Hunderter haben 30, 50, 74, 86 Zehner?
Endlich: Ich schreibe auf an der Tafel 766. Wie viele Einer bezeichnet das zusammen? — Oder: das bezeichnet zuerst wie viele Hunderter und noch wie viele Zehner und noch wie viele Einer?
Wir wollen wirklich so viele Stücke vorlegen.
Leset ebenso folgende Ziffern: 314; 748; 902; 888 ꝛc.
Wie viele Hunderter und dann noch Zehner und dann noch Einer hat jede?
Lege mir so viel vor, als die erste bezeichnet! u. s. f.
Nun vermischte Uebungen.

Zur stillen Selbstbeschäftigung können die Schüler die „Zwischenübungen" auf S. 4 des ersten Heftes unserer Aufgabensammlung lösen.

§ 45.

Zählübungen zur Befestigung des erweiterten Zahlgebietes.

A. Zuzählen.

a. Reine Zehner und hernach reine Hunderter.

1. 50 + 50 + 50 + 50 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000 *
   10 + 50 + 50 + 50 + " " " " " "
   20 + 50 + 50 + 50 + " " " " " "
   30 + 50 + 50 + 50 + " " " " " "
   40 + 50 + 50 + 50 + " " " " " "
   u. s. f. für beliebige Zehner.
2. 300 + 300 = ?
   200 + 200 + 200 + 200 + u s. f. bis gegen, auf, über 1000
   100 + 200 + 200 + 200 + " " " " " "
   300 + 300 + 300 + " " " " " "
   100 + 300 + 300 + " " " " " "
   200 + 200 + 300 + " " " " " "
   u s. f. für beliebige Hunderter. Dann auch:
3. 490 + 70 = ?
   360 + 30 + 30 + 30 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000
   350 + 30 + 30 + 30 + " " " " " "
   340 + 30 + 30 + 30 + " " " " " "
   u. s. f. für beliebige Zehner.

---

* Je nachdem es nämlich dem Lehrer den speziellern Verhältnissen seiner Schulklasse entsprechend erscheint.

4. 280 + 700 = ?
   150 + 400 + 400 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000
   250 + 400 + " " " " " "
   u. s. f. für beliebige Hunderter.

b. Zehner und Einer, Hunderter und Zehner, Hunderter und Zehner und Einer vermischt.

1. 135 + 36 = ?
   20 + 22 + 22 + 22 + 22 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000
   13 + 32 + 32 + 32 + " " " " " "
   47 + 48 + 49 + 50 + 51 + " " " " " "
   124 + 38 + 39 + 40 + 41 + " " " " " "
   205 + 17 + 35 + 72 + 69 + " " " " " "
   u. s. f.
2. 350 + 470 = ?
   190 + 200 + 210 + 220 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000
   230 + 240 + 250 + " " " " " "
   140 + 310 + 520 + " " " " " "
   u. s. f. Dann auch:
   413 + 210 = ?
   263 + 310 + 320 + " " " " " "
   145 + 270 + 520 + " " " " " "
   u. s. f.
3. 714 + 268 = ?
   129 + 130 + 131 + 132 + u. s. f. bis gegen, auf, über 1000
   312 + 313 + 314 + " " " " " "
   427 + 215 + 337 = ?
   508 + 23 + 260 + 17 + 9 = ?
   u. s. f. beliebig.

B. Wegzählen.

a. Reine Zehner und hernach reine Hunderter.

1. 900 — 70 = ?
   900 — 40 — 40 — 40 — u. s. f. . . .
   910 — 40 — 40 — 40 — " . . .
   920 — 40 — 40 — 40 — " . . .
   930 — 40 — 40 — 40 — " . . .
   u. s. f. für beliebige Zehner
2. 1000 — 300 = ?

1000 — 200 — 200 — 200 — u. s. f. . .
900 — 200 — 200 — 200 —
u. s. f. für beliebige Hunderter.
1010 — 700 = ?
1050 — 300 — 300 — u. s. f. . . .
950 — 300 — 300 — „ . . .
u. s. f. für beliebige Hunderter.

b. Zehner und Einer, Hunderter und Zehner, Hunderter und Zehner und Einer vermischt.

1. 300 — 35 = ? 600 — 78 = ? 900 — 93 = ?
780 — 62 = ? 947 — 73 = ? ꝛc.
400 — 12 — 13 — 14 — 15 — u. s. f. . . .
500 — 45 — 46 — 47 — 48 — „ . . .
670 — 68 — 69 — 70 — 71 — „ . . .
766 — 83 — 83 — 83 — 83 — „ . . .
u. s. f.
2. 1000 — 270 — 270 — 270 — u. s. f. . . .
990 — 310 — 310 — „ . . .
998 — 140 — 150 — 160 — „ . . .
967 — 240 — 110 — 330 — „ . . .
u. s. f.
3. 1000 — 143 = ? 1000 — 281 = ? 945 — 621 = ?
897 — 798 = ? ꝛc.
1000 — 214 — 214 — 214 — u. s. f. . . .
989 — 312 — 121 — 287 — „ . . .
1000 — 183 — 70 — 264 — 9 — 305 — ꝛc. . . .
u. dgl.

C. Zerlegen.

100 = 10 + 10 + 10 + u. s. f. . . bis es ausreicht.
250 = 25 + 25 + 25 + „ . . „ „ „
300 = 60 + 60 + 60 + „ . . „ „ „
720 = 90 + 90 + 90 + „ . . „ „ „
600 = 120 + 120 + 120 + „ . . „ „ „

u. s. f. siehe Seite 8, Heft I. der Rechnungsaufgabensammlung.

Es versteht sich von selbst, daß alle diese Zählübungen wie die frühern im zweiten Schuljahre zunächst vom Lehrer mit den Schülern unter der gewohnten Veranschaulichungsweise behandelt werden. Diese Uebungen

sind in erster Linie natürlich Uebungen im Kopfrechnen; das Rechnen mit Ziffernbezeichnung auch für die Zwischenresultate tritt erst später ein.

Zur Erzielung der rechten Festigkeit wird hier wie früher ein zweckmäßiges Zerlegen unerläßlich sein. Zudem übe man ebenfalls wie früher verschiedene Lösungsweisen, damit der Schüler allmälig dieses Stoffes vollständig Meister wird.

Z. B. $427 + 215 + 337 = ?$ Hier zählt man einmal, natürlich unter Hinweisung auf das Veranschaulichungsmaterial:

$400 + 200 + 300 = 900$; $900 + 20 + 10 + 30 = 960$; $960 + 7 + 5 + 7 = 979$

Dann $427 + 200 = 627$; $627 + 15 = 642$; $642 + 300 = 942$; $942 + 30 + 7 = 979$.

Dann $27 + 15 = 42$; $42 + 37 = 79$; $79 + 400 + 200 + 300 = 979$.

Dann $7 + 5 + 7 = 19$; $19 + 20 + 10 + 30 = 79$; $400 + 200 + 300 + 79 = 979$ u. s. w.

Wenn auch die einzelnen Zählweisen nur wenig von einander abweichen, so übt dieß doch auf die Schüler einen bildenden Einfluß aus; sie werden nicht durch eine starre Manier gefesselt, sie bewegen sich freier, selbstständiger.

In ähnlicher Weise und eben diesem Sinne werden die Beispiele fürs Wegzählen behandelt, z. B.

$989 - 312 - 121 - 289 = ?$ Da kommt etwa:

1) $989 - 300 - 100 - 200 = 389$; $389 - 10 - 20 - 80 = 279$; $279 - 2 - 1 - 7 = 269$.
2) $989 - 300 = 689$; $689 - 12 = 677$; $677 - 121 = = 556$; $556 - 200 = 356$; $356 - 80 - 7 = 269$.
3) $989 - 12 = 977$; $977 - 21 = 956$; $956 - 87 = = (956 - 90) + 3 = 866 + 3$; $869 - 300 - 100 - 200 = 269$.
4) $989 - (312 + 121 + 287) = 989 - 720 = 269$.
5) $989 - 2 - 1 - 7 = 979$; $979 - 10 - 20 - 80 = 869$; $869 - 300 - 100 - 200 = 269$. u. s. w.

In der angedeuteten Weise werden im I. Hefte der Rech.Aufgbs. die Uebungen bis Seite 8 gelöst. Es ist nicht durchaus nothwendig, alle einzelnen Aufgaben derselben zu lösen; in der einen Schule mag je nach Verhältnissen weggelassen werden, was man in der andern wohl noch bedarf.

Zum Abschluß dieser Stufe wird noch besondere Sorgfalt auf das Rechnen mit Zifferansatz und vorzüglich das „kurze Zifferrechnen" verwendet. Der Schüler ist indessen durch die freie, vielseitige Richtung der vorausgegangenen Uebungen so vorbereitet, daß er die hier vorkommenden Abkürzungen, wenn nicht gar selbst findet, doch sehr leicht einsieht. Es sei z. B. zur Addition gegeben:

105
31
240
113
56
317
25
101

Lehrer: Zählet alle Hunderter zusammen, dann alle Zehner, dann alle Einer. Wie viele Hunderter? — (8). Wie viele Zehner? — (16). Und wie viele Einer? — (28). Wie viel macht das zusammen? — (988). Hat es von den Einern her auch Zehner, von den Zehnern auch Hunderter gegeben? — Welche Reihe würde man daher wohl am vortheilhaftesten zuerst zusammenzählen? Und dann ꝛc. — Warum?

. . .

U. s. f. verschiedene Beispiele, bis der Schüler fast selbst aus freien Stücken zur bequemsten Ausrechnungsweise beim Zifferansatz kommt!

Beispiele zur Subtraktion mit Zifferansatz.

856	976	1000
— 735	— 583	— 769

Lehrer: Versucht, ob ihr von den Hundertern, Zehnern, Einern, welche die obern Ziffern bezeichnen, je die entsprechenden Hunderter, Zehner, Einer der untern wegzählen könnt! — Bei welchem Beispiel geht dieß leicht an? — Wo aber nicht leicht? ꝛc.

Nun leitet der Lehrer auf eine zweckmäßige Zerlegung des Minuendus hin, wodurch die beabsichtigte Wegzählung leichter möglich wird. Etwa beim zweiten Beispiele: 6 Einer — 3 Einer = 3 Einer; 17 Zehner — 8 Zehner = 9 Zehner; 8 Hunderter — 5 Hunderter = 3 Hunderter; beim 3ten: 10 Einer — 9 Einer = 1 Einer; 9 Zehner — 6 Zehner = 3 Zehner; 9 Hunderter — 7 Hunderter = 2 Hunderter.

Diese Art der Wegzählung mag für den Anfang dieses Zifferrechnens die natürlichste sein, weil sie am nahesten liegt. Die bekannte Subtraktionsweise, nach der man zu einer Stelle im Minuend eine Einheit vom nächst höhern Range hinzudenkt und dieselbe dann bei der folgenden Stelle wieder subtrahirt, — so wie die Art und Weise, nach welcher die Differenz durch Hinzuzählung zum Subtrahend gefunden wird — sind, obwohl prak-

tischer, für den Anfang doch noch zu schwer und können erst in der Folge mit rechtem Verständniß eingeführt werden.

Daß auch bei diesem Rechnen mit Zifferansatz die konkrete Veranschaulichung nicht immer bei Seite gesetzt werden darf, versteht sich wohl von selbst. — Die Uebungen in Heft I. der Rechnungsaufgabensammlung bis Seite 15 haben nun für die Schüler keine weitere Schwierigkeit mehr, als daß der Zahlumfang etwas weiter geht, als er hier absichtlich inne gehalten worden ist. Dieß muß der Lehrer eben beim Unterrichte besonders berücksichtigen; der Gang wird ja dadurch kein anderer. Diese Aufgaben zum Zu- und Wegzählen beziehen sich schon auf sehr mannigfaltige konkrete Dinge als zählbare Einheiten (die einfachern Münzen sind ebenfalls schon mit berücksichtigt); was zur Vorbereitung für das Nachfolgende unerläßlich ist. — Die vermischten Uebungsaufgaben auf Seite 15 haben keine weitern Schwierigkeiten.

§ 46.

Angewandte (eingekleidete) Rechnungsaufgaben.

Es ist frühe genug, mit solchen Aufgaben erst im dritten Schuljahre zu beginnen. Wir könnten es zwar nicht gerade tadeln, wenn der Lehrer bisweilen schon im zweiten Schuljahre eine einfache Zählaufgabe in eine kurze Erzählung einkleiden und sodann durch die Schüler lösen lassen würde; aber in eigentlichen fortlaufenden Uebungen dürfen solche Aufgaben da noch nicht auftreten, denn dieselben können erst recht gedeihen, wenn die Operationsfähigkeit in einem ordentlichen, fest erworbenen Zahlenumfange entwickelt und durch Beziehung auf ein sehr mannigfaltiges Zählmaterial geübt und gekräftigt worden ist. Wenn dieses in der rechten Weise geschah, so ist durchaus nicht zu befürchten, daß dadurch die Kinder gelangweilt worden seien; durch vielfache Abwechslung in der Form der Uebungen und durch ihre Beziehung auf mannigfaltige zählbare Dinge konnte das Interesse der Schüler rege genug erhalten werden. Bevor eine frische und kräftige Zahlauffassung erreicht ist, nützt alles Haschen nach eingekleideten Aufgaben nichts, ja es schadet oft, indem dadurch nicht selten der Erwerbung frischer und freier Zahlanschauungen Eintrag gethan wird. Dagegen ist in dem Frühern dennoch genug wirkliche Anwendung enthalten; dasselbe ist sogar vermöge seiner konkreten Richtung fast ausschließlich unmittelbare Anwendung.

Im I. Hefte der Rech.Aufgbs. finden sich von Seite 27 bis 32 einfache Aufgaben zum Zu- und Wegzählen in kurze Erzählungen eingekleidet. Die Schüler lösen dieselben folgendermaßen; z. B. beim Zusammenzählen:

Aufgabe 3. Emil spielt mit andern Knaben um Kugeln. Er verliert das eine Mal 12, das andere Mal 8 und das dritte Mal 9 Kugeln; wie viele hat er im Ganzen verloren?

12	Kugeln
8	„
9	„
29	Kugeln

Antwort: (12 + 8 + 9) Kugeln = 29 Kugeln od.:

Aufgabe 21. In einer Gemeinde wird am Examen jedem Schüler ein Brödchen gegeben. Wenn nun in dieser Gemeinde 3 Schulen sind, wovon die erste 175 Schüler, die zweite 124 und die dritte 187 Schüler zählt; wie viele Brödchen sind dann nothwendig? Antwort:

175	Brödchen.
124	„
187	„
486	Brödchen.

(175 + 124+187) Brödchen = 486 Brödchen od.:

Fürs Wegzählen z. B.:

Aufgabe 19. Ein Schäfer hat 870 Schafe; davon verkauft er 590 Schafe; wie viele bleiben ihm noch?

870	Schafe.
— 590	„
280	Schafe.

Antw.: (870 — 590) Schafe = 280 Schafe od.:

Aufgabe 25. Ein Verwalter gibt in einer Woche 1271 Franken aus und nimmt dagegen 740 Franken ein; wie viel hat er mehr ausgegeben als eingenommen?

1271	Frkn.
— 740	„
531	Frkn.

Antw.: (1271 — 740) Frkn. = 531 Frkn. oder

Ueber die speziellen Erklärungen von Seite des Lehrers sind hier keine Bemerkungen nöthig.

§ 47.

Fortsetzung der Uebungen im mehrfachen Zuzählen, Vervielfachen.

Die einfachern Multiplikationsverbindungen sind schon im zweiten Schuljahre behandelt worden. Nach diesem wären dieselben den Schülern im Kopfe schon ziemlich geläufig. Sobald dieß wirklich der Fall ist, wird die entsprechende Bezeichnung im Zifferansatze nunmehr vollständig befestigt.

Z. B. Wie vielmal 4 Kugeln sind (4 + 4 + 4) Kugeln? — Gut, also sind 4 Kugeln × 3 = (4 + 4 + 4) Kugeln = 12 Kugeln.

Schaut, man setzt die Anzahl, die mehrmals zu nehmen (zu zählen) ist, stets zuerst und dann rechts davon nach einem schiefen Kreuze („mal"), wie oft sie zu nehmen oder zu sich zu zählen ist.

So wird systematisch geübt und wiederholt angeschaut:

a. $1 \times 2 = 1 + 1 = 2$
$1 \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3$
$1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

u. s. f. bis $1 \times 9 = 9$. Dann:

$2 \times 2 = 2 + 2 = 4$
$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$
$2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

u. s. f. bis $2 \times 9 = 18$. So dann auch für die Zahlen 3; 4; 5 . . . bis 9.

Die Schüler werden darauf diese Ergebnisse nach den bekannten Gruppen des Einmaleins zusammenstellen. Durch vielfache Bildung und Uebung prägen sich dem Schüler diese Vervielfachungsresultate am besten als fertig abgeschlossene und erworbene ein. Nur nicht schlechtweg auswendig gelernt! Das müßten wir bei jedem Anlasse tadeln.

Die Aufgaben auf Seite 16 bis 18 im I. Hefte der Rech.Aufgbs. sind von dem Schüler leicht zu lösen. Derselbe wird hiedurch schon auf manche Eigenschaften der Vielfachen oder Produkte und ihrer Faktoren geführt; es bedarf hiezu keiner weitern Bemerkungen. Nun folgen:

b. $10 \times 1 = 10$
$10 \times 2 = 10 + 10 = 20$
$10 \times 3 = 10 + 10 + 10 = 30$
$10 \times 4 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$

u. s. f. bis $10 \times 9 = 90$.

$20 \times 1 = 20$
$20 \times 2 = 20 + 20 = 40$
$20 \times 3 = 20 + 20 + 20 = 60$
$20 \times 4 = 20 + 20 + 20 + 20 = 80$

u. s. f. bis $20 \times 9 = 180$.

So mit 30; 40; 50; 60 . . . bis 90. Dann:

c. $11 \times 2 = 11 + 11 = 22$ oder:
$11 \times 2 = (10 \times 2) + (1 \times 2) = 22$
$12 \times 2 = (10 \times 2) + (2 \times 2) = 24$
$13 \times 2 = (10 \times 2) + (3 \times 2) = 26$

und so beliebig weiter; dann auch dieselben zweistelligen Zahlen mit 3; 4; 5; 6; . . bis 9. Hierauf zweistellige Zahlen in beliebiger Folge, z. B.:

$16 \times 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9.$
$25 \times 2;\ 3;\ 4;\ .\ .\ .\ .\ .$
$37 \times 2;\ 4;\ 4;\ .\ .\ .\ .\ .$
$48 \times 2;\ 3;\ 4;\ .\ .\ .\ .\ .$
$79 \times 2;\ 3;\ 3;\ .\ .\ .\ .\ .$ u. s. f. Dann:

d. $100 \times 1 = 100;\ 200 \times 1 = 200;\ 300 \times 1 = 300$ u s. f.
$100 \times 2 = 200;\ 200 \times 2 = 400;\ 300 \times 2 = 600$
$100 \times 3 = 300;\ 200 \times 3 = 600;\ 300 \times 3 = 900$
$100 \times 4 = 400;\ 200 \times 4 = 800;\ 300 \times 4 = 1200$
u. s. f. ꝛc. ꝛc.

e. $135 \times 2 = 135 + 135 = 270$ oder:
$135 \times 2 = (100 \times 2) + (35 \times 2)$ oder: $= (5 \times 2) + (30 \times 2) + (100 \times 2$ ꝛc.$) = 270$ d. h die besondere Ausrechnungsweise wechselt ab, wie beim einfachen Zu- und Wegzählen.
$217 \times 2 = (200 \times 2) + (17 \times 2)$ oder $= (210 \times 2) + (7 \times 2)$ ꝛc. $= 434$
$448 \times 2 = (8 \times 2) + (40 \times 2) + (400 \times 2)$ ꝛc. $= 896$ u. s. f. Dann:
$332 \times 3 = (300 \times 3) + (32 \times 3)$ ꝛc. $= 996$ ꝛc. Ferner:
$108 \times 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9.$
$111 \times 1;\ 2;\ 3;$ ꝛc. $.\ .\ .\ .\ .$
$231 \times 1;\ 2;\ 3;$ „ $.\ .\ .\ .\ .$
$327 \times 1;\ 2;\ 3;$ „ $.\ .\ .\ .\ .$
$465 \times 1;\ 2;\ 3;$ „ $.\ .\ .\ .\ .$

f. $10 \times 10 = (10 + 10 + 10 + \ldots 10) = 100$
oder $= 1$ Zehner $\times 10 = 10$ Zehner $= 100$ ꝛc.
$20 \times 10 = 2$ Zehner $\times 10 = 20$ Zehner $= 200$
$30 \times 10 =$ ꝛc.
$40 \times 10 = \ldots$
u. s. f. bis $90 \times 10 = 900$. Dann:
$10 \times 20 = (10 \times 10) \times 2 = 100 \times 2 = 200$
$20 \times 20 = 40 \times 10$ ꝛc. $= 400$
$30 \times 20 = 300 \times 2$ ꝛc. $= 600$
$40 \times 20 = 80 \times 10$ ꝛc. $= 800$
u. s. f. Dann für folgende Zehner, so weit der Lehrer hier noch zu gehen für zweckmäßig erachtet. Er dürfte vielleicht auch eine aus Zehnern und Einern gemischte Zahl mit reinen Zehnern multipliziren lehren, wie sich hie-

von im I. Hefte der Rech.Aufgbs. ebenfalls Beispiele finden. Es ist dieß aber hier viel weniger wesentlich als das, daß die Schüler die Vervielfachung mit einem einstelligen Multiplikator innerhalb des vorgeschriebenen Zahlumfanges recht sicher aufgefaßt haben und geläufig auszuführen wissen. Natürlich wird auch hier bei allen obigen Vervielfachungen die Einübung durchs Kopfrechnen derjenigen durchs Zifferrechnen vorangehen. Da der Schüler bei diesem jeden möglichen Gang befolgen kann, so wird er hiebei allmälig von selbst darauf kommen, welches der bequemste ist.

§ 48.

Uebungen im Entvielfachen.

Die Uebungen gliedern sich hier ähnlich, wie bei der Multiplikation; nur muß da schon aufs Theilen und Messen Rücksicht genommen werden. Die reinen Umkehrungen der einfachern Einmaleinsübungen haben die Schüler schon im Frühern aufgefaßt; nun wird hier noch spezieller nach den beiden angedeuteten Richtungen eingetreten.

a. Grundübungen zur Auffassung des Messens oder Enthaltenseins.

Z. B. Von 2 Kugeln lassen sich 2 Kugeln wie manchmal wegzählen?

" 4 " " " 2 " " " "
" 6 " " " 3 " " " "
" 6 " " " 2 " " " "
" 8 " " " 4 " " " "
" 9 " " " 3 " " " "
" 10 " " " 5 " " " "

u. s. f. siehe Seite 21 Heft I. der Rechnungsaufgabensammlung.

Der Lehrer läßt unter wirklicher Veranschaulichung die Uebung in folgender Weise auffassen und lösen, z. B.:

Von 6 Kugeln kann man 3 Kugeln 2 mal wegzählen oder
in 6 " sind 3 " 2 " enthalten.

Das schreibt man kurz so: 6 Kugeln : 3 Kugeln = 2.

Hier gibt der Lehrer die nöthigen Erklärungen über die Zeichen und die Stellung der Operationsglieder; er hält durchaus fest darauf, daß die Zahl, von welcher ein Mehrfaches abgezogen werden soll, zuerst (links) geschrieben wird; also Dividendus, dann Divisor, dann Quotient, siehe die frühern Betrachtungen in § 14 β.

b. Grundübungen zur Auffassung des Theilens.

z. B. Von 6 Kugeln kann man 3 mal wegnehmen wie viele Kugeln?
„ 6 „ „ „ 2 „ „ „ „ „
„ 8 „ „ „ 4 „ „ „ „ „
„ 9 „ „ „ 3 „ „ „ „ „
„ 10 „ „ „ 5 „ „ „ „ „

u. s. f. siehe Seite 22 Heft I. der Rechnungsaufgabensammlung.

Die Auffassung und Lösung ähnlich wie oben; ebenso die Einführung in den Zifferansatz. Z. B.:

Von 6 Kugeln kann man 3 mal wegnehmen 2 Kugeln, oder von 6 Kugeln der 3te Theil genommen gibt 2 Kugeln,
d. h. kurz: 6 Kugeln : 3 = 2 Kugeln.

Hierauf Divisionsbeispiele folgender Art (ohne Reste):

Wie vielmal wegzählen. Enthaltensein.	Wie viel wegzählen. Theilen.
16 Kugeln : 8 Kugeln = ?	16 Kugeln : 8 = ?
20 „ : 5 „ = ?	20 „ : 5 = ?
21 „ : 3 „ = ?	21 „ : 3 = ?
24 „ : 6 „ = ?	24 „ : 3 = ?

u. s. f. siehe Heft I. der Rechnungsaufgabensammlung, Seite 22 und 23, besonders Uebung 4, in welcher die zu dieser Operationsstufe gehörenden Redensarten eigens zur Einübung vorgeführt werden.

Dann (mit Rest):

Enthaltensein.	Theilen.
16 Rappen : 5 Rappen = ?	16 Rappen : 5 = ?
19 „ : 5 „ = ?	19 „ : 5 = ?
27 „ : 7 „ = ?	27 „ : 7 = ?
30 „ : 9 „ = ?	30 „ : 9 = ?

u. s. f. (s. S. 23 u. 24, Heft I d. Rech.Aufgbs., besonders die einleitende Uebung 5).

Auflösung:

a. Von 27 Rappen kann man 7 Rappen 3 mal wegzählen und dann bleibt noch ein Rest von 6 Rappen; kurz, 27 Rappen : 7 Rappen = 3 und bleiben 6 Rappen Rest; denn (7 Rpn. × 3) + 6 Rpn. = 27 Rappen.

b. Von 27 Rappen kann man 7 mal wegnehmen 3 Rappen und dann bleibt noch ein Rest von 6 Rappen; kurz:

27 Rappen : 3 = 7 Rappen und bleiben 6 Rappen Rest; denn (3 Rappen × 7) + 6 Rappen = 27 Rappen.

Die Kinder müssen diese Bedeutung des Divisionsansatzes durchaus fest und sicher inne haben. Operationsausdrücke, die fremde Wörter sind, dürfen hier noch nicht gebraucht werden, wenn man will, daß die Kinder bei dem, was sie sprechen und thun, auch das Rechte denken. Für die beiden Richtungen der Division dürften in Uebereinstimmung mit dem Ansatze zunächst folgende Ausdrücke sich am besten eignen, z. B. für die obigen Ansätze unter α und β:

In 27 Rappen sind (oder liegen) 7 Rappen 3 mal (enthalten) und bleiben 6 Rappen Rest. Von 27 Rappen ist der siebente Theil 3 Rappen und bleiben 6 Rappen Rest. Die noch kürzern: 27 Rappen durch 3 Rappen (gemessen) = 9 und 27 Rappen durch 3 (getheilt, dividirt) = 9 Rappen sind für den Anfang schon zu wenig verständlich und dürfen erst im spätern Verlaufe des Unterrichtes aufgenommen werden.

Es folgen nun innerhalb des durchlaufenen Zahlgebietes beliebige Divisionsbeispiele mit einstelligen Divisoren, wobei die Quotienten zweistellig werden (siehe Heft I der Rechnungsausgabensammlung, S. 24 und 25), z. B. 172 : 4 = 43; 994 : 9 = 110 (Rest 4) ꝛc.

Die Ausführung nach Theilen und Messen geschieht unter Vorlegung des bekannten Anschauungsmaterials folgendermaßen:

a. Theilen. Von 17 Zehnern ist der vierte Theil = 4 Zehner, denn diese geben 4 mal genommen 16 Zehner; es bleiben noch 1 Zehner und 2 Einer oder 12 Einer, und davon ist der vierte Theil gerade 3 Einer; also ist von 172 der vierte Theil genau 43, denn diese kann man geradeaus 4 mal von 172 wegnehmen. Aehnlich fürs zweite Beispiel.

b. Messen. Dasselbe ist hier schon ein wenig schwerer als das Theilen. Es bedarf hier folgende Vorübungen: In 1 Zehner ist 1 Einer 10 mal (enthalten), denn man kann 10 mal 1 Einer von 1 Zehner wegnehmen; in 2, 3, 4 ꝛc. Zehnern liegen 2, 3, 4 ꝛc. Einer 10 mal, denn ꝛc.; in 6 Zehnern sind 3 Einer 20 mal ꝛc.; in 1 Hunderter liegt 1 Einer 100 mal, denn ꝛc.; in 2 Hunderter 2 Einer 100 mal ꝛc.; in 4 Hunderter 2 Einer 200 mal ꝛc. Nun das zweite obige Beispiel: In 9 Hundertern liegen 9 Einer 100 mal, in 9 Zehnern 10 mal; zuletzt bleiben noch 4 Einer; also sind in 994 die 9 zunächst 110 mal enthalten, und dann bleibt

noch 4 als Rest; oder von 994 kann man 9 wegnehmen 110 mal, und dann bleiben noch 4. U. s. f.

Daß die Veranschaulichung hiebei nicht fehlen darf, haben wir schon gesagt; daß sie sehr leicht ist, leuchtet ohne Weiteres ein. Bis hieher wäre im reinen Rechnen die Hauptaufgabe dieses Schuljahres gelöst, und es ist gar nicht durchaus nothwendig, noch zu den Divisionen mit zweistelligem Divisor überzugehen; wenn nur die angedeuteten fest und sicher (*ohne* und *mit* Zifferſatz, d. h. als Kopf- und Zifferrechnen) gehen. Die Beispiele der schon citirten Uebungen 6, 7, 8 auf S. 24 und 25 gelten natürlich zunächst fürs Kopfrechnen unter Benutzung der bekannten Veranschaulichungsmittel. Wenn ein Lehrer noch weiter kommt, so folgen zu ähnlicher Behandlungsweise die Uebungen 9, 10, 11 auf S. 25 und 26 im gleichen Hefte. Die Uebung 12 zur Kenntniß der Eigenschaften der Zahlen nach ihrer Bildung durch die vier Zählformen werden die Schüler jedenfalls lösen können; es dient ihnen dieß zur Wiederholung des in der Elementarschule im Rechnen Aufgefaßten und bildet einen guten Anlaß zu stillen Aufgaben. Z. B.: Bildet auf verschiedenartige Weise durchs Zu- und Wegzählen, Vervielfachen und Entvielfachen die Zahl 48! Die Schüler werden etwa finden:

$48 = 40 + 8 = 30 + 18 = 15 + 15 + 15 + 3 = 10 + 10 + 10 + 10 + 8$ ꝛc.

$= 12 + 12 + 12 + 12 = 12 \times 4 = 8 . 6 =$ ꝛc.

$= 50 - 2 = 100 - 52$ ꝛc.

$= 96 : 2 = 240 : 5$ ꝛc.

$= (10 \times 4) + 8 = (6 \times 6) + 12 = (7 \times 7) - 1$ ꝛc.

So für andere beliebige Zahlen.

Hieher gehören auch folgende Aufgaben: Suchet der Reihe nach diejenigen Zahlen, die sich durch 2 ohne Rest entvielfachen lassen (gerade Zahlen). Nun diejenigen, die durch 2 entvielfacht 1 zum Rest übrig lassen (ungerade Zahlen). Welche Zahlen lassen sich ohne Rest durch 3, 4 ꝛc. entvielfachen? Z. B. durch 3 gehen 3, 6, 9, 12, 15 u. s. f.

§ 49.

Eingekleidete Aufgaben.

Es folgen nun in einer dem Alter entsprechenden Einfachheit eingekleidete Uebungsbeispiele fürs Vervielfachen und Entvielfachen (siehe das Lehrmittel, Heft I, S. 32 bis Schluß). Wer nicht mehr zu den Aufgaben mit

zweistelligem Divisor übergegangen ist, hat die hierauf bezüglichen Beispiele nur wegzulassen. Die Beispiele werden im Kopfe sowohl als auf der Tafel gelöst. Die Ausführung beim Zifferrechnen kann etwa in folgender Weise geschrieben werden:

1. Multiplikation. Z. B. Aufgabe 13, a: Ein Bündchen Federn hat 25 Federn; wie viele Federn haben 7 solche Bündchen? Ausführung:

   1 Bündchen hat 25 Federn,

   7 Bündchen haben 25 Federn × 7 = 175 Federn;

   oder Aufgabe 7, c; 365 Tage machen ein Jahr aus; wie viele Tage sind 3 Jahre? Ausrechnung: 1 Jahr = 365 Tage; 3 Jahre = 365 Tage × 3 = 1095 Tage.

2. Division. Z. B. Aufgabe 6, a, 1: Sechs Brüder haben 192 Frkn. gleichmäßig unter sich zu vertheilen; wie viel bekommt einer? Ausführung: Einer bekommt den sechsten Theil von 192 Frkn., d. i. 192 Frkn. : 6 = 32 Frkn.;

   oder Aufgabe 3, a, 2: Zwei Knaben theilen Kugeln, der erste nimmt allemal 8, während der zweite 1 Kugel. Wenn nun so der erste 280 Kugeln bekommen hat; wie viel hat dann der zweite? Ausrechnung: Der zweite hat 8 mal weniger als der erste, also den achten Theil von 280 Kugeln, das sind 280 Kugeln : 8 = 35 Kugeln.

   oder Aufgabe 13, b: Wie viele Wochen sind 798 Tage? Ausführung: So oft man 7 Tage hat, so oft hat man 1 Woche; nun sind 798 Tage : 7 Tage = 114; also sind 798 Tage = 114 mal 7 Tage = 114 Wochen.

Die vermischten Beispiele V haben keine weiteren Schwierigkeiten.

Dritte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht

auf der zweiten Schulstufe;

Realschule.

I.

Viertes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem neunten und zehnten Altersjahre.

§ 50.

Aufgabe.

Die spezielle Aufgabe dieses Schuljahres ist: Erweiterung des Zahlgebietes bis zu den Zehntausendern, höchstens bis zum Hunderttausender, und dessen Befestigung durch die vier Zählformen, deren Abstammung und Verwandtschaft dem Schüler nunmehr zum völligen Bewußtsein gebracht werden soll. Ferner die einfachen Operationssätze als Anwendungen aus demjenigen Kreise des realen Lebens, der dem Schüler am nächsten liegt; der Form nach: 1. Einfache Operationssätze mit einfach benannten Zahlen. 2. Einfache Operationssätze mit mehrfach benannten Zahlen.

§ 51.

Erweiterung des Zahlenraumes bis zu den Zehntausendern, höchstens bis zum Hunderttausender und Bezeichnung der neuen Zahlen durch die entsprechenden Ziffern.

A. Zur Zahlbildung.

Diese Erweiterung wird wie die frühern nicht mit Hülfe von Ziffern, sondern mit Herbeiziehung der bekannten Zahlveranschaulichungsmittel durch Zuzählung erzweckt; ist also zunächst reines Kopfrechnen.

Die Schüler können den Tausender zählen; sie haben ihn als Kollektiveinheit etwa unter der äußern Form des Tausenderwürfels aufgefaßt (z. B.

den Kubikfuß als 1000 Kubikzoll oder den Kubikzoll als 1000 Kubiklinien). Dann stellen 10 solche Würfel (z. B. ein Stab von 10 Kubikzollen) 10 Tausender oder den Zehntausender, 10 solche Stäbe (z. B. eine Platte derselben) 10 Zehntausender, oder 100 Tausender, oder 1 Hunderttausender dar, wozu der kleine Würfel, der eine Kubiklinie bildet, die Einheit ausmacht. Die Schüler zählen also unter beständiger Vorlegung der realen Quantität: 1 Tausender, 2 Tausender, 3 Tausender, ... bis 10 Tausender oder 1 Zehntausender, dann 2 Zehntausender, 3 Zehntausender, ... bis 10 Zehntausender oder 1 Hunderttausender.

Bevor man so weit hinaufsteigt, kann man auch zuerst die zwischenliegenden Zahlen bilden. Es wird z. B. vorgelegt der Tausender- und ein Einerwürfel und gezählt tausendundeins, dann ähnlich tausendundzwei u. s. f. der Reihe nach, bis die Schüler von selbst den Bildungsgang merken; dann werden nur noch einzelne Zahlen von je einer gewissen Art veranschaulicht. Z. B.: Wir wollen uns vorlegen 6357 Einer. Hier nehme ich sechs Tausenderwürfel, die haben 6000 Einer, dazu lege ich noch 3 Hunderterplättchen, das macht zusammen 6300 Einer, wieder dazu 5 Zehnerstäbchen, das macht mit dem frühern 6350 Einer und jetzt noch 7 Einerwürfelchen, macht im Ganzen 6357 Einer aus. Lege mir ebenso 3949, 9471 Einer vor! ꝛc. Ebenso 45786 Einer! Zuerst 4 Zehntausender, dann 5 Tausender, dann 7 Hunderter, 8 Zehner und 6 Einer! u. s. f. manche Beispiele.

Nun dieselbe Zahlveranschaulichung etwa nach einer Dimension. — Wir wollen sehen, wie stark das ausgeben würde, wenn wir die Einer nur in einer Reihe an einander legen würden! Ich bezeichne hier an die Wand ein ganz kurzes Strichlein (etwa 1‴ neues Schweizermaß). Wie viel ist nun ein Zehner? — Gut, 10 solche zusammen. (Dieses zehnfache wird dargestellt durch einen zolllangen Strich.) — Wie viel ein Hunderter? (Es wird die Länge eines Fußes dargestellt.) — Wie viel ein Tausender? (Die Länge von 10′.) — Nun wollen wir so darstellen 1478 solche Linien! Zuerst 1 Tausender, dann (in der Verlängerung) 4 Hunderter (4′), dann ebenso 7 Zehner und 8 Einer! Könntet ihr so noch darstellen 2195 solche Einer? — Was zuerst? — Und dann? ꝛc. — Aber 9970 solche Einer! Da müßten wir schon weit über unser Zimmer hinaus. Der Lehrer kann ein solches Beispiel andeutungsweise, später etwa einmal wirklich im Freien bei den Meßübungen ausführen. — Diese Zahlveranschaulichung nach verschiedenartiger äußerer Anordnung ist, wie wir wiederholt bemerken müssen, sehr nothwendig, wenn die Schüler freie und kräftige Zahlbegriffe erwerben sollen.

So werden in mannigfaltigen Uebungen auf dem Wege der wirklichen Anschauung und Darstellung die Zahlbegriffe in erweitertem Umfange entwickelt, bis der Schüler die gehörige Festigkeit beurkundet.

B. Zur Bezeichnung der neu erworbenen Zahlen.

Die Bezeichnung der neuen Zahlen durch Ziffern hat nunmehr für den Schüler fast keine Schwierigkeiten mehr. Er kann jede Zahl richtig in ihre dekadischen Einheiten zerlegen, und so wird er auch leicht nach der früheren Regel: daß das Größte zuerst geschrieben und so das Folgende rechts angereiht wird, die entsprechenden Ziffern schreiben.

Zuerst sind Uebungen, wie die folgenden, zweckmäßig, z. B.: Wie viele Zehntausender, dann noch Tausender, Hunderter, Zehner und Einer haben elftausendsiebenhundertunddreißig, fünfundsiebenzigtausendvierhundertunddrei ꝛc.? — Wie viele Einer machen zusammen 7 Zehntausender, 5 Tausender, 3 Hunderter und 4 Einer aus? u. s. w. Wir schreiben die zweite der beiden ersteren Zahlen an; also zuerst wie viele Zehntausender? (7) — dann wie viele Tausender? (5) — dann wie viele Hunderter? (4) u. s. f., also zusammen 75403. Wir wollen so viele Einer wirklich vorlegen. — ꝛc. Nun schreibe ich 41567. Wie viel bezeichnet dieß? Wie viele Zehntausender? dann noch Tausender? ꝛc., also zusammen? — U. s. f. viele Uebungen, bis Schreiben und Lesen solcher Ziffern mit richtiger Einsicht und Sicherheit gehen.

Hierauf können die Schüler zur Befestigung die Zwischenübungen in der Rechenaufgabensammlung, Heft II, S. 2, lösen.

§ 52.

Uebungen im Zu- und Wegzählen innerhalb des erweiterten Zahlumfanges.

Die Uebungen können hier ähnlich gegliedert werden wie im vorigen Schuljahre: der Lehrer läßt zuerst reine Hunderter bis in den erweiterten Zahlenraum hinaufzählen, alsdann reine Tausender ꝛc., dann vermischt und endlich mitverbunden mit Zehnern und Einern. Ebenso das Wegzählen. Nach diesen Einleitungsübungen, die durch das Anschauungsmaterial bis zur Geläufigkeit und Fertigkeit unterstützt werden *, folgen die Aufgaben

* Schon Kästner sagt in seiner Geschichte der Mathematik über den Gebrauch des Rechenbrettes, das eine ähnliche Bedeutung hat wie die Zählrahme (oder der Zählrahmen): »Ich würde die Anfänger nur auf dem Rechenbrette addiren oder subtrahiren lassen, damit sie feste und bestimmte Vorstellungen erhalten.«

im zweiten Hefte der Aufgabensammlung unter A und B in gleichem Sinne wie früher.

Wenn durch die einfachern Beispiele das Kopfrechnen entsprechend geübt worden ist, so wende man dem Zifferrechnen diejenige Aufmerksamkeit zu, durch welche es zur rechten geistigen Freiheit und Sicherheit gelangt. Man lasse den Schüler die mannigfaltigsten Verfahrungsweisen einschlagen, um dieselben Zählungsergebnisse zu erhalten; dadurch wird er angeleitet, seine Rechnungen zu verifiziren; er gelangt zunächst zur Operationsprobe. Man verlange vom Schüler, daß er sich bei jeder Rechnung auf solche Weise überzeuge, ob er das rechte Resultat habe; so wird er zum vorsichtigen und zuverlässigen Rechner. Was nützt eine noch so große Menge berechneter Beispiele, wenn nur wenige oder gar keine richtige Resultate herausgekommen sind und der Schüler dadurch weder ein zuverlässiger noch freier Rechner geworden ist?

Beispiele zur Ausführung von Additions- und Subtraktionsaufgaben mit mehrstelligen Zahlen: Z. B. 1) aus Uebung 3, Seite 3, Heft II:

24507	Rppn.	Die Schüler mögen die Posten in der beliebigsten Aufeinanderfolge addiren, oder dieselben zu beliebig vielen Partialadditionen verbinden und aus deren Summen die Gesammtsumme bilden. Jedenfalls müssen sie daran gewöhnt werden, auf verschiedene Arten das rechte Resultat zu finden (man lasse sie selbst solche Additionsweisen aufsuchen), um dadurch desselben sicher zu sein. Dieß ihre Operationsprobe.
12034	=	
10123	=	
12711	=	
41978	=	
13591	=	
23760	=	
21291	=	
10970	=	
31456	=	Wie beim Zählen nach Vertikalreihen mit den einzelnen Summen wieder verfahren werden könne, darauf wird man die Schüler ebenfalls aufmerksam machen. Welches sind diese von einander abweichenden Verfahrungsweisen?
20044	=	
10923	=	
2653		
233388	=	

Ferner: 3) aus Uebung 3, Seite 5.

		Diese Beispiele werden zunächst nach der gleichen Art wie im dritten Schuljahre, nämlich mittelst der nöthigen Zerlegung der Stellen im Minuend gelöst, dann etwa auch durch Zuzählung zum Subtrahend, bis der Minuend herauskommt. Durch Anwendung dieser verschiedenen Lösungsweisen ergibt
86540	Frkn.	
21999	=	
64541	=	

15937 Maß.
12898 "
3039 "

sich für den Schüler die Kontrole oder Probe für sein Verfahren. Die Lösungsweise, nach der zu einer kleinern Stelle im Minuend eine nächst höhere Einheit hinzugedacht und dann wieder mit der folgenden Stelle des Subtrahends abgezogen wird, mag vielleicht noch eine Zeit lang aufgespart bleiben.

§ 53.

Erweiterte Uebungen im Vervielfachen und Entvielfachen.

Es folgen die Multiplikations- und Divisionsübungen mit ein-, zwei-, drei- ... stelligem Multiplikator und Divisor innerhalb des vorgeschriebenen Zahlumfanges, siehe in Heft II der Rechnungsaufgabensammlung C und D, Seite 7 bis 12.

1) Eine mehrstellige Zahl mit einer einstelligen zu multipliziren, bietet für den Schüler keine Schwierigkeiten, er hat einfach jede Stelle jener Zahl mit dieser zu multipliziren und alles zusammenzufassen. Die Multiplikation mit reinen Zehnern, Hundertern ꝛc. ist ebenfalls leicht, wenn man zuerst das 10- oder 100fache ꝛc. nimmt und dieses dann noch so oft, als man Zehner, Hunderter ꝛc. hat. Z. B.:

$24005 \times 3 = 72015$; $2407 \times 40 = (2407 \times 10) \times 4 =$ *
$= 24070 \times 4 = 96280$ oder $= (2407 \times 4) \times 10 = 96280.$
Nun ähnlich $482 \times 15 = (482 \times 10) + (482 \times 5) = 7230$
und $917 \times 172 = (917 \times 2) + (917 \times 70) + (917 \times 100) =$
$= 157724$;

oder im Ansatz:

482×15	917×172
482	1834
2410	6419
	917
7230	157724

* Vierzig Posten (Summanden) können in 4 Gruppen zerlegt werden, von denen jede 10 Posten umfaßt, oder in 10 Gruppen von je 4 Posten; also $2407 \times 40 =$ 4 Gruppen, von denen jede (2407×10) zählt; also ist das Ganze $= (2407 \times 10) \times 4$. Oder es sind auch $2407 \times 40 = 10$ Gruppen, wovon jede (2407×4) zählt, das Ganze daher auch $= (2407 \times 4) \times 10$. Aehnlich kann jede andere Multiplikation mit Zehnern oder Hundertern ꝛc. aufgefaßt werden.

Die bekannten Abwechslungen in der Ausrechnung, die Vertauschung der Faktoren ꝛc. benutze der Schüler auch hier zur Operationsprobe, damit er sich selber stets Gewißheit verschaffe, daß er das rechte Resultat habe. Die vorausgehenden Uebungen im Kopfe (Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen, Multiplikation von Stellenwerthen wie in Uebung 3, Seite 8, Heft II ꝛc.) bilden hier natürlich die Grundlage: dieselben müssen in mannigfaltiger Weise öfter wiederkehren. Die entsprechende Behandlungsweise, auch mit Rücksicht auf die Veranschaulichung, so weit dieselbe hier noch nothwendig ist, ist leicht.

2) Beim Dividiren darf ziemlich lange bei der Division einer mehrstelligen Zahl durch eine einstellige verweilt werden, damit hierin eine sichere Grundlage erreicht wird. Die Uebungen im Kopfe wie Uebung 3, Seite 10 und 11, Heft II, ebenso wie die erstern Aufgaben in Uebung 1, Seite 9, werden besonders sorgfältig durchgenommen; dann folgen Uebungen im Kopfe mit zweistelligen Divisoren, hier aber nur einfachere und leichtere Beispiele, wie 120 : 12; 153 : 10; 268 : 13; 970 : 30; 1250 : 25 ꝛc. Schnell schätzen, wie viel Ganze es für je eine Stelle im Quotienten gibt, und dann die Annahme sicher untersuchen ist hier die Hauptsache! Hierauf die Divisionsaufgaben, wie sie in Heft II bis Seite 12 folgen.

Ausführung von ein paar Beispielen mit Zifferansatz:

Ueb. 1, 14) 65872 : 8 = 8234;

1
2
3
0 Rest.

Das Theilen ist hier leichter als das Messen. Man hat hier zunächst: Der achte Theil von 65 Tsdr. ist = 8 Tsdr., denn diese geben 8 Mal genommen 64 Tsdr., also bleibt von 65 Tsdrn. noch 1 Tsdr. Der achte Theil von 18 Hundertern ist = 2 Hunderter u. s. f. bis 0 Rest. Beim Enthaltensein hat man: Es ist 8 in 65 Tsdrn. 8000 Mal enthalten, denn 8 × 8000 gibt 64 Tsdr.; diese lassen von 65 Tsdrn. übrig 1 Tsdr. In 18 Hundertern ist nun 8 200 Mal enthalten, denn u. s. f. bis 0 Rest. Beim zweiten Beispiel geht die Ausführung ganz ähnlich; nur müssen hier die Schüler schon geübt sein im Schätzen. Die Theilprodukte mögen hier noch angeschrieben werden, später, etwa im folgenden Jahre, wenn die Schüler in der Subtraktion recht bewandert sind, werden jene Produkte gleich vom Dividenden und dessen einzelnen Resten abgezogen. — Wie das Resultat

Ueb. 2, 12) 123900 : 37 = 3348

111
12
111
18
148
32
296
24 Rest.

auf verschiedene Weise durch Multiplikation geprüft werden kann, ist leicht einzusehen. Der Schüler darf diese Prüfung nicht auslassen.

§ 54.

Operationen mit mehrfach benannten Zahlen.

Mit diesen Uebungen ist die Verwandlung in unter- oder übergeordnete Einheiten durch Multiplikation und Division ebenfalls verbunden. Die Ausführung ist nur insoweit schwerer, als hier Mehreres auf einmal vereinigt auftritt und die Rechnung dadurch etwas weitläufiger wird. Aus diesem Grunde eignen sich nur die allereinfachsten dieser Aufgaben zum Kopfrechnen, z. B. 3 Ztr. 57 ℔ + 28 Ztr. 48 ℔ = ?; 5 Stunden 12 Minuten − 1 Stunde 20 Minuten = ?; (9 Wochen 3 Tage) × 12 = ? (18 Malter 7 Viertel) : 5 = ?; (5 Frkn. 34 Rppn.) : (1 Frkn. 3 Rppn.) = = ? ꝛc.

Die Aufgaben in Heft II von Seite 13 bis Seite 23 werden schriftlich gelöst. Wir setzen beispielsweise einige Lösungen hieher:

p. 16; 11) 17 Ztr. 24 Pfd. 10 Lth.
69 = 13 = 31 =
7 = 98 = 25 =
68 = 14 = 12 =
123 = 29 = 5 =
57 = 48 = 26 =
321 = 68 = 17 =
456 = 79 = 1 =
876 = 54 = 30 =
157 : 32 = 4.
1998 Ztr. 31 Pfd. 29 Lth.

p. 18; 13) 310 Ries 7 Bch. 18 Bg.
20 24
− 198 − 18 − 20
111 Ries 8 Bch. 22 Bg.

p. 20; 29) 917 Jahr 4 Mt. 21 Tg. × 12.
11004 48 252
4 8
11008 Jahr 8 Mt. 12 Tg.

p. 21; 19) 1278 Pfund 341 Gram. : 104 = 12 Pfund 147 Gram.
23 15341
30 49
78
53 Gr. Rest.

p. 23; 15) 50 Ztr. 23 Pf. 8 Lth. : 12 Pf. 4 Lth. = 160744 Lth. : 388 Lth. = 414
5023 × 32 12 × 32 55
10046 384 166
15069 8 4 112 Loth Rest.
160744 Loth. 388 Loth.

Es ist hier so leicht wie früher, durch ein abweichendes, aber richtiges

Verfahren die gefundenen Resultate zu prüfen. Der Schüler werde strenge dazu angehalten!

§ 55.

Eingekleidete Aufgaben.

Nach dem bis jetzt durchgenommenen Rechnungsstoffe werden diese Aufgaben Einkleidungen von einfachen (getrennten) Operationssätzen mit ein- und mehrfach benannten Zahlen sein. Hier ist nun der Ort und ist es auch an der Zeit, mit den Schülern etwas einläßlicher in den Zusammenhang und die gegenseitige Verwandtschaft der Operationen und ihre Einkleidung in bestimmte Rechnungsbeispiele einzutreten. Der Lehrer kann nach Belieben entweder zuerst den einfachen Entwicklungsgang der einzelnen Operationen aus dem Zählen und hierauf deren Einkleidung in bestimmte Aufgaben ins Auge fassen, oder er kann beide Gesichtspunkte zugleich vereinigen. Wir wollen der größern Einfachheit wegen den letztern Gang durch ein Beispiel kurz andeuten. Der Lehrer legt dem Schüler einen einfachen Additionssatz in einer Aufgabe vor, z. B.: Ein Hausvater gibt für seine Haushaltung in einer Woche 25 Frkn., in der folgenden 31 Frkn. aus; wie viel hat er im Ganzen ausgegeben? — Die Schüler werden bald finden: der Vater gibt im Ganzen (25 + 31) Frkn. = 56 Frkn. aus. Welche Zahlen sind in dieser Aufgabe angegeben? — Und was wird dann gefragt? — Wie wird das gefunden? — Nun seht, eine Rechnungsaufgabe, in der man das, wornach gefragt wird, durch Zusammenzählung zweier oder mehrerer Zahlen findet, bildet einen Zusammenzählsatz (Additions-Satz oder -Aufgabe). Die zum Zusammenzählen gegebenen Zahlen nennt man Posten (Summanden) und ihr Ergebniß, das so groß ist, wie sie zusammen, Summe.

Würde es in obiger Aufgabe heißen, daß der Vater in der ersten Woche 25 Frkn., in beiden Wochen im Ganzen aber 56 Frkn. ausgegeben hätte, wie könnte man dann finden, welches die Ausgabe in der zweiten Woche war? — Was findet man, wenn man von der ganzen Ausgabe in den beiden Wochen die Ausgabe der ersten Woche wegzählt? — Also gab er in der zweiten Woche (56 — 25) Frkn. = 31 Frkn. aus. Die Zahl, welche die Summe ist (56 Frkn.), nennt man hier Vollzahl (Minuend); der Posten (25 Frkn.), der von der Vollzahl weggezählt den andern Posten gibt, heißt Abzugszahl (Subtrahend) und jener andere Posten (31 Frkn.), den man sucht, heißt Unterschied (Differenz). Das

Wegzählen ist also die Umkehrung vom Zusammenzählen; was man bei diesem sucht, ist bei jenem bekannt, und was man bei jenem sucht, ist bei diesem bekannt. (Der Lehrer muß hier noch spezieller sein, wir deuten nur kurz an.) Eine Rechnungsaufgabe, die durchs Wegzählen gelöst wird, bildet einen Wegzählsatz (Subtraktions-Satz oder -Aufgabe).

Würde der Vater in jeder Woche gleich viel, z. B. 31 Frkn., ausgeben; wie viel brächte dieß auf 52 Wochen oder das ganze Jahr? — Man erhielte hier eigentlich 52 gleiche Posten, von denen jeder wie viel ausmacht? — Das haben wir aber gelernt durch Vervielfachung finden, es macht 31 Frkn. × 52 = 1612 Frkn. Das Vervielfachen ist also nur ein erleichtertes Zusammenzählen lauter gleicher Posten, und da nennt man den zu zählenden Posten (31 Frkn.) Vervielfachungszahl (Multiplikand) und die unbenannte Zahl, die sagt, wie oft er zu nehmen sei, Vervielfacher (Multiplikator), und die zu suchende Zahl, welche die Summe aus lauter gleichen Posten ist, Vielfaches (Produkt). Eine Rechnungsaufgabe (wie die obige), die durchs Vervielfachen gelöst wird, bildet einen Vervielfachungssatz (Multiplikations-Satz oder -Aufgabe).

Wäre in der Aufgabe gesagt, daß der Vater im ganzen Jahre oder in den 52 Wochen 1612 Frkn. ausgegeben hätte; wie viel würde dieß dann auf die Woche bringen? — Man sieht leicht, daß dieß die Umkehrung von der vorigen Aufgabe ist. Wenn in 52 Wochen 1612 Frkn. ausgegeben wurden, so gab man in 1 Woche 52 Mal weniger oder so viel aus, als 52 Mal genommen 1612 Frkn. gibt. Das haben wir gelernt durch Entvielfachung finden, es ist 1612 Frkn. : 52 = 31 Frkn. Was vorhin gesucht war, ist nun gegeben, nämlich das Vielfache (1612 Frkn.); das wird hier Entvielfachungszahl (Dividend) genannt; und es wird gesucht, was vorhin bekannt war (31 Frkn.). Das ist der Theil (Quotient) und zwar der sovielte als (52) der Theiler (Divisor) anzeigt. (Für ein Messungsbeispiel ist die Sache entsprechend besonders zu erklären.) Das Entvielfachen (Dividiren) ist also das Gegentheil des Vervielfachens; es ist ein erleichtertes mehrfaches Wegzählen einer Zahl. Eine Rechnungsaufgabe (wie die obige), die durchs Entvielfachen gelöst wird, bildet einen Entvielfachungssatz (Divisions-Satz oder -Aufgabe).

Aus der einfachsten Rechnungsverrichtung, dem Einheitenzählen, haben sich also stufenweise folgende 4 Zählformen ergeben:

1. Das Zahlen-Zusammenzählen (die Addition).

2. Das Zahlen-Wegzählen (die Subtraktion).
3. Das Mehrfach-Zuzählen, Vervielfachen (Multiplikation).
4. Das Mehrfach-Wegzählen, Entvielfachen (Division).

Jede euerer Rechnungsaufgaben kann nun durch eine oder durch mehrere dieser Zählformen gelöst werden, denn dieselben finden sich in den Rechnungsaufgaben eingekleidet. Ihr müßt daher zunächst bei jeder Aufgabe, die ihr erhaltet, darüber nachdenken, ob sie sich durch bloßes Zu- oder Wegzählen oder durchs Mehrfach-Zu- oder -Wegzählen lösen lasse.

Es folgen nun in Heft II. der Rechnungsaufgabensammlung von Seite 24 bis 44 eingekleidete Aufgaben (als einfache Operationssätze), mit ein- und mehrfach benannten Zahlen, von denen der Lehrer die Schüler je so viele lösen läßt, bis die nöthige Festigkeit erzielt ist. Der Lehrer unterlasse ja nicht, die Schüler selbst auch Aufgaben aus ihrer Umgebung auffassen und bilden zu lassen, damit sie selbstständig, was sich ihrem Rechnungssinne entgegenstellt, zur untersuchenden Aufgabe formen lernen.

Wir lassen als Beispiele zur schriftlichen Ausführung einige Ausrechnungen von angewandten Aufgaben aus Heft II der R.Aufgbs. in Zifferansätzen folgen: Einfache Operationssätze.

Seite 25, 16) Von der Schlacht am Morgarten, die im Jahr 1315 geschah, dauerte es 71 Jahre bis zur Schlacht bei Sempach; wann fand diese statt?

Lösung: Vom 1315ten Jahre an noch 71 Jahre weiter gezählt gibt das (1315 + 71)ste Jahr oder das Jahr 1386.

1315
71
1386

Seite 26, 4) Wie viel hat ein Schulverwalter für den Schreibbedarf einer Schule ausgegeben, wenn er 144 Frkn. 45 Rppn. für Papier, 31 Frkn. 50 Rppn. für Federn und 12 Frkn. 36 Rppn. für Dinte, Schiefertafeln und Griffel bezahlte?

Lösung: Er hat im Ganzen 144 Frkn. 45 Rpn. + + 31 Frkn. 50 Rppn. + 12 Frkn. 36 Rppn = = 188 Frkn. 31 Rppn. ausgegeben.

144 Fr. 45 Rp.
31 = 50 =
12 = 36 =
188 Fr. 31 Rp.

Seite 27, 9) Jemand wurde den 9. August 1818 geboren und starb in einem Alter von 29 Jahren 4 Monaten und 8 Tagen. Wann ist er also gestorben?

Lösung: Am 9. Aug. 1818 waren seit Chr. Geb. 1817 J. 7 M. 8 T.
bis zum Tode der Person verflossen noch 29 = 4 = 8 =
Also waren bei ihrem Tode seit Christi Geburt 1846 J. 11 M. 16 T.

Deßhalb zählte man da 1847 den 17. Dezember.

(Denn wenn 1846 Jahre seit Christi Geburt verflossen waren, so war man im 1847sten Jahre, und wenn 11 Monate seit Anfang des Jahres vorbei waren, so war man im Dezember und nach 16 Tagen von diesem Monat im 17. Tage des Dezembers.)

Seite 31, 7) Ein Schüler hat 15 Buch 10 Bogen Schreibpapier, wie viel bleibt ihm noch, wenn er davon seinem Freunde 9 Buch 14 Bogen gibt?

Ausrechnung: Der Schüler hatte 15 Buch 10 Bogen.
Er gibt davon 9 = 14 =
Also bleiben ihm noch 5 Buch 20 Bogen.

Seite 31, 4) Jemand macht eine längere Reise. Sein Reisegeld betrug 1250 Frkn. 8 Bzn. Wie viel kostet ihn die Reise, wenn er noch 104 Frkn. 49 Rppn. heimbringt?

Ausrechnung: Das Reisegeld betrug 1250 Frkn. 80 Rppn.
Davon wird noch heimgebracht 104 = 49 =
Also wurden ausgegeben 1146 Frkn. 31 Rppn.

Seite 33, 13) Wenn man um 5 Rppn. 5 Spielkugeln erhält; wie viele bekommt man um 13 Frkn.?

Ausr.: Um 5 Rppn. erhält man 5 Spielkugeln.
Um 20 Mal 5 Rp. oder um 1 Fr. 5 Kgln. × 20 = 100 Kgln.
Und um 13 Frkn. 100 Kgln. × 13 = 1300 Kgln.

Seite 33, 8) Der Schall verbreitet sich gewöhnlich in jeder Sekunde 1130 Fuß weit; wie weit gelangt er in 58 Sekunden?

Antwort: 1130 Fuß × 58 = 65540 ′ oder:

1130′ × 58
9040
5650
65540′

Seite 35, 16) Mit einem gewissen Vorrathe von Lebensmitteln könnten 120 Personen 1 Jahr und 5 Monate auskommen; wie lange Zeit würde 1 Person damit ausreichen?

Lösung: Eine Person hätte 120 Mal länger an dem Vorrathe als 120 Personen. Eine Person hätte also daran 1 Jahr 5 Monate × 120
oder 120 Jahre 600 Monate.
50 =
oder 170 Jahre.

Seite 38, 5) Es sind 4080 Reisbünde aus dem Walde wegzuführen; wie viele Fuder zu 120 Reisbünden erhält man?

Lösung: Es gibt so viele Fuder als in 4080 Bünden 120 Bünde enthalten sind.

Nun sind 4080 Bünde : 120 Bünden = 34.
4

Also gibt es 34 Fuder.

Seite 40, 15) Für 13 Saum 54 Maß Wein mußte man 484 Frkn. 66 Rppn. zahlen; wie viel für die Maß?

Lösung: Es sind 13 Saum 54 Maß = 1354 Maß, und 484 Frkn. 66 Rppn. = 48466 Rppn.

1354 Maß kosten 48466 Rppn.

also 1 Maß kostet 48466 Rppn. : 1354 = 35 Rppn.
784
1076 Rppn. Rest.

Die Maß kostete daher etwas über 35 Rppn., fast 36 Rppn.

Seite 40, 6) Es sollen 2 Pfund Silber in gleiche Theile zu 25 Gramme getheilt werden; wie viele solche Theile gibt es?

Lösung: Es gibt so viele Theile als in 2 Pfund oder 1000 Grammen 25 Grammen enthalten sind, also:

1000 Gr. : 25 Gr. = 40.

Daher gibt es 40 Theile zu je 25 Gr.

In solcher Weise werden die angewandten Aufgaben bis Seite 44 des II. Heftes gelöst. Dieselben oder ähnliche Beispiele mit etwas niedern Zahlen, mitunter auch mit andern Verhältnissen, werden zur Uebung im Kopfrechnen aufgegeben und gelöst; es ist nicht nöthig, noch besondere Beispiele hier mitzugeben; in der Aufgabensammlung ist mannigfaltige Abwechslung berücksichtigt.

Mit Beziehung auf die Verifikation der einzelnen Rechnungen ist in Uebereinstimmung mit Früherm zu bemerken, daß jede abweichende richtige Lösungsweise als Probe gilt. Die Schüler werden angehalten, anzugeben, ob und wie sie ihre Resultate geprüft haben. Die Probe braucht gar keine künstliche zu sein; je natürlicher das zweite vom ersten abweichende Rechnungsverfahren, desto besser! Z. B. als Probe von obiger Auflösung von Aufgabe 13:

Wenn man um 5 Rppn. 5 Spielkugeln erhält, so um 1 Rppn. 1 Kugel und um 13 Frkn. oder 1300 Rppn. 1300 Kugeln, also gleich viel wie oben. Oder als bloße Umkehrung: Wenn 5 Kugeln 5 Rppn. kosten, was 1300 Kugeln? ꝛc.

Und von Aufgabe 7:

Gesetzt, der Schüler hätte von seinen 15 Buch und 10 Bogen 10 Buch ausgegeben, so würden ihm noch 5 Buch 10 Bogen übrig bleiben. Nun

hat er aber 10 Bogen weniger ausgegeben; also bleiben ihm noch 5 Buch 20 Bogen, was gleich viel ist wie oben.

Oder auch auf inverse Weise, ähnlich wie vorhin.

So freie Uebung und freies Denken, geschehe es beim Kopf- oder Zifferrechnen!

II.

Fünftes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem zehnten und elften Altersjahre.

§ 56.

Aufgabe.

Abschluß des (dekadischen) Zahlensystems nach oben. Einsicht und Fertigkeit im Operiren bis zu den Millionen. Bildung der Bruchtheile und des Bruchs überhaupt. Die 4 Zählformen mit gleichnamigen Bruchtheilen.

Als angewandtes Rechnen im Sinne der allmäligen Erweiterung des materialen Rechnungsgebietes mit Berücksichtigung der Fortschritte in der Bruchbildung: 1) Einfache Operationssätze. 2) Verbundener Additions- und Subtraktionssatz. 3) Verbindung der Multiplikation oder Division mit einer der beiden ersten Operationen. 4) Verbundener Multiplikations- und Divisionssatz oder einfacher Dreisatz.

§ 57.

Auffassung der Zahlen bis in die Millionen. Ein- und Aussicht ins (dekadische) Zahlensystem nach oben.

Die Auffassung der höhern dekadischen Einheiten geschieht auf dem gleichen veranschaulichenden Wege wie früher. Man knüpft wieder etwas weiter unten an, führt den Tausender-Würfel vor (z. B. den Kubikzoll, auf dem etwa durch Zeichnung die 1000 Kubiklinien angedeutet sein können) und stellt durch Vereinigung von 10 solchen (etwa zu einem Stabe) den Zehntausender dar, dann durch 10 solche zu einer Platte sich verbindende Stäbe den Hunderttausender, dann durch 10 solche Platten in einem Würfel (Kubikfuß) die Million. Und nun würde der Kreisgang mit: Würfel, Stab, Platte, Würfel aufs Neue beginnen; allein da die wirkliche Veranschaulichung auf dieser Höhe ins Kolossale laufen würde, so wird dieselbe bloß angedeutet:

Denkt man sich 10 Kubikfuß in einer Reihe zusammenhängend, so stellen dieselben 10 Millionen (Kubiklinien) oder einen Zehner der Millionen dar; 10 solche Reihen in einer großen Platte einen Hunderter der Millionen, und wiederum 10 solche Platten in einem sehr großen Würfel (Kubikruthe) einen Tausender der Millionen u. s. f.

Der Schüler hat also klar aufzufassen:

10 Einer = 1 Zehner, 10 Zehner = 1 Hunderter,
10 Hunderter = 1 Tausender, 10 Tausender = 1 Zehntsdr.,
10 Zehntsdr. = 1 Hderttsdr., 10 Hunderttsdr. = 1 Million,
10 Millionen = 1 Zhnr.Mill., 10 Zhnr.Mill. = 1 Hdrtr.Mill.,
10 Hdtr.Mill. = 1 Tsdr.Mill., 10 Tsdr.Mill. = 1 Zhntsdr.Mill. ꝛc.;

also hat man in den Ziffern von der Rechten zur Linken eine Einer-, Zehner-, Hunderter-, Eintausender-, Zehntausender-, Hunderttausender-, Einer-Millionen-, Zehner-Millionen-, Hunderter-Millionen-Stelle u. s. f.; und 1 Einheit irgend einer Stelle ist in 1 Einheit der nächsten höhern Stelle 10 Mal enthalten, oder 1 Einheit je einer Stelle ist 10 Mal so groß als 1 Einheit der nächst niedern Stelle *.

Wie bezeichnet man mit Ziffern 1 Tausender, 1 Zehntausender, 1 Hunderttausender, 1 Million, 1 Zehner-Million, 1 Hunderter-Million u. s. f.? (Die Ausführung gleich wie früher.)

Welche Zahlausdrücke wiederholen sich von den Einern an stets von drei zu drei Stellen? Antwort: Einer, Zehner, Hunderter. — Es gibt also Einer, Zehner, Hunderter der gezählten Dinge, dann Einer, Zehner, Hunderter von Tausendern jener Dinge, dann Einer, Zehner, Hunderter von Millionen, dann Einer, Zehner, Hunderter von Tausendmillionen jener Dinge ꝛc. (Wenn dem Lehrer später noch eine Erweiterung in die obern Klassen der dekadischen Einheiten nöthig wird, so mag er dieselbe im Verlauf des kommenden Unterrichts am geeigneten Orte einschalten.) Man faßt nun drei dieser regelmäßig fortschreitenden Einheiten beim Aussprechen der Zahlen zusammen; z. B. besteht die Zahl 312'578903 aus 312 Millionen, 578 Tausend und 903 Einern. — Von welcher Stelle an ist natürlich diese Eintheilung stets zu machen?

Wenn man vielstellige Zahlen anzuschreiben hat, wie muß man also

---

* Dieses Gesetz haben die Schüler natürlich selbst aus den angestellten Betrachtungen zu finden.

in Gedanken eintheilen, um richtig anzuschreiben? — Und ebenso beim Lesen? So bezeichnet nach dieser Eintheilung zu Dreien 9015·000708 9 Tausend und 15 Millionen und 708 Einer u. s. f.

Hierauf mannigfache Uebungen im Erklären (nach der dekadischen Zusammensetzung), Anschreiben und Aussprechen der Zahlen. Die ersten 3 Uebungen im III. Heft der R.Aufgbs. können nun die Schüler ohne weitere Anleitung lösen.

§ 58.

Uebungen im operationsgemäßen Rechnen bis in die Millionen.

Wenn die Addition und Subtraktion höherer Zahlstellen und höherer Zahlen im Allgemeinen in der Art und unter der Zahlveranschaulichungsweise behandelt werden, wie diese Operationen schon auf den frühern Stufen aufgefaßt wurden, so bieten sich hier keine gar großen Schwierigkeiten mehr dar. Wir müßten hier fast nur wiederholen, wenn wir beispielsweise in die Behandlung eintreten sollten.

Die Multiplikation und Division dagegen dürfen schon noch einläßlicher betrachtet werden. Vor Allem aus ist hier die Multiplikations- und Divisionsverbindung von reinen Stellenwerthen zu berücksichtigen und zwar so, daß der neue Zahlenraum gehörig durchlaufen, jedoch nicht, oder wenigstens nicht viel, überschritten wird. Die hier einschlagenden Uebungen fallen zunächst ins Kopfrechnen. Wie schon vorher das Zu- und Wegzählen höherer Zahlstellen im Kopfe, z. B. (3 + 5 + 7 + 8 + 9 + 13 + 30) Hunderttausender, oder Millionen, oder Zehner-Millionen ꝛc. geübt werden muß, so kommen jetzt besonders Kopfrechnungsübungen folgender Art vor: Wie viel sind 5 Hunderttausender × 10, 100, 1000 ꝛc.? 7 Zehner-Millionen × 10, 100 ꝛc.? 9 Tausender × 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc.? 8 Hunderter × 1000, 100000, 1000000 ꝛc.? Dann: 7 Millionen × 300; 6 Zehntausender × 5 Tausend; 3 Hundert × 7 Hunderttausend u. s. f. Dann überhaupt: wie viel geben Zehntausender × Zehntausender; Hunderttausender × Zehntausender; Zehner-Million × Hunderter; Zehner × Hunderter-Millionen; Einer × Tausender-Millionen u. s. f.? — Die Einübung geschieht ungefähr in der Stufenfolge:

1 Hderttsdr. × 10 gibt 10 Hderttsdr. oder 1 Mill.
also 5 " × 10 " 5 Mal so viel " 5 "
und 5 " × 3 Zehner " 3 " mehr " 15 " , dann überhaupt Hunderttausender × Zehner geben Millionen. Dieß also der Gang bei der Multiplikation von höhern Stellenwerthen.

Die Division geht in ähnlicher Stufenfolge; zuerst etwa das Enthaltensein z. B. in 1 Million ist 1 Tausender 1000 Mal enthalten, in 1 Zehner-Million 1 Hunderter 100000 Mal, also in 15 Zehner-Millionen 5 Hunderter 3 hunderttausend Mal enthalten. Fürs Theilen z. B. 1 Hunderter-Million getheilt durch 1000 gibt 1 Hunderttausender, also 24 Hunderter-Millionen durch 6000 = 4 Hunderttausender, überhaupt Hunderter-Millionen durch Tausender = Hunderttausender. So werden wie bei der Multiplikation viele ähnliche Beispiele geübt, bis die Sache schnell und geläufig im Kopfe geht. Die dießfälligen Uebungen im III. Hefte bis auf Seite 7 können die Schüler nun besonders lösen.

Hierauf wird die Multiplikation und Division von mehrstelligen Zahlen größern Umfanges geübt; die erstere geht leicht, indem sie auf die Multiplikation der einzelnen Stellen zurückgeführt werden kann. Die Partialprodukte können auch den Stellen des Multiplikators entsprechend als Einer-, Zehner- und Hunderterprodukte ꝛc. in beliebiger Folge aufgeführt und dann zusammengezählt werden. In diesem Sinne geübt werden die Schüler beim Zifferrechnen nicht im Zweifel sein können, unter welche Stellen die einzelnen Partialprodukte gehören.*

Die Division ist immer ein wenig schwerer, weil das Ergebniß nur nach und nach durch Versuch gefunden werden kann. Man muß den Schüler mit dem Gedanken vertraut machen, zunächst bloß zu schätzen, also den wichtigsten Theil des Dividendus durch den wichtigsten des Divisors (d. h. die oberste Stelle des erstern durch die oberste Stelle des zweiten) zu dividiren, um so den wichtigsten Theil des Quotienten, d. h. seine größte Stelle zu bestimmen, welche mit dem Divisor multiplizirt das größt Mögliche gibt, das noch vom Dividend (der Bedeutung der Division gemäß) abgezogen werden kann u. s. f. Die vorangegangenen Uebungen in der Division von Stellenwerthen werden dieß dem Schüler sehr erleichtern. Da die Ausführung im Zifferſatze ähnlich geschieht wie früher, so werden wohl hier keine besondern Beispiele nöthig sein. Die betreffenden Aufgaben der Multiplikation und Division größerer Zahlen im III. Hefte von Seite 7 bis 8 werden nun nach der Anleitung des Lehrers in obigem Sinne durch die Schüler gelöst.

Hieran mögen entsprechende angewandte Aufgaben geknüpft werden.

---

* Nur keine Erleichterungsmittel, die auf Unrichtigkeiten hinauslaufen, wie wir z. B. bei Erklärung der Multiplikation von 5300 Zentner × 20 schon gehört haben, nämlich: 3 Zentner in der 3ten Stelle × 2 in der 2ten geben 6 Zentner in der 4ten Stelle u. s. w.

§ 59.

Entwicklung der Brüche.

Vor Allem aus muß hier beherzigt werden, daß eine bloße Veranschaulichung der konkreten Quantität, die ein Bruch ausdrücken kann, noch gar nicht eine genügende Auffassung des Bruchs selbst bedingt; es gehört außerdem noch dazu die Darstellung der Operationsthätigkeit, nach welcher sich der Bruch als das Resultat eines Zählaktes ergibt. Manche berücksichtigen bloß das Erstere und geben so dem Schüler wohl eine neue Größenvorstellung, aber nicht deren operationsgemäße Bedeutung und die daraus fließende Operationsfähigkeit.

Die Restbetrachtung bei der Division (der Quelle des Bruchs) wird die naturgemäße Vermittlung bilden, um die einfachen Bruchtheile (von $1/2$, $1/3$ .. bis etwa $1/10$) dem Schüler zur richtigen Erkenntniß zu bringen.

Dividirt man eine ungerade Zahl durch 2, so wird, um die Division zu vollenden, der Rest 1 noch durch 2 dividirt werden müssen. Der Lehrer wählt eine derartige Division aus, z. B. 5 Fuß : 2. Die Schüler finden, der 2te Theil ist zunächst 2 Fuß, aber dann bleibt noch 1 Fuß durch 2 zu theilen übrig. Das gibt den 2ten Theil von 1 Fuß; die wirkliche Größe davon wird z. B. mit Hülfe des Zirkels in der That dargestellt und angeschaut. Diesem 2ten Theile von 1 Fuß gibt nun der Lehrer den neuen Namen ein Zweitels-Fuß und die neue Bezeichnung $1/2$ Fuß. Also ist das vollständige Resultat obiger Theilung 5 Fuß: $2 = 2\,1/2$ Fuß. Wie viel geben die 2 Fuß 2 Mal, und $1/2$ Fuß 2 Mal genommen? — Wie viel wäre nun der 2te Theil (die Hälfte) von 1 Zoll? Stellt diese Größe wirklich dar! Wie schreibt man diese Zahl auf? (Gut, $1/2$ Zoll). Wie viel ist der 2te Theil von 1 Maß, von 1 Pfund, von 1 Franken, von 1 Tag ꝛc.? Wie schreibt man diese Zahlgrößen auf? Wie viel gibt $1/2$ Frkn. 2 Mal genommen oder $1/2$ Frkn. und $1/2$ Frkn.? u. s. f. Beliebige Abwechslung in Bildung, Darstellung und Vergleichung.

Aehnlich wird der Bruchtheil $1/3$ entwickelt. Zuerst können nach einander mehrere Zahlen durch 3 dividirt werden, wobei jedes Mal die Einheit zum Reste bleibt. Man kommt hier also noch in den Fall, 1 durch 3 zu dividiren, was den Bruchtheil $1/3$ erzeugt. Man habe z. B. 7 Zoll : 3 = ? Die Schüler werden finden, das gibt zunächst 2 Zoll und dann bleibt noch 1 Zoll zu theilen. Der 3te Theil von 1 Zoll wird vom Lehrer wirklich dargestellt und ein Drittel-Zoll genannt, welche Zahl ge-

schrieben wird $^1/_3$ Zoll. Welches ist also das vollständige Ergebniß von 7 Zoll : 3 ? (Gut, $2^1/_3$ Zoll). Wie viel gibt $^1/_3$ Zoll 3 Mal genommen oder $^1/_3$'' und $^1/_3$'' und $^1/_3$''? ꝛc. Wie viel wäre der 3te Theil von 1 Fuß? (Antw. $^1/_3$ Fuß.) Dargestellt! — Wie viel der 3te Theil von 1 Franken, von 1 Pfund, von 1 Maß, von 1 Stunde ꝛc. Dann wieder näher betrachtet!

Auf ganz ähnliche Weise werden die Bruchtheile $^1/_4$, $^1/_5$ . . bis $^1/_{10}$ gebildet und Fragen und Aufgaben wie oben daran geknüpft. Die Schüler müssen nun die Bedeutung eines jeden dieser Bruchtheile in Hinsicht auf irgend eine Einheit verstehen. Was bedeutet z. B. $^1/_2$ Thaler, $^1/_3$ Franken, $^1/_4$ Pfund, $^1/_5$ Klafter, $^1/_6$ Zentner, $^1/_7$ Fuß, $^1/_8$ Tag, $^1/_9$ Maß, $^1/_{10}$ Saum ꝛc.? (Antw $^1/_2$ Thaler bedeutet den 2ten Theil von 1 Thlr., $^1/_3$ Frkn. den 3ten Theil von 1 Frkn. ꝛc.) Wie könnte man $^1/_7$ Fuß darstellen? (Antw. Wenn man 1 Fuß in 7 gleiche Theile theilt und einen derselben zählt.) u. s. f.

Die Schüler lösen hierauf Aufgaben folgender Art (siehe III. Heft, Seite 8 und 9):

100 Rappen : 2 = 50 Rappen, oder 1 Frkn. : 2 d. i. $^1/_2$ Frkn. = 50 Rappen.
12 Monate : 3 = 4 Monate, oder 1 Jahr : 3 d. i. $^1/_3$ Jahr = 4 Monate.
100 Maß : 4 = 25 Maß, oder 1 Saum : 4 d. i. $^1/_4$ Saum = 25 Maß.
u. s. f. bis $^1/_{10}$; dann auch so:

$^1/_2$ Pfund = ? Gramme, $^1/_8$ Tag = ? Stunden, $^1/_7$ Wochen = Minuten, $^1/_9$ rechter Winkel = ? Grad u. s. f.

Lösung: $^1/_9$ R. = 1 R. : 9 = 90° : 9 = 10°; $^1/_7$ Woch. = 1 Woch. : 7 = 24·60 Minuten = 1440 Minuten.

Bildung der folgenden Bruchtheile $^1/_{11}$, $^1/_{12}$, $^1/_{13}$ und so beliebig weiter, z. B.:

34 Pfd. : 11 = 3 Pfd. + (1 Pfd. : 11) = (3 + $^1/_{11}$) Pfd. oder $3^1/_{11}$ Pfd.
49 Ellen : 12 = $4^1/_{12}$ Ellen; 92 Juch. : 13 = $7^1/_{13}$ Juch. u. s. f.

Prüfende Fragen und Aufgaben werden hiemit in gleichem Sinne wie früher verbunden.

Bildung beliebiger Brüche durch das Zählen von Bruchtheilen.

Man kann Bruchtheile zählen gerade wie man ganze Einheiten zählt. Ein Drittels-Fuß + ein Drittels-Fuß sind zwei Drittels-Fuß oder $^1/_3$ Fuß + $^1/_3$ Fuß = $^2/_3$ Fuß. Zwei oder mehrere gleiche Bruchtheile werden ähnlich geschrieben wie ein einzelner. Wie kann man $^2/_3$ Fuß auf einer Linie wirklich darstellen? Wie viel sind $^1/_5$ Zoll + $^1/_5$ Z. + $^1/_5$ Z. + $^1/_5$ Z. ? —

Wie kann man auf einer Linie $^4/_5$ Zoll abtragen? — Wie viel sind $^1/_6$ Tag + $^1/_6$ T. + $^1/_6$ T. + $^1/_6$ T. + $^1/_6$ T.? — Ebenso:
$^1/_7 + ^1/_7 + ^1/_7 + ^1/_7 = ?$ $^1/_8 + ^1/_8 + ^1/_8 + ^1/_8 + ^1/_8 = ?$
$^1/_{10} + ^1/_{10} + ^1/_{10} + ^1/_{10} + ^1/_{10} = ?$ $^1/_{12} + ^1/_{12} + ^1/_{12} + ^1/_{12} = ?$
$^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} + ^1/_{14} = ?$ u. s. f.
Wie viel ist $^1/_2$ Frkn. 3 Mal genommen? Antw. $(^1/_2 + ^1/_2 + ^1/_2)$ Fr. oder $^3/_2$ Fr. Wie viel ist $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_{11}$, ꝛc. 4, 5, 6 Mal u. s. f.? Was bedeuten $^4/_5$ Pfund; $^3/_4$ Franken; $^7/_8$ Tag u. s. f.?

Ein Bruch kann also als eine Summe gleicher Theile eines Ganzen angesehen werden.

Bildung beliebiger Brüche durch Division einer Zahl durch eine andere.

Wie viel machen 2 Fuß : 3? Dieß kann so gerechnet werden: 1 Fuß : 3 = $^1/_3$ Fuß und 2 Fuß : 3 = 2 Mal so viel, also $^2/_3$ Fuß. Also ist $^1/_3$ Fuß 2 Mal genommen gerade so viel als der 3te Theil von 2 Fuß; der Lehrer weist dieß auch geometrisch mittelst dem Zirkel nach. Ebenso sind 3 Frkn. : 5 = $^3/_5$ Frkn., denn 1 Frkn. : 5 ist = $^1/_5$ Frkn., also 3 Frkn. : 5 = $^3/_5$ Frkn. Ebenso 1 Thlr. : 7 = $^1/_7$ Thlr., also 11 Thlr. : 7 = $^1/_7$ Thlr. × 11 = $^{11}/_7$ Thlr. Ebenso 10 Frkn. : 13 = $^{10}/_{13}$ Frkn.; 32 Frkn. : 6 = $^{32}/_6$ Frkn. u. s. f. beliebige Beispiele.

Ein Bruch ist also auch gleich einer Zahl dividirt (getheilt, gemessen) durch eine andere.

Es sind daher $^4/_5$ Fuß = 4 Theilen, von denen jeder $^1/_5$ Fuß ist, oder sie sind auch gleich dem 5ten Theil von 4 Fuß; kurz $^4/_5{}' = ^1/_5{}' \times 4$ oder $= 4' : 5$.

Diese doppelte Auffassung des Bruchs, die dem Wesen nach ganz auf dasselbe führt, ist für die ganze elementare Bruchrechnung von großer Bedeutung, weil dadurch die Ausführung der Operationen erleichtert wird. Die erste Auffassungsweise schließt sich nämlich an die Addition und Subtraktion, die zweite an die Multiplikation und Division an. — Die Unterscheidung von Zähler und Nenner ist nun leicht. Der Zähler ist das Gezählte, die Zahl (der gleichen Bruchtheile), auch die zu theilende Zahl, Dividend; der Nenner aber der Theiler, Divisor; er gibt an, wodurch oder in wie viele gleiche Theile die Einheit oder der ganze Zähler getheilt werden soll.

Was bedeuten $^6/_7$ Pfd., $^{12}/_8$ Frkn, $^{122}/_{60}$ Stunden, $^7/_{12}$ Tag, $^{375}/_{10}$ Thlr., $^{678}/_{20}$ Zntr. ꝛc? Welches ist bei jedem dieser Brüche der Zähler, der Nenner? Sucht die ganzen Einheiten heraus, wo ein Bruch solche gibt. — Wie viele 5tel, 6tel, 8tel, 11tel, 13tel, 20stel, 32stel, 50stel, 87stel, 100stel, 210tel ꝛc. fallen auf 1 Ganzes?

Die Aufgaben in Heft III bis Seite 13 wird der Lehrer je nach den einzelnen Entwicklungen seiner Lektionen durch die Schüler lösen lassen, die spezielle Vertheilung ist leicht.

§ 60.

Das Rechnen (Zählen) mit gleichnamigen Bruchtheilen.

Wenn die Schüler in jedem Bruche den gezählten Bruchtheil und die Anzahl derselben unterscheiden, so ist ihnen nichts leichter, als gleichnamige Brüche zu- oder wegzuzählen; es ist dieß dem innern Vorgang nach gar nichts Anderes als wie das Zählen ganzer Einheiten, und nur die äußere Bezeichnung führt eine verschiedene Zifferform mit sich. Wie die Entwicklungen im vorigen Paragraphen im Kopfe wurzeln, also bis auf die Bezeichnungsweise Kopfrechnen sein müssen, so seien es auch die folgenden Uebungen in erster Linie ausschließlich. — Wie viel sind $1/4'$ und $1/4'$; $2/4'$ und $1/4'$; $3/4'$ und $1/4'$; $4/4'$ und $1/4'$; $5/4'$ und $1/4'$ ꝛc.? Dann $1/4'$ und $2/4'$; $3/4'$ und $2/4'$; $2/4'$ und $2/4'$; $4/4'$ und $2/4'$; $4/4'$ und $3/4'$; $5/4'$ und $2/4'$; $5/4'$ und $3/4'$; $5/4'$ und $4/4'$; $3/4'$ und $6/4'$; $7/4'$ und $9/4'$? u. s. f. Dann dasselbe mit 3tel, 5tel, 6tel u. s. f. beliebigen Brüchen. Dann das Wegzählen, z. B.: Wie viel sind $3/2$ Frkn. — $1/2$ Fr.; $3/2$ Fr. — $2/2$ Fr.; $4/2$ Fr. — $3/2$ Fr.; $7/2$ Fr. — $4/2$ Fr.; $8/2$ Fr. — $5/2$ Fr.; $11/2$ Fr. — $9/2$ Fr.; $29/2$ Fr. — $10/2$ Fr.; $105/2$ Fr. — $50/2$ Fr. u. s. f. mit beliebigen gleichnamigen Brüchen. Wie werden also gleichnamige Brüche zu- und weggezählt? — Was sind denn gleichnamige Brüche?

Hierauf werden diese Brüche auch angeschrieben, deren Summe gesucht und schriftlich bezeichnet. So wird das Zu- und Wegzählen fortgesetzt und ebenfalls mit dem Zählen von ganzen Einheiten verbunden. Beim Wegzählen wird oft der Bruch von Ganzen, gewöhnlich von 1 Ganzen, abgezogen, z. B. $37^1/_5$ Zntr. — $20^4/_5$ Zntr. $= 17^1/_5$ Zntr. — $4/5$ Zntr. $= (16^1/_5 + 1/5)$ Zntr. $= 16^2/_5$ Zntr. Ferner $112^3/_8' - 9^{11}/_8' = 103^3/_8' - 11/8' = (101^3/_8 + 5/8)' = 102'$. Natürlich werden auch hier wieder verschiedene Lösungsweisen aufgesucht. So können die Aufgaben Heft III bis Seite 18 gelöst werden.

Dann folgt die Vervielfachung und Entvielfachung der Anzahl Theile eines Bruchs. — Die Vervielfachung eines Bruchs mit einer ganzen Zahl geht nun so leicht wie das Zusammenzählen gleichnamiger Brüche. Auch hier, wie bei jeder neuen Stufe, geschieht die erste Entwicklung am zweckmäßigsten ohne Benutzung der Ziffern: Wie viel sind $3/4$ Frkn. und

$^3/_4$ Frkn.? — Wie viel sind also zwei Mal $^3/_4$ Frkn.? Wie viel $^4/_5$' mehr $^4/_5$' mehr $^4/_5$' ? — Also drei Mal $^4/_5$' ? u. s. f.; dann etwas allgemeiner: neun Mal $^7/_8$ Pfund sind neun Mal 7 Bruchtheile, von denen jeder $^1/_8$ Pfund ist; neun Mal 7 gleiche Bruchtheile sind 63 solcher Theile, also, da jeder $^1/_8$ Pfund ist, $= {}^{63}/_8$ Pfund. Wie wird also ein Bruch eine Zahl Mal genommen? Antw.: Indem man die Anzahl seiner Bruchtheile die Zahl Mal nimmt; also nur den Zähler mit der Zahl vervielfacht und den Nenner gleich bleiben läßt. Dann Zifferrechnen abwechselnd mit Uebungen im Kopfe: Wie viel sind:

$^5/_{12}$ Tag $\times$ 5, 7, 8, 12, 27, 105 ?

$^{23}/_{15}$ Maß $\times$ 4, 6, 9, 16, 54, 315 ?

$17^2/_3$ Zentner $\times$ 7, 11; 15 Saum $53^3/_4$ Maß $\times$ 9, 13, 23 ?

U. s. f. siehe die Aufgaben Heft III bis Seite 21. Die Vervielfachung einer gemischten Zahl (Ganze mit Bruch) veranlaßt keine Schwierigkeit; der Schüler wird bald zuerst die Ganzen vervielfachen und hierauf den Bruch, bald zuerst den Bruch und hierauf die Ganzen; das Herausziehen der ganzen Einheiten aus einem Bruch hat er schon gelernt. Die Verwandlung einer ganzen so wie einer gemischten Zahl in einen Bruch, eines Bruchs so wie einer gemischten Zahl in untergeordnete Einheiten reiht sich ebenfalls zweckmäßig an die betrachtete Vervielfachung an. Z. B.: 5 Frkn. $= {}^?/_{20}$ Frkn.; $137/_{10}$ Tag $= {}^?/_{10}$ Tag? Lösung: 1 Frkn. $= {}^{20}/_{20}$ Fr., daher 5 Fr. $= {}^{100}/_{20}$ Fr.; 1 Tag $= {}^{10}/_{10}$ Tag, daher $137/_{10}$ Tag $= {}^{130}/_{10}$ Tag $+ {}^7/_{10}$ Tag $= {}^{137}/_{10}$ Tag. Ferner $3^3/_8$ Jahre $=$? Monate. Lösung: 1 Jahr $= 12$ Monate, $^1/_8$ Jahr $= (12 : 8$ oder $^{12}/_8)$ Monat, daher $^3/_8$ Jahr $= {}^{36}/_8$ Monat $= 4^4/_8$ Monate. Und 3 Jahre $= 36$ Monate, also $3^3/_8$ Jahre $= 40^4/_8$ Monate. Oder: $3^3/_8$ Jahre $= {}^{27}/_8$ Jahre $= ({}^{27}/_8 . 12)$ Monate $= {}^{324}/_8$ Monate $= 40^4/_8$ Monate. — Ueberhaupt lasse man, wie bei allen Abtheilungen so auch hier bei der Vervielfachung, den Schüler stets nach eigenem Sinne verschiedene Lösungen aufsuchen und dann anwenden.

Endlich werden noch die Fälle berücksichtigt, in denen die Anzahl Theile eines Bruchs durch eine ganze Zahl ohne Rest entvielfacht werden kann. — Wie viel sind drei Mal $^4/_7$ Pfund? — Welches ist also der dritte Theil von $^{12}/_7$ Pfund? — Welches ist der 3te Theil von $^9/_7$ Pfund, $^{15}/_4$ Frkn., $^{21}/_8$ Fuß? Der 6te Theil von $^{12}/_5$ Fuß, $^{18}/_4$ Tag, $^{30}/_7$ Thlr. u. s. f.? Endlich: Der 9te Theil von $^{36}/_5$ Pfund ist der 9te Theil von 36 gleichen Bruchtheilen, also 4 solche Bruchtheile, also $= {}^4/_5$ Pfund. Wie viel

gibt $^4/_5$ Pfund wieder 9 Mal genommen? U. s. f. siehe Heft III bis Seite 22.

§ 61.

Angewandte Aufgaben.

A. Einfache Operationssätze. Siehe Seite 22 drittes Heft.

Die Aufgaben mit größern ganzen Zahlen bedürfen keiner weitern Bemerkung, als daß sie sich auf möglichst mannigfaltige Verhältnisse aus dem Leben beziehen mögen; einzelne naheliegende geographische und statistische Vergleichungen sind hier ganz am Platze. Diese Aufgaben werden natürlich unmittelbar nach Behandlung der entsprechenden uneingekleideten Operationssätze durchgenommen; für reine Kopfrechnungen eignen sie sich nicht.

Beispiele mit Einflechtung von Brüchen, a. Addition und Subtraktion: Jemand erhält 7 Stücke Leinwand; das erste mißt $50^3/_4$ das zweite $81^1/_4$, das dritte $76^3/_4$, das vierte $105^2/_4$, das fünfte $112^3/_4$, das sechste $94^3/_4$ und das siebente $95^2/_4$ Ellen; wie viele Ellen hat er im Ganzen? Antwort: $(50^3/_4 + 81^1/_4 + 76^3/_4 + 105^2/_4 + 112^3/_4 + 94^3/_4 + + 95^2/_4)$ Ellen $= 617^1/_4$ Ellen. Oder auch unter einander geschrieben.

Wenn ein Kaufmann von $117509^1/_4$ Pfd. $9560^3/_4$ Pfd verkauft, was bleibt ihm noch? Antw.: $(117509^1/_4 - 9560^3/_4)$ Pfd. $= 107948^2/_4$ Pfd.

b. Die einfachen, getrennten Multiplikations- und Divisionssätze beziehen sich auf dieser Stufe schon auf ziemlich mannigfaltige bürgerliche Rechnungsverhältnisse. Es fallen hier z. B. in Betracht: einfachere Münz-, überhaupt Größenreduktionen; Preisberechnungen aus dem Preise der Einheit für ein Mehrfaches derselben und umgekehrt; die einfachsten Zinsverhältnisse, wie z. B. Berechnung des Zinses für eine Summe oder auf eine gewisse Zeit, wenn der Zins für eine Einheit dieser Summe oder dieser Zeit bekannt ist und umgekehrt; ferner Berechnung der Größe der Arbeit ꝛc. für eine gewisse Zeit, wenn die Arbeit ꝛc. für eine bestimmte Zeiteinheit bekannt ist und umgekehrt; Berechnung der Arbeitszeit für eine arbeitende Kraft, wenn die Arbeitszeit für mehrere gegeben ist und umgekehrt u. s. f., überhaupt das mannigfaltigste angewandte Schließen aus der Einheit auf ein Mehrfaches und zurück, wovon unmöglich alle Fälle durch eine stoffliche Eintheilung (wie früher erörtert worden) erschöpft oder logisch angeordnet, dagegen ganz einfach unter den Begriff von angewandten Multiplikations- und Divisionssätzen gebracht und methodisch geordnet werden können. Siehe die Aufgaben Heft II bis Seite 33. Es wäre nun ganz verkehrt,

dem Schüler ohne Weiters solche Aufgaben zur Berechnung vorzulegen; er könnte wahrscheinlich — trotz der besten Zahl- und Operationskenntnisse für diese Stufe — die meisten dieser Aufgaben nicht lösen, weil er mit den zu Grunde liegenden praktischen Verhältnissen noch nicht ganz vertraut ist. Deßwegen muß von Seite des Lehrers das Erste sein, diese praktischen Verhältnisse dem Schüler so anschaulich vorzuführen, daß sie ihm leicht verständlich und geläufig werden; einzelne Schüler bringen von Haus aus schon manche derartige (wenn auch noch ungeordnete) Kenntnisse mit, was die in Rede stehenden Erläuterungen dem Lehrer bedeutend erleichtert, aber keineswegs überflüssig macht. Also nicht bei jeder einzelnen Aufgabe soll der Lehrer dastehen und erläutern, er soll zum Voraus die allgemeinen praktischen Grundlagen besprechen und dann Aufgaben hierüber lösen, so wie auch ähnliche derartige Verhältnisse aufsuchen lassen. Die fraglichen Erörterungen sind für den Lehrer so leicht, daß es nicht nöthig ist, beispielsweise hierüber einzutreten. Dagegen setzen wir ein paar Ausrechnungen hierher:

a. Wie viel kosten 359 Ztr. Waare à $12^3/_4$ Frkn.? — Ausrechnung: Wenn 1 Ztr. $12^3/_4$ Frkn. kostet, so kosten 359 Ztr. $(12^3/_4 \times 359)$ Fr. $= (4308 + {}^{1077}/_4)$ Fr. $= (4308 + 269^1/_4)$ Fr. $= 4577^1/_4$ Fr.

b. Ein Stück Land soll unter zwei Theilhaber A und B vertheilt werden, A soll ${}^{153}/_{200}$ davon bekommen; wie viel B? — Ausrechnung: Das ganze Stück hält ${}^{200}/_{200}$, also bekommt B ${}^{200}/_{200} - {}^{153}/_{200} = {}^{47}/_{200}$, das sind 47 Theile, wovon jeder ${}^1/_{200}$ vom ganzen Stück ist.

c. Ein neuer Schweizerfranken ist $= {}^{24}/_{35}$ alte Schweizerfranken. Wie viele alte Frkn. sind 7138 neue? — Ausrechnung:

$$7138 \text{ n. Frkn. sind } ({}^{24}/_{35} \times 7138) \text{ a. Frkn.} = \left.\begin{matrix}28552\\14276\end{matrix}\right\} \text{a. Fr.} : 35 =$$

$$= 171312 \text{ a. Fr.} : 35 = 4894^{22}/_{35} \text{ a. Fr.}$$

$$\begin{matrix}31\\3\,3\\1\,6\\2\,2\end{matrix}$$

d. Wenn man auf 1 Fr. je ${}^{35}/_4$ Rppn. gewinnt (oder verliert) welches ist der Gewinn (oder Verlust) auf 1763 Fr.? — Ausrechnung: Es sind

$${}^{35}/_4 \text{ Rppn.} \times 1763 = \left.\begin{matrix}5289\\8815\end{matrix}\right\} \text{Rppn.} : 4 = 61705 \text{ Rppn.} : 4 =$$

$$= 15426^1/_4 \text{ Rppn. oder } 154 \text{ Fr. } 26^1/_4 \text{ Rppn.}$$

e. Wenn ein Kapital in 8 Jahren $315^7/_{20}$ Fr. Zins gibt, wie viel Zins bringt dieß auf 1 Jahr? — Ausrechnung: Auf 1 Jahr fällt der

8te Theil, also $315^{7}/_{20}$ Fr. : 8 = 31535 Rp. : 8 = $3941^{7}/_{8}$ Rp. = = 39 Fr. $41^{7}/_{8}$ Rppn.

f. Wenn man statt 100 Fr., die man für ein Geschäft ausgegeben hat, 111 Fr. zurückerhält, wie viel nimmt man dann für einen ausgegebenen Franken wieder ein? — Ausrechnung: Für einen ausgegebenen Franken nimmt man den 100sten Theil von 111 Fr. ein, also 111 Fr. : : 100 = $1^{11}/_{100}$ Fr. = 1 Fr. 11 Rppn.

g. Wie lange müßte ein Taglöhner arbeiten, um 104 Fr. abzuverdienen, wenn ihm für jeden Tag 4 Fr. 40 Rppn. abgerechnet würden? — Ausrechnung: Er muß so viele Tage arbeiten, als in 104 Fr. die 4 Fr. 40 Rppn. enthalten sind, also Btzn. 1040 : Btzn. 44 = $23^{28}/_{44}$. Er muß also 23 ganze und $^{28}/_{44}$ Tage arbeiten, u. s. f.

Es ist nicht schwer, bei allen solchen Aufgaben ein zweckmäßiges, vom ersten abweichendes Rechnungsverfahren als Probe einzuschlagen. Der Schüler hat seine Rechnungen stets auf solche Weise zu kontrolliren: z. B. für die letzte Aufgabe g:

In 10 Tagen verdient er 44 Fr., in 20 Tagen 88 Fr., also bleiben noch 16 Fr. In 3 Tagen verdient er 13 Fr. 20 Rppn., also bleiben noch 2 Frkn. 80 Rppn.; darum muß er für die 104 Fr. 23 ganze Tage und noch so viel von 1 Tag arbeiten als $^{28}/_{44}$ anzeigt. — Oder z. B. für Aufgabe d:

Würde man auf 1 Fr. $^{36}/_{4}$ Rppn., d. i. 9 Rppn. gewinnen, so gäbe dieß auf 1763 Fr. (1763 × 9) Rppn. = 15867 Rppn. Gewinn. Nun hat man aber auf jeden Franken $^{1}/_{4}$ Rppn. zu viel gerechnet, macht auf 1763 Frkn. $^{1763}/_{4}$ Rppn. oder $440^{3}/_{4}$ Rppn.; also ist der wirkliche Gewinn bloß 15867 Rppn. — $440^{3}/_{4}$ Rppn. = $15426^{1}/_{4}$ Rppn. = = 154 Fr. $26^{1}/_{4}$ Rppn., also gleich wie oben. U. s. f. auf beliebige abweichende, aber rationelle Weise!

B. Zusammengesetzte Operationssätze. Siehe Seite 33 bis und mit den vermischten Aufgaben drittes Heft.

Es kommen hier Aufgaben in Betracht, welche 1) Verbindungen der Addition mit der Subtraktion, 2) der Multiplikation oder Division mit einer der beiden ersten Operationen, 3) der Multiplikation mit der Division enthalten. Alle diese Aufgaben werden sich natürlich auch im Kreise desjenigen Bruchrechnens bewegen, das für diese Stufe vorgeübt worden ist. Treten hiebei neue, früher noch nie betrachtete praktische Verhältnisse auf,

so bringt diese der Lehrer zum Voraus zur Anschauung und zum Verständniß und erst dann läßt er hierüber die entsprechenden Aufgaben lösen.

Einige Beispiele mit Ausrechnung:

1. (Zur Verbindung der Addition mit der Subtraktion.)

Jemand machte folgende Einnahmen: a. $3^1/_4$ Fünffrkthlr., b. $17^3/_4$ Fr., c. $18^2/_4$ Fr., und gab wieder davon aus: a. $4^1/_4$ Fünffrkthlr., b. $10^1/_4$ Fr.; wie viel bleibt ihm noch? — Ausrechnung:

Einn.: a. $3^1/_4$ Ffrkth. od. $16^1/_4$ Fr. Ausg.: a. $4^1/_4$ Ffrkth. od. $21^1/_4$ Fr.
b. $17^3/_4$ = b. $10^1/_4$ =
c. $18^2/_4$ = Zusammen $31^2/_4$ Fr.
Zusammen $52^2/_4$ Fr. Also bleiben $52^2/_4 - 31^2/_4$ od. 21 Fr.

— U. dgl.

2) (Zur Verbindung der Multiplikation oder Division mit einer der beiden ersten Operationen.)

a. Ein Vater schickt drei erwachsene Kinder in die Fabrik. Der Wochenlohn des ersten beträgt $7^2/_5$ Fr., des zweiten $6^4/_5$ Fr. und des dritten $5^3/_5$ Fr.; wie viel verdienen dieselben zusammen in 52 Wochen? — Ausrechnung:

Gesammteinnahme in einer Woche: $7^2/_5$ Fr. $6^4/_5$ = $5^3/_5$ = $19^4/_5$ Fr.

und in 52 Wochen $19^4/_5$ Fr. $\times$ 52
$(^4/_5 . 52)$ Fr. $= {}^{208}/_5$ Fr. oder $41^3/_5$ Fr.
19 . 52 Fr. = $\overset{3\,8}{95}$
also Alles $1029^3/_5$ Fr.

b. Jemand ist 687 Fr. schuldig. Wenn er dieselben baar bezahlt, so wird ihm an jedem Franken $2^1/_3$ Btzn. nachgelassen, wie viel müßte er also bei Baarzahlung noch erlegen? — Ausrechnung: Es werden nachgelassen $(2^1/_3 \times 687)$ Btzn. = (1374 + 229) Btzn. = 1603 Btzn. Also sind noch zu erlegen (6870 — 1603) Btzn. = 5267 Btzn. = = 526 Fr. 7 Btzn.

c. Jemand mischt zweierlei Wein, einen Saum zu 15 Fr. 23 Rppn. und einen Saum zu $18^3/_5$ Fr.; wie theuer wird 1 Saum von dem gemischten Wein sein? — Ausrechnung: Beide Saum zusammen kosten 15 Fr. 23 Rppn. + 18 Fr. 60 Rppn. = 33 Fr. 83 Rppn. Also 1 Saum kommt auf (33 Fr. 83 Rppn.) : 2 = 16 Fr. $91^1/_2$ Rppn.

d. Ein Angestellter hat ein Jahreseinkommen von 1250 Fr. Wenn sich nun seine jährlichen Ausgaben für Kost, Logis und Kleidung zusammen auf $957^3/_5$ Fr. belaufen, wie viel hat er dann monatlich vom Ueberschuß noch für sich? — Ausrechnung: Der Ueberschuß beträgt $(1250 - 957^3/_5)$ Fr.

$= 292^2/_5$ Fr. $=$ 292 Fr. 40 Rppn. Hievon fallen auf den Monat (292 Fr. 40 Rppn.) : 12 $=$ 24 Fr. $36^8/_{12}$ Rppn.

U. s. f.; also immer zwei Operationen von ungleicher Stufe (d. h. von der Additions- und Multiplikationsstufe, welche die Gegensätze der Subtraktion und Division auch in sich schließen) in einer Aufgabe verbunden. Mannigfaltige Proben ergeben sich hier sehr leicht, schon aus der Verwechslung der Rangordnung der Operationen. Der Schüler hat die abweichendsten Verfahrungsweisen aufzusuchen.

3. (Zur Verbindung der Multiplikation mit der Division; sogenannte einfache Dreisätze.)

a. Wenn der Saum Wein 17 Fr. 25 Rpp. kostet, wie viel kosten dann 2 Saum und 84 Maß? — Ausrechnung: 1 Maß kostet den 100sten Theil von 17 Fr. 25. Rppn., d. i. 1725 Rppn. : 100 $= {}^{1725}/_{100}$ Rppn. 284 Maß kosten also ${}^{1725}/_{100}$ Rppn. $\times$ 284 $=$ $\left.\begin{matrix}6900\\13800\\3450\end{matrix}\right\}$ Rppn. : 100 $=$ $=$ 489900 Rppn. : 100 $=$ 4899 Rppn. $=$ 48 Fr. 99 Rppn.

b. Wenn 7 Arbeiter 38 Fr. Lohn beziehen, wie viel beziehen 3 derselben? — Ausrechnung: Einer erhält ${}^{38}/_7$ Fr., und drei erhalten ${}^{38}/_7$ Fr $\times$ 3 $=$ ${}^{114}/_7$ Fr. $=$ $16^2/_7$ Fr.

c. Wenn 5 Personen zusammen in jeder Woche 49 Fr. verdienen, wie viel verdient so 1 Person durchschnittlich in 4 Wochen? — Ausrechnung: 1 Person verdient in 1 Woche ${}^{49}/_5$ Fr. und in 4 Wochen ${}^{49}/_5$ Fr. $\times$ 4 $=$ ${}^{196}/_5$ Fr. $=$ $39^1/_5$ Fr.

d. Zwei Schuldner müssen eine Schuld nach folgendem Verhältnisse abtragen: der Zahlungsantheil des ersten soll sich zu dem des zweiten verhalten wie 9 zu 16. Wenn es nun dem ersten 1973 Thlr. trifft, wie viel dem zweiten? — Ausrechnung:

So oft der erste 9 Thlr. zahlt, so oft gibt der zweite 16 Thlr.
Wenn nun = = 1973 = = wie viel trifft es dem zweiten?
Wenn der erste 1 = = so zahlt der zweite ${}^{16}/_9$ Thlr.
= = = 1973 = = = = = = $({}^{16}/_9 . 1973)$Th.
$=$ $\left.\begin{matrix}11838\\1973\end{matrix}\right\}$ Thlr. : 9 $=$ ${}^{31568}/_9$ Thlr. $=$ $3507^5/_9$ Thlr.

e. Wenn 24 alte Schweizerfranken $=$ 35 neuen Schweizerfranken sind, wie viele neue Franken sind dann 300 alte? — Ausrechnung:

24 a. Fr. $=$ 35 n. Fr., also 1 a. Fr. $= {}^{35}/_{24}$ n. Fr. und daher
300 = = $= {}^{35}/_{24} . 300$ n. Fr. $= 10500$ n. Fr. : $24 = 437^{12}/_{24}$ n. Fr.

f. Eine Wiese wurde im letzten Heuet von 9 Mähern in 7 Stunden abgemäht; in wie viel Stunden können nun 11 Mäher damit fertig sein? — Ausrechnung:

1 Mäher hätte an der ganzen Wiese 9 . 7 Stunden = 63 Stunden.
11 = haben 63 Stdn. : 11 = $5^{8}/_{11}$ Stdn. = 5 Stdn. $43^{7}/_{11}$ Min.

g. Ein Bote, welcher täglich 10 Stunden macht, kommt in 2 Wochen und 4 Tagen ans Ziel seiner Reise; in welcher Zeit würde er aber bei täglichen 8 Stunden ans Ziel gelangen? — Ausrechnung:

Wenn er täglich nur 1 Stunde zurücklegte, so hätte er 18 . 10 Tage;
= = = aber 8 = = = = = $^{180}/_{8}$ Tage =
= $22^{4}/_{8}$ Tage = 3 Wochen $1^{4}/_{8}$ Tage.

h. Wenn Einer eine gewisse Arbeit in 14 Tagen vollendet, so erhält er täglich $40^{1}/_{2}$ Bzn. Lohn ohne Kost, wenn er aber diese Arbeit erst in 20 Tagen vollenden würde, wie viel erhielte er dann von diesem Lohne täglich? — Ausrechnung:

Der ganze Lohn beträgt ($40^{1}/_{2}$. 14) Bzn. = 567 Bzn.;
kommt derselbe auf 20 Tage, so fällt auf 1 Tag $^{567}/_{20}$ Bz. = $28^{7}/_{20}$ Bz. =
= 2 Fr. $83^{10}/_{20}$ Rppn.

u. s. f.

Hier ist nun besonders der Ort, wo der Schüler genauer mit den wichtigern praktischen Fällen vertraut werden soll, welche auf der Proportionalität beruhen. Daß die Betrachtung dieser Verhältnisse hier ohne Hülfe der Proportionen durchzuführen ist, haben wir früher allgemein erörtert. Wir wollen nun im Speziellen andeuten, wie dieß geschehen soll. Die Proportionalität ist die wichtigste Grundlage des bürgerlichen Rechnens; der Schüler muß dieselbe ganz genau kennen lernen. Bis jetzt hat er schon mehrere Größen kennen gelernt, die in der Beziehung zu einander stehen, daß das Mehrfache der einen auch das Gleichvielfache der andern erfordert oder daß ein gewisser Theil der einen den gleichvielten Theil der andern erheischt. Solche Größen läßt der Lehrer die Schüler aufsuchen. Dieselben werden zuerst ganz spezielle Angaben machen: z. B.: Um 1 Fünfer bekommt man 1 Brödchen, um 2 oder 3 Fünfer bekommt man auch 2 oder 3 Brödchen. Ein Pfund Fleisch kostet 30 Rappn., 4 Pfd. kosten 4 Mal so viel u. s. f. Aus manchen derartigen Beispielen leitet der Lehrer den allgemeinern Satz ab, daß der Preis und die entsprechende Waare zwei solche Größen sind, von denen das Mehrfache der einen das Ebensovielfache der andern, oder ein gewisser Theil der einen den gleichvielten der

andern verlangt. Auf solche Weise werden nun viele derartige Größen aufgesucht: z. B. Zahl der Arbeiter und entsprechender Lohn; Zahl der Arbeiter und entsprechende Leistungen; Größe des zu Nutzenden und entsprechende Entschädigung; Größe der Zeit und entsprechende Leistung ꝛc.; Größe der Zeit und entsprechender Verbrauch von Geld und Lebensmitteln ꝛc.; Größe der Zeit und zurückgelegter Weg ꝛc.; Größe des Raumes und Menge des Inhaltes; Verwendetes Geld und zu beziehender Gewinn ꝛc.; Größe des zu theilenden Quantums und Größe des Antheils; Größe der Kraft uud Größe der Wirkung; Schnelligkeit und zurückgelegter Weg, und so noch viele dergleichen Verhältnisse. Zur nähern Kenntniß dieser Verhältnisse schließen sich an dieselben ganz einfache Zählbetrachtungen und diese bestehen vorderhand ausschließlich im Kopfrechnen. Z. B. (Größe des zu Nutzenden und entsprechende Entschädigung). Wenn man von 100 Fr. 4 Fr. Jahreszins gibt, wie viel von 300, 800, 1000, 7500, 25, 50, 75, 1050, 2025, 175 Frkn. Von 100 Frkn. $3\frac{1}{2}$ Frkn. Zins; wie viel von 200, 500, 700, 1000, 1400, 2700, 4000, 5800 Frkn.? Wie viel aber von 10, 5, 2, 1, 3, 4, 11, 23 Frkn. ꝛc.? Wie viel ist zu 3 % der Jahreszins von 800, 7000, 1900, 3250 Frkn.? — Von 1, 2, 3 ꝛc., 13, 37, 51, 43, 95 Frkn.? — Von 1, 2, 3 ꝛc., 25, 49, 64, 89, 105, 314 Rppn.? — Von 2 Frkn. 10 Rppn., 19 Fr. 37 Rppn., 114 Frkn. 30 Rppn. U. s. f. im gleichen Kapitel des Zinsgebietes immer durch Berechnung der einfachsten Fälle im Kopfe. Werden so die oben aufgeführten Verhältnisse (und ähnliche) in ganz einfachen Beispielen wie die vorigen zur Anschauung gebracht und der Berechnung „im Kopfe" unterzogen, so werden die Schüler bei ihren spätern, zusammengesetzten Zifferrechnungen weit weniger Fehlschlüsse und Rechnungsfehler begehen, als es sonst geschieht, wenn man sie gleich die Beispiele in einer Aufgabensammlung ohne gehörige Einführung in den Stoff lösen läßt.

Nach diesem werden solche Verhältnisse aufgesucht, bei denen das Mehrfache einer Größe die eben so vielfache Abnahme der andern Größe verlangt (also *umgekehrte* Proportionalität, wenn die vorige die *gerade* oder *direkte* bildete), z. B. Suchet Größen von der Art auf, daß das Doppelte der einen gerade den 2ten Theil oder die Hälfte der andern verlangt und umgekehrt. Die Schüler geben etwa an: Wenn 1 Arbeiter an einer Arbeit 6 Tage hat, so haben 2 Arbeiter, wenn sie an derselben Arbeit arbeiten können, 3 Tage; also 4 Arbeiter $1\frac{1}{2}$ Tage u. s. f. Aus mehrern solchen Beispielen wird der Satz gezogen: die Zahl der Arbeiter

und die Arbeitszeit verhalten sich so zu einander, daß das Mehrfache der einen den sovielten Theil der andern erheischt. Auf solche Weise werden so viele derartige Beziehungen aufgesucht als möglich. Z. B. Zahl der täglichen Arbeitsstunden und Zeit, in welcher ein Werk dann vollendet wird; Zahl der Arbeitstage und täglicher Lohn für dieselbe Arbeit; Zahl der Theilhaber und Größe des Theils bei gleichem zu theilendem Quantum; Zahl der Personen (Konsumenten) und Zeit, auf welche ein gewisser Vorrath für jene ausreicht; Zahl der Verbrauchenden und Größe des täglichen Antheils bei einem gewissen Vorrath für eine bestimmte Zeit; Zahl der mitwirkenden Kräfte und Größe des Theils der Last, die sich auf jene vertheilt. Größe der Schnelligkeit, und Zeit, in welcher ein bestimmter Weg zurückgelegt wird. — Zur weitern Bekanntschaft mit diesen Verhältnissen werden ganz einfache Uebungen im Kopfrechnen vorgenommen, z. B.: Wenn Einer bei täglich 2 Stunden Arbeitszeit ein Werk in 3 Wochen vollenden kann, wie bald könnte er es vollenden, wenn er täglich 4, 6, 8 Stunden daran arbeiten würde? Wenn er aber täglich 1, 3, 7 Stunden arbeitete? Wenn jeder von 5 Erben 100 Frkn. erbt, wie viel bekäme einer, wenn 10, 20, 35 Erben sich in die gleiche Erbschaft zu gleichen Theilen theilen müßten? — Wenn aber nur ein einziger Erbe, oder 3, oder 14 Erben ꝛc. wären? — 3 Pferde haben an einem Hafervorrathe 14 Tage; wie lange hätten an demselben 6, 9, 15 Pferde? — Wie lange 1 Pferd, 4, 5, 7 Pferde? — Wenn 4 Männer eine Last halten müssen, so trifft es einem gerade 100 Pfd.; wie viel aber einem, wenn ihrer 8, oder 12 wären? Wenn aber nur einer, oder 3 wären? — Wenn Jemand täglich 6 Stunden zurücklegt, so kommt er in 120 Tagen ans Ziel seiner Reise; wenn er aber täglich nur 1, oder 2, 3, 5 Stunden zurücklegte, wie bald würde er dort ankommen? u. s. f. — Wenn so die Dreisätze mit geraden oder umgekehrten Verhältnissen durch ganz einfache Uebungen im Kopfrechnen den Schülern einigermaßen geläufig geworden sind, so folgen erst dann beliebige Beispiele aus der Aufgabensammlung, wie sie z. B. oben unter 3) a, b, c bis h gelöst sind und von denen man die einfachern zur Abwechslung ebenfalls im Kopfe lösen lassen kann, so wie auch bei den übrigen die Zwischenresultate ganz zweckmäßig ohne Hersetzung von Ziffern gesucht werden können. — Ueber Proben wiederholen wir das Frühere: eine abweichende Auflösungsweise oder ein Rechnungsverfahren, wodurch sich ein gefundenes Resultat bestätigt, ist bei jedem Beispiel möglich (wie wir es z. B. bei den frühern Aufgaben gezeigt haben) und muß von

den Schülern durchaus angewendet werden, damit man sich auf ihre Rechnungsergebnisse verlassen kann und sie selbstständige Rechner werden.

Endlich ist ein weiteres Erforderniß für ihre Bildung zur Selbstständigkeit, daß sie selbst auch Aufgaben aus ihrem Erfahrungskreise aufsuchen (siehe die frühere allgemeine Begründung). Der Lehrer stellt zur Aufgabe: Suchet neue Rechnungsaufgaben: 1) solche, die sich durch Zusammenzählen und Wegzählen lösen lassen (also verbundene Additions- und Subtraktionssätze), 2) solche, in denen die Vervielfachung oder Entvielfachung mit einer der frühern Verrichtungen erfordert wird, 3) verbundene Vervielfachungs- und Entvielfachungssätze, 4) sucht solche Beispiele und löset sie zugleich auf. Endlich läßt er beliebige Aufgaben dieser Stufe nach ihren Operationsverbindungen analysiren.

III.

Sechstes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem elften und zwölften Altersjahre.

§ 62.

Aufgabe.

Als solche wurde im allgemeinen Theile aufgeführt: Das Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen unter Weglassung der komplizirteren Bruchverbindungen. Als angewandtes Rechnen fortschreitend in der materialen Erweiterung und mit Einflechtung der Brüche: 1) Einfache Operationssätze, 2) Paarweise Operationsverbindungen und hauptsächlich die mannigfaltigen Anwendungen des einfachen Dreisatzes.

§ 63.

Zur Fortsetzung der Bruchrechnung: Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen.

a. Division des Bruchtheils. *

Man lasse die Schüler Aufgaben folgender Art zunächst ohne Ziffern (im Kopfe) lösen: Wenn 1 Fuß = $^4/_4$ Fuß ist, wie viele 4tel ist dann die Hälfte oder $^1/_2$ Fuß? Und wie viel ist dann wieder der 2te Theil von $^1/_2$ Fuß? — Wenn 1 Pfd. = $^4/_4$ Pfd. ist, wie viele 4tel ist dann

---

* Siehe die innere methodische Begründung im allgemeinen Theil.

die Hälfte oder $^1/_2$ Pfd.? Und wie viele 4tel ist wieder die Hälfte oder der 2te Theil von $^1/_2$ Pfd.? — Wenn ferner 1 Maß $= {}^6/_6$ Maß ist, wie viele 6tel ist dann $^1/_2$ Maß? Und $^1/_3$ Maß? Wie viel ist dann noch der 3te Theil von $^1/_2$ Maß? Und der 2te Theil von $^1/_3$ Maß? — Wenn 1 Fr. $= {}^8/_8$ Fr. ist, wie viel macht $^1/_2$ Fr., $^1/_4$ Fr.? Was gibt also $^1/_2$ Fr. : 4; $^1/_4$ Fr. : 2? u. s. f. Zu den ersten Beispielen gehört immer die Veranschaulichung, d. h. man lege die gleichen Theile, aus denen die Einheit besteht, wirklich vor, also beim Fuß zeichne man die $^4/_4$ an die Tafel, eben so lege man auch beim Pfund die 4 Vierling vor. Bei den 6teln, 8teln, 9teln ꝛc. nehme man ebenfalls zuerst lieber den Fuß zur Einheit und rechne erst dann Beispiele wie die obigen auf Maß, Franken ꝛc. So wird die Theilung des Bruchtheils ohne alle Ziffern geübt, bis die Schüler im Kopfe geläufig Beispiele folgender Art rechnen: der 3te Theil von $^1/_5$ Fr. ist $= {}^1/_{15}$ Fr., denn 1 Fr. ist $= {}^{15}/_{15}$ Fr., also $^1/_5$ Fr. $= {}^3/_{15}$ Fr. und $^1/_5$ Fr. : 3 $= {}^1/_{15}$ Fr.

Nun werden dieselben Uebungen auch mit Zifferansatz, etwa wie im vorhergehenden Beispiel dargestellt ist, gelöst und die entsprechenden Aufgaben aus dem Lehrmittel damit verbunden, so daß nach diesem der Schüler im Stande wäre, jeden Bruchtheil durch eine ganze Zahl zu theilen. — Aber warum nimmst du, um obige Aufgabe, $^1/_5$ Fr. : 3, zu lösen, gerade 1 Fr. $= {}^{15}/_{15}$ Fr.? Der Schüler wird antworten: Weil es eben geht und man so in den angenommenen Theilen rechnen kann, wie viel $^1/_5$ Fr. und dann noch der 3te Theil von $^1/_5$ Fr. ist. Und das wäre in der That auch genügend, wenn der Schüler die Einheit stets in die kleinste Anzahl gleicher Theile zerlegt, aus denen Alles gerechnet oder gezählt werden kann, was die Aufgabe erfordert. — Wer aber dem Schüler hierüber noch mehr geben will, der mag es folgendermaßen thun: Wenn von $^1/_5$ Fr. der 3te Theil genommen werden soll, so muß man sich $^1/_5$ Fr. in 3 gleiche Theile zerlegen und einer derselben ist dann $^1/_5$ Fr. : 3; aber wenn $^1/_5$ Fr. 3 gleiche Theile hat, so haben $^5/_5$ Fr., d. i. 1 Fr., 15 solche Theile, daher ist einer der letztern $^1/_{15}$ Fr. Also ist einer der 3 gleichen Theile, die $^1/_5$ Fr. ausmachen, d. i. $^1/_5$ Fr. : 3, $= {}^1/_{15}$ Fr. Man würde gut thun, die Darstellung dieser Theile etwa für $^1/_5$ Fuß : 3 wirklich an der Tafel zu geben. Und so ähnlich für andere Beispiele.

b. Division des Bruchs und Verwandlung desselben.

1. Theilung. Wenn der Bruchtheil durch eine ganze Zahl dividirt werden kann, so schließt sich nichts Natürlicheres daran, als nun mehrere

solche Bruchtheile, d. i. den Bruch selbst zu dividiren; z. B. wenn $^1/_4$ Fr. : 3 = $^1/_{12}$ Fr. ist, so sind $^5/_4$ Fr. : 3 fünf Mal so viel, also = $^5/_{12}$ Fr., da der 3te Theil von $^5/_4$ Fr. eben erhalten wird, wenn man von jedem 4tel den 5ten Theil nimmt. Den Fall, wo die Anzahl der Bruchtheile (resp. der Zähler) ein Vielfaches von der ganzen Zahl ist, durch die man theilt, hat der Schüler schon gehabt. — Da man ebenfalls die Division des Bruchtheils zur Verwandlung des Bruchs anwenden muß, indem jene eben die Verwandlung bewirkt, so könnte man auch unmittelbar auf jene diese folgen lassen; z. B. wenn der 3te Theil von $^1/_4$ Fr. = $^1/_{12}$ Fr. ist, so hält $^1/_4$ Fr. 3 solche Theile, d. h. $^3/_{12}$ Fr., und $^5/_4$ Fr. sind daher fünf Mal so viel oder $^{15}/_{12}$ Fr. Allein da die Verwandlung der Brüche zum Zwecke ihrer Gleichnamigmachung schon eine bedeutende Gewandtheit im Umgange mit Brüchen überhaupt, so wie im Zerlegen der Zahlen in ihre Faktoren voraussetzt, so hieße es das Schwierigere und Zusammengesetztere vor dem Leichtern behandeln, wollte man die Verwandlung der Brüche vor der Theilung des Bruches durch eine ganze Zahl vornehmen. Auch würde diese nach jener ohnedieß eine unpassende Stellung im Unterrichtsgange einnehmen und Manches könnte nur verschroben behandelt werden. Wer aber gar die Verwandlung, Gleichnamigmachung ꝛc. der Brüche vor der Theilung des Bruchtheils verlangen wollte, der würde entweder Unsinniges, oder Unmögliches, oder so etwas verlangen, das die Theilung des Bruchtheils gerade involvirt. Nur aus der Theilung, Division entspringt überdieß dem Schüler der einzig natürliche Grund, warum z. B. 3tel nicht in 4tel, 5tel ꝛc., 2tel nicht in 7tel, 9tel u. s. f. verwandelt werden können.

Zur Uebung der Division des Bruchs durch eine ganze Zahl werden Aufgaben gelöst wie in Heft IV der Aufgabensammlung bis Seite 5. Z. B.: $^1/_8$ Pfd. : 3 = $^1/_{24}$ Pfd., also $^7/_8$ Pfd. : 3 = $^7/_{24}$ Pfd.; ebenso $^3/_5$ Pfd. : 7 ꝛc.
Ferner: $8^1/_4$ Fr. : 2 = 4 Fr. + ($^1/_4$ Fr. : 2) = $4^1/_8$ Fr.; ebenso $9^1/_5$ Fuß : 3 ꝛc.
$9^2/_3$ Fr. : 4 = 2 Fr. + ($^{12}/_3$ oder $^5/_3$ Fr. : 4) = $2^5/_{12}$ Fr.;
$35^1/_3$ Fuß : 4 = (8 + $^{10}/_3$: 4) Fuß = $8^{10}/_{12}$ Fuß.
Ferner: 75 Ztr. $34^3/_8$ Pfd. : 16 = 4 Ztr. $70^{115}/_{128}$ Pfd.;
11 $14^3/_8 = {}^{115}/_8$
ebenso 540 Mltr. $7^8/_{15}$ Vrtl. : 5 ꝛc.

Einfachere derartige Aufgaben im Kopfe.

2. Verwandlung. Wenn man $^1/_2$ Fuß noch in 2 gleiche Theile theilt, so ist nach dem Vorigen einer derselben $^1/_2$ Fuß : 2 = $^1/_4$ Fuß, also

$^1/_2$ Fuß $= {}^2/_4$ Fuß, daher $^3/_2$ Fuß $= {}^6/_4$ Fuß, $^5/_2$ Fuß $= {}^{10}/_4$ Fuß ꝛc. Die größten Bruchtheile, in die man 2tel erweitern kann, sind also 4tel, weil sich der Bruchtheil $^1/_2$ nicht in weniger als 2 gleiche Theile zerlegen läßt. Da ferner $^1/_3{}' : 2 = {}^1/_6{}'$, also $^1/_3{}' = {}^2/_6{}'$ ist, so sind $^2/_3{}' = {}^4/_6{}'$, $^4/_3{}' = {}^8/_6{}'$, $^5/_3{}' = {}^{10}/_6{}'$ u. s. f. 3tel können also nicht in 4tel und nicht in 5tel ꝛc. verwandelt werden; die 6tel sind die größten Bruchtheile, in welche sich 3tel erweitern lassen, da man $^1/_3$ nicht in weniger als 2 gleiche Theile zerlegen kann, weßwegen das Ganze in 6 gleiche Theile, also 6tel, zerfällt, u. s. f. mit Darstellung der Theile in Linien ꝛc.

Da $^1/_2 : 2, 3, 4, 5, 6$ nach der Reihe $= {}^1/_4, {}^1/_6, {}^1/_8, {}^1/_{10}, {}^1/_{12}$ ꝛc.
$^1/_3 : 2, 3, 4, 5, 6$ " " " $= {}^1/_6, {}^1/_9, {}^1/_{12}, {}^1/_{15}, {}^1/_{18}$ "
$^1/_4 : 2, 3, 4, 5, 6$ " " " $= {}^1/_8, {}^1/_{12}, {}^1/_{16}, {}^1/_{20}, {}^1/_{24}$ "
$^1/_5 : 2, 3, 4, 5, 6$ " " " $= {}^1/_{10}, {}^1/_{15}, {}^1/_{20}, {}^1/_{25}, {}^1/_{30}$ "

u. s. f. ist, so lassen sich 2tel nur in 4tel, 6tel, 8tel, 10tel ꝛc., 3tel nur in 6tel, 9tel, 12tel, 15tel ꝛc., 4tel nur in 8tel, 12tel, 16tel ꝛc., 5tel nur in 10tel, 15tel, 20tel u. s. f. verwandeln. Welches ist die kleinste Anzahl Bruchtheile des Ganzen, in welche sich 4tel, 5tel, 7tel ꝛc. erweitern lassen? Warum? Ferner, wenn $^1/_6$ Fr. $: 5 = {}^1/_{30}$ Fr., also $^1/_6$ Fr. $= {}^5/_{30}$ Fr. ist, so sind $^5/_6$ Fr. $= {}^{25}/_{30}$ Fr., d. i. $= \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5}$ Fr., d. h. man kann die Theile eines Bruchs in die zwei-, drei-, . . mehrfache Anzahl Theilchen zerlegen und dann fallen auf das Ganze gerade auch zwei-, drei-, . . . mehrmal so viel Theilchen als vorher. Dasselbe sagt auch der Satz: Man kann Zähler und Nenner die gleiche Zahl Mal nehmen und der Bruch, den man erhält, bedeutet doch wieder gleich viel wie vorher. So erweitert man. Man kann dann aber auch zurückgehen; z. B. $^{25}/_{30}$ Fr. $= {}^5/_6$ Fr., und dieß erhält man natürlich durch das entgegengesetzte Verfahren, indem man nämlich den Zähler und den Nenner durch dieselbe Zahl theilt, was so angedeutet wird: $\frac{25 : 5}{30 : 5}$ Fr., d. i. $^5/_6$ Fr. So vereinfacht (reduzirt) man. Es wird hiebei je eine Anzahl gleicher Bruchtheile wieder in einen zusammengezogen (der Lehrer veranschaulicht dieß an der Tafel). Hierauf Aufgaben mit oder ohne Ziffern; z. B. folgende Brüche $^1/_3$, $^4/_5$, $^7/_8$, $^3/_4$, $^5/_9$, $^1/_{10}$ sollen so erweitert werden, daß jeder Bruchtheil in 2, 3, 4 . . . gleiche Theilchen zerfällt Also: $^2/_3 = {}^4/_6 = {}^6/_9 = {}^8/_{12}$ u. s. f. $^4/_5 = {}^8/_{10} = {}^{12}/_{15} = {}^{16}/_{20}$ u. s. f. Folgende Brüche $^3/_6$, $^6/_9$, $^{12}/_{15}$, $^{25}/_{30}$, $^{27}/_{36}$ sollen wieder auf die einfachsten Brüche zurückgeführt (vereinfacht) werden.

Also $^3/_6 = {}^1/_2$, weil $^1/_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}$; $^{12}/_{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = {}^4/_5$ u. s. f.

Ferner $\frac{7 \cdot 8}{20}$ Fr. $= \frac{7 \cdot 2}{5}$ Fr. $= {}^{14}/_5$ Fr.; $\frac{90}{7 \cdot 5}$ Pfd. $= \frac{18 \cdot 5}{7 \cdot 5}$ Pfd. $=$
$= {}^{18}/_7$ Pfd.; $\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3}$ Fuß $= \frac{2 \cdot 5}{3}$ Fuß $= {}^{10}/_3$ Fuß.

Ferner $^3/_7$ Fr. $= {}^?/_{21}$ Fr.; $^5/_9$ Fr. $= {}^?/_{63}$ Fr.; $^{35}/_{40}$ Pfd. $= {}^?/_8$ Pfd.;
$^{20}/_{100}$ Pfd. $= {}^?/_5$ Pfd.
1 Fr. $= {}^{12}/_{12}$ Fr., also $^2/_3$ Fr. $= ?$; $^6/_6$ Pfd. $= {}^{54}/_{54}$ Pfd., also
$^5/_6$ Pfd. $= ?$

Wenn diese Verwandlungen gehörig angeschaut und erfaßt sind, so werden die entsprechenden Aufgaben in Heft IV. bis Seite 8 durch die Schüler gelöst.

Hierauf folgt die Verwandlung zur Gleichnamigmachung der Brüche. Wenn ein Ganzes aus 12 gleichen Theilen besteht, also $= {}^{12}/_{12}$ ist, so kann man rechnen, wie viel $^1/_2$, $^3/_2$, ... $^1/_3$, $^2/_3$, $^4/_3$, ... $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, ... $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$, $^4/_6$ ... in solchen 12teln ist. Z. B. $1 = {}^{12}/_{12}$, also $^1/_2 = {}^6/_{12}$; $^1/_3 = {}^4/_{12}$, also $^4/_3 = {}^{16}/_{12}$; $^1/_6 = {}^2/_{12}$, also $^5/_6 =$
$= {}^{10}/_{12}$ u. s. f. In wie viele gleiche Bruchtheile muß daher das Ganze mindestens getheilt werden, damit man von denselben ohne Rest sowohl den Drittel als auch den Viertel nehmen kann? Wie viele solche Bruchtheile fallen dann auf $^2/_3$ und wie viele auf $^3/_4$? In wie viele gleiche Theile muß das Ganze mindestens getheilt sein, um aus denselben sowohl den Fünftel als auch den Zweitel geradaus nehmen zu können? Antwort: In 10. Und es sind dann z. B. $^2/_5 = {}^4/_{10}$ und $^1/_2 = {}^5/_{10}$. Aus welchen gleichen Bruchtheilen lassen sich $^2/_3$ und $^4/_5$ am einfachsten rechnen, d. h. auch gleichnamig machen? Antwort: aus 15teln. Es ist $1 = {}^{15}/_{15}$, also $^1/_3 = {}^5/_{15}$ und $^2/_3 = {}^{10}/_{15}$; $^1/_5 = {}^3/_{15}$ und $^4/_5 = {}^{12}/_{15}$ u. s. f. Machet auf diese Weise gleichnamig $^5/_6$ Pfd. und $^3/_8$ Pfd.? Ein Ganzes muß mindestens 24 gleiche Theile haben, um aus denselben die 6tel und 8tel bilden zu können. Wenn aber 1 Pfd. $= {}^{24}/_{24}$ Pfd. ist, so ist $^1/_6$ Pfd. $= {}^4/_{24}$ Pfd. und $^5/_6$ Pfd. $= {}^{20}/_{24}$ Pfd., ebenso $^3/_8$ Pfd. $=$
$= {}^9/_{24}$ Pfd. Aus wie vielen gleichen Theilen muß das Ganze wenigstens bestehen, um aus denselben $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_{12}$ bilden zu können? Antwort: Das Ganze muß wenigstens 4 gleiche Theile haben, damit man davon ohne Rest den 4tel nehmen kann, um aber zugleich noch den 6tel rechnen zu können, müssen 3 Mal mehr, also 12 gleiche Theile sein und alsdann kann man daraus auch die $^5/_{12}$ nehmen. Also hätte man $1 = {}^{12}/_{12}$, daher $^3/_4 = ?$ $^1/_6 = ?$ und $^5/_{12}$ ꝛc. Es seien ebenso gleichnamig zu

machen: $^3/_5$, $^1/_3$ und $^5/_{10}$. Wenn irgend einer der Brüche sich vereinfachen läßt, so wird man es natürlich immer thun, also wären hier $^3/_5$, $^1/_3$ und $^1/_2$. Nun muß nach gleicher Betrachtung wie oben das Ganze in 30 gleiche Theile zerfällt sein, um jeden Bruch aus denselben bilden zu können. Also $1 = {}^{30}/_{30}$, daher $^3/_5$, $^1/_3$, $^1/_2 = ?$ Nothwendig ist, daß die Schüler hiebei die ganzen Zahlen wenigstens bis zu einer mäßigen Höhe in ihre Primfaktoren zu zerlegen verstehen; z. B. $4 = 2 . 2$; $6 = 2 . 3$; $12 = 2 . 6 = 2 . 2 . 3$ ꝛc. (Produkte aus mehrern Faktoren; Faktorenverwechslung). Nach diesen gehörig fortgesetzten Uebungen ist dem Schüler die Verwandlung von Brüchen, um dieselben gleichnamig zu machen, nicht mehr sehr schwer und es mögen nun die wichtigern hieher gehörenden Aufgaben in Heft IV. bis Seite 14 durchgenommen werden. Es ist zunächst wichtig, Brüche nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner gleichnamig zu machen, also übe man vorzugsweise dieses. Daß man das Ganze auch noch in eine mehrfache Anzahl gleicher Theile zerlegen könne, als der kleinste gemeinschaftliche Nenner angibt, wird der Schüler bald merken, ebenso, daß dieß nur zu weitläufigern Verwandlungen führt, ohne viel zu nützen.

c. Zu- und Wegzählung ungleichnamiger Brüche.

1. Es seien zusammenzuzählen: $^5/_6' + {}^3/_4' + {}^1/_3'$. Man muß gleiche Theile von 1′ haben, um diese zusammenzählen zu können; also muß man sich den Fuß aus so vielen gleichen Theilen denken, daß man aus denselben sowohl 6tel, als 4tel, als 3tel zusammensetzen kann. 1′ muß wenigstens in 6 gleiche Theile zerlegt sein, damit man davon den 6tel ohne Rest nehmen kann; um aber ebenso zugleich den 4tel nehmen zu können, müssen mindestens $6 . 2$ oder 12 gleiche Theilchen auf 1′ gehen; dann kann man daraus auch den 3tel rechnen. So folgt: Wenn $1' = {}^{12}/_{12}'$, so ist $^1/_6' = {}^2/_{12}'$ und $^5/_6' = {}^{10}/_{12}'$, ebenso $^3/_4' = {}^9/_{12}'$ und $^4/_3' = {}^4/_{12}'$; also $^5/_6' + {}^3/_4' + {}^1/_3' = {}^{10}/_{12}' + {}^9/_{12}' + {}^4/_{12}' = {}^{23}/_{12}' = 1^{11}/_{12}'$.

Es wäre für den Anfang gar nicht unpassend, diese Theile einmal wirklich an der Tafel darzustellen und dann die 3 Linien von $^5/_6' + {}^3/_4' + {}^1/_3'$ zusammenzufügen, um die Schüler mit den Augen sehen und abzählen zu lassen, daß die 12tel, die diese Linien enthalten, zusammen wirklich $= {}^{23}/_{12}'$ oder $= 1^{11}/_{12}'$ sind.

Mit der Zeit, wenn die Schüler die Sache einmal fest aufgefaßt haben,

wird sie der Lehrer noch auf eine etwas schnellere Ausführung hinleiten: Die Einheit muß die kleinste Anzahl Theile haben, die durch jeden Nenner ohne Rest getheilt werden kann, d. h. auch: diese Anzahl Theile muß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner sein. Im Laufe des Unterrichts wird sich so allmälig die Abkürzung herausstellen, daß man zur Verwandlung jeden Zähler diejenige Zahl Mal nimmt, die mit dem zugehörigen Nenner den gemeinschaftlichen Nenner bildet. Natürlich muß der Schüler auch hier immer noch im Falle sein, dieses auf das obige Verfahren der schlußgemäßen Ableitung mit Verständniß zurückzuführen. Bloß im Kopfe werden Aufgaben folgender Art gelöst: Wie viel sind $^3/_5$ Fr. + $^1/_{10}$ Fr.; $^1/_5$ Fr. + $^1/_3$ Fr.; $^2/_3$ Fr. + $^3/_5$ Fr.; $^1/_4$ Fr. + $^2/_5$ Fr.; $^1/_8$ Fr. + $^1/_6$ Fr.; $^5/_6$ Fr. + $^3/_4$ Fr.; $^7/_{10}$ Fr. + $^1/_4$ Fr.; $^5/_8$ Pfd. + $^1/_6$ Pfd.; $^5/_{12}$ Pfd. + $^1/_4$ Pfd.; $^5/_{10}$ Ztr. + $^3/_2$ Ztr.; $^7/_8$ Tag + $^{11}/_{12}$ Tag u. s. f. Dann auch etwa: $^1/_2{}' + ^1/_6{}' + ^2/_3{}'$; $^3/_5$ Saum + $^1/_{10}$ Saum + $^1/_5$ Saum; $^3/_{12}$ Maß + $^3/_4$ Maß + $^1/_8$ Maß; $^1/_2$ Pfd. + $^1/_3$ Pfd. + $^1/_4$ Pfd. u. s. f. Wo sich Brüche vereinfachen lassen, da werden die Schüler, um kürzer zu rechnen, stets dazu angehalten. — Schriftliche Aufgaben folgender Art: $^3/_5$ Ztr. + $^2/_{10}$ Ztr. + $^1/_4$ Ztr. + $^4/_8$ Ztr. + $^1/_6$ Ztr. + $^1/_{20}$ Ztr. = ? Ztr. $1^1/_2$ Pfd. + $10^1/_3$ Pfd. + $11^3/_4$ Pfd. + $540^1/_4$ Pfd. + $712^5/_{12}$ Pfd. + + 17 Pfd. = ? Pfd.
($1805^1/_4 + 7123^2/_3 + 105^1/_{12} + ^5/_6$) Fr. = ? Fr. Auch unter einander! u. s. f.

2. Das Wegzählen hat nun gar keine Schwierigkeiten mehr. Man vereinfache (reduzire) so viel wie möglich, mache dann gleichnamig und zähle die entsprechenden Theile weg. Z. B.: $^3/_5$ Fr. — $^2/_7$ Fr. = $^{21}/_{35}$ Fr. — — $^{10}/_{35}$ Fr. = $^{11}/_{35}$ Fr.; $^{15}/_{20}$ Fr. — $^1/_4$ Fr. = ($^3/_4 - ^1/_4$) Fr. = $^1/_2$ Fr.; $^{17}/_{20}$ Pfd. — $^1/_{15}$ Pfd. = $\frac{51-4}{60}$ Pfd. = $^{47}/_{60}$ Pfd.; $9^1/_5$ Pfd. — — $7^1/_2$ Pfd. = ($1^1/_5 + ^1/_2$) Pfd. = $1^7/_{10}$ Pfd.

Ebenso entsprechende einfachere Aufgaben im Kopfe! — Die Aufgaben über Zu- und Wegzählen in Heft IV bis Seite 18 werden fortlaufend neben der vorausgegangenen Entwickelung gelöst.

§ 64.

Angewandte Aufgaben.

Dieselben nehmen zu ihrer materialen Erweiterung die vorausgegangene Bruchentwicklung in sich auf. Man erhält zuerst zur Anwendung für a und b aus dem vorigen Paragraphen Divisionssätze. Z. B.:

1) Wenn 4 Maß Wein auf $^7/_5$ Fr. zu stehen kommen, so kommt 1 Maß auf $^7/_5$ Fr. : $4 = {}^7/_{20}$ Fr. oder $= 35$ Rppn.

2) Fünf Knaben haben unter sich $^7/_8$ Fr. zu theilen; wie viel erhält einer? Antwort: Einer erhält $^7/_8$ Fr $: 5 = {}^7/_{40}$ Fr. $= {}^{700}/_{40}$ Rppn. $=$ $= {}^{70}/_4$ Rppn. oder $17^1/_2$ Rppn.

3) Wenn man für $^7/_8$ Pfd. $^2/_3$ Fr. zahlte, was kostete ein Loth? Ausrechnung: 1 Pfd. $= 32$ Loth, also $^7/_8$ Pfd. $= 28$ Loth, und diese kosten $^2/_3$ Fr., folglich kostet 1 Loth $^2/_3$ Fr $: 28 = {}^2/_{84}$ Fr. $= {}^1/_{42}$ Fr. $=$ $= 2^{16}/_{42}$ Rppn. $= 2^8/_{21}$ Rppn.

4) Man hat in einem Geschäfte mit 100 Fr. $12^3/_7$ Fr. (d. h. $12^3/_7$ %) gewonnen; wie viel mit 1 Fr.? Antw.: $(^{12}/_{100} + {}^3/_{700})$ Fr. $= 12$ Rp. $+$ $+ {}^3/_7$ Rppn.

5) Man hat in einem Handel mit 1476 Fr. $20^8/_{10}$ Fr. verloren; wie viel mit 1 Fr.? Antwort: 2080 Rppn. : $1476 = 1^{604}/_{1476}$ Rppn. $=$ $= 1^{151}/_{369}$ Rppn.

U. s. f. Die einfachern solcher Aufgaben werden auch bloß im Kopfe gelöst. — Nun zur Anwendung für c.

Additions- und Subtraktionssätze. Z. B.:

1) Ein Bauer erntete im letzten Jahr $20^3/_4$ Mltr. Weizen, $7^3/_5$ Mltr. Gersten, $15^2/_3$ Mltr. Roggen und $10^1/_6$ Mltr. Hafer; wie viel zusammen? Ausrechnung: $(20^3/_4 + 7^3/_5 + 15^2/_3 + 10^1/_6)$ Mltr. $= 52$ Mltr. $+$ $(45+36+40+10)/_{60}$ Mltr. $= 52^{131}/_{60}$ Mltr. oder $= 54^{11}/_{60}$ Mltr.

2) Eine neue Straßenstrecke wird in 3 Abtheilungen hergestellt; die erste geht $507^3/_4$ Klftr., die zweite $621^1/_8$ Klftr., die dritte $479^2/_3$ Klftr. weit. Wenn nun von der ersten $210^3/_5$ Klftr., von der zweiten $198^2/_3$ Klftr. und von der dritten $410^1/_2$ Klftr. vollendet sind, wie viel bleibt dann noch herzustellen übrig? Ausrechnung:

Die ganze Strecke		Davon fertig		Also bleiben	
$507^3/_4$	Klftr. 18	$210^3/_5$	Klftr. 18	$160^{813}/_{24}$	Klftr. 65
$621^1/_8$	" 3	$198^2/_3$	" 20	$819^{23}/_{30}$	" 92
$479^2/_3$	" 16	$410^1/_2$	" 15	$788^{93}/_{120}$	Klftr.
$1608^{13}/_{24}$	Klftr.	$819^{23}/_{30}$	Klftr.	od. $788^{31}/_{40}$	"

U. s. f. — Daß auch bei diesem Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen, wie überhaupt bei der Lösung aller Aufgaben von den Schülern stets die Verifikation der Resultate gefordert werde, wird nicht immer wiederholt werden müssen. Dieselbe ist gewöhnlich ja sehr leicht auf irgend eine Art auszuführen, z. B. von den obigen Divisionssätzen hätte man

etwa für 3) $^7/_8$ Pfd. oder 28 Loth kosten $^2/_3$ Fr. oder $60^2/_3$ Rppn., also:

1 Loth kostet $66^2/_3$ Rppn. : $28 = 2^{32}/_{84}$ Rp. $= 2^8/_{21}$ Rp.

und für 4). Wenn mit 100 Fr. irgend eine Anzahl Franken gewonnen wird, so kommt auf 1 Fr. 100 Mal weniger und dieß ist dieselbe Anzahl Rappen, also $12^3/_7$ Rppn.

Ferner etwa für obige Additionsaufgabe 1). Nähme man für jeden Bruch 1 Malter mehr, so bekäme man $(21 + 8 + 16 + 11)$ Mltr. $=$ $= 56$ Mltr. Davon gingen ab $(^1/_4 + ^2/_5 + ^1/_3 + ^5/_6)$ Mltr. oder $^{(15+24+20+50)}/_{60}$ Mltr., d. s. $1^{49}/_{60}$ Mltr. und es blieben wirklich $54^{11}/_{60}$ Mltr. u. s. f.

Die Aufgaben A im IV. Heft bis Seite 20 können natürlich auch unmittelbar nach Durchnahme von a und b im vorigen Paragraphen gelöst werden.

Beispiele einfacher Dreisätze mit beliebigem Bruch.

Dieselben bilden den Schluß des Rechnungsunterrichts der II. Schulstufe (Realschule) und sie haben sich in allen Hauptrichtungen der Anwendung auf die bürgerlichen Rechnungsarten zu bewegen. Auch hier gibt der Lehrer im gleichen Sinne, wie im vorigen Schuljahre angedeutet wurde, die Erklärungen und Erläuterungen für die praktisch materialen Grundlagen, so viel wie möglich zum Voraus, damit hierüber nicht bei jedem einzelnen Beispiel besonders eingetreten werden muß. Indessen werden dennoch einige Aufgaben ihrer eigenen Erklärung bedürfen. Besonders ist es z. B. das Verhältniß %, dessen Bedeutung den Schülern zur rechten Klarheit zu bringen ist. Sie müssen recht darin befestigt werden, dieses Verhältniß auf diejenigen Größen zu fußen, von denen man ausgeht, und nicht umgekehrt. Wenn es sich z. B. um % Gewinn oder Verlust handelt, so heißt das: mit 100 Einheiten, die man zu einem Geschäfte verwandte, hat man so viel gewonnen oder verloren; und nicht: mit 100 Einheiten, die man bezieht, ist so viel gewonnen oder verloren worden. Man hat z. B. Etwas für 40 Fr. mit 5 % Gewinn verkauft und will den Gewinn im Ganzen wissen, so hat man nicht zu rechnen: Mit 100 sind 5 gewonnen worden, wie viel mit 40; denn die % Gewinn sind nicht mit dem eingenommenen, sondern dem verwendeten Gelde gemacht worden; man hat zu rechnen: Wenn man 105 Fr. einnähme, so wären 5 Fr. Gewinn darin; wie viel Gewinn in 40 eingenommenen Franken? Natürlich sind hier auch allfällig vorkommende kaufmännische Ausdrücke, wie Rabatt, Diskonto ꝛc., überhaupt alle diejenigen Verhältnisse, die

als neue in den Aufgaben auftreten, zu erklären. Die zusammengesetzten Operationssätze Heft IV Seite 21 bis 33 u. s. w. werden theils zum Kopf-, theils zum Zifferrechnen benutzt. Die einfachern Aufgaben, die sich für den erstern Zweck eignen, sind leicht herauszufinden, so daß eine besondere Angabe solcher Beispiele hier nicht nöthig ist. Auch lassen sich ja mit geringer Mühe einfache analoge Beispiele in Masse bilden. — Ausrechnung einzelner Dreisätze:

1) Wie viel Jahreszins bringen 210 Fr. 40 Rppn. zu $3\frac{1}{2}$ %? Auflösung: 100 Rp. bringen $3\frac{1}{2}$ Rp. Zins, einer bringt $\frac{7}{200}$ Rp. und 21040 Rp. bringen $\frac{7 \cdot 21040}{200}$ Rp. $= \frac{7 \cdot 526}{5}$ Rp. $= 3682$ Rp. $: 5 =$ $= 736\frac{2}{5}$ Rppn.

2) Welches Kapital wird zu 5 % einen Jahreszins von $27\frac{2}{3}$ Fr. geben? Lösung: Zu 5 Fr. Zins bedarf es 100 Fr. Kapital; zu 1 Fr. Zins 20 Fr. Kapital. Zu $\frac{1}{3}$ Fr. Zins bedarf es $\frac{20}{3}$ Fr. Kapital, also zu $27\frac{2}{3}$ Fr. oder $\frac{83}{3}$ Fr. Zins $\frac{(20 \cdot 83)}{3}$ Fr. Kapital $= 1660$ Fr. $: 3 =$ $= 553\frac{1}{3}$ Fr. Kapital.

3) In welcher Zeit werden 100 Fr. zu $4\frac{1}{2}$ % $23\frac{1}{5}$ Fr. Zins bringen? Lösung: Sie bringen $\frac{9}{2}$ Fr. in 1 Jahr, also $\frac{1}{2}$ Fr. in $\frac{1}{9}$ Jahr und 1 Fr. in $\frac{2}{9}$ Jahr, daher $\frac{1}{5}$ Fr. in $\frac{2}{45}$ Jahr und $\frac{116}{5}$ Fr. in $\frac{232}{45}$ Jahren $= 5\frac{17}{45}$ Jahre.

4) Ein Zentner Kaffee, der für 68 Fr. eingekauft worden war, wurde um 5 Fr. wohlfeiler wieder verkauft, wie viele % gingen dabei verloren? Lösung: Mit 68 Fr. verlor man 5 Fr., also mit 1 Fr. $\frac{5}{68}$ Fr. und mit 100 Fr. $\frac{500}{68}$ Fr. Das macht $7\frac{24}{68}$ % $= 7\frac{6}{17}$ %.

5) Wie viel % Fall hat ein Fluß an dem Orte, wo er auf $7\frac{1}{2}$ Fuß 1 Fuß fällt? Lösung: Wenn der Fall auf $\frac{15}{2}$ Fuß 1 Fuß beträgt, so auf $\frac{1}{2}$ Fuß $\frac{1}{15}$ Fuß und auf $\frac{200}{2}$ Fuß $\frac{200}{15}$ Fuß $= 13\frac{1}{3}$ Fuß, macht also $13\frac{1}{3}$ %.

6) Wenn 48 alte Fr. $= 70$ neuen Fr. gerechnet werden, wie viele neue Franken machen $730\frac{1}{4}$ alte Fr. aus? Lösung: 1 a. Fr. $= \frac{70}{48}$ n. Fr. $=$ $= \frac{35}{24}$ n. Fr., also $\frac{1}{4}$ a. Fr. $= \frac{35}{96}$ n. Fr. und $\frac{2921}{4}$ a. Fr. $=$ $(2921 \cdot 35)$ n. Fr. $: 96 = \frac{14605}{8763}$ n. Fr. $: 96 = 102235$ n. Fr. $: 96 =$ $= 1064\frac{91}{96}$ n. Fr. $\begin{matrix} 6 \\ 47 \end{matrix}$

7) Ein Haufen Schutt könnte durch 17 Arbeiter in $3\frac{3}{4}$ Monaten weggeschafft werden; wie lange aber hätten 39 Arbeiter daran? Lösung: Wenn jeder gleich viel leistet wie der andere, so hätte 1 Arbeiter 17 Mal länger als 17 Arbeiter, also $\frac{15}{4}$ Monat $\times$ 17 $= \frac{255}{4}$ Monat und

39 Arbeiter 39 Mal weniger lang, also $^{255}/_{4}$ M. : 39 = $^{255}/_{156}$ M. = = $^{85}/_{52}$ M. = $1^{33}/_{52}$ M. (Aus dem Bruch würden noch die Tage gezogen.)

8) Es hat Jemand eine Rechnung von 89 Fr. 40 Rp. zu bezahlen; wie viel muß er wirklich entrichten, wenn man ihm $3^{3}/_{4}$ % Rabatt bewilligt? Lösung: $3^{3}/_{4}$ % Rabatt bedeutet, daß statt je 100 Rppn. nur $96^{1}/_{4}$ Rppn. zu bezahlen sind, also statt 1 Rppn. nur $96^{1}/_{4}$ Rp. : 100 = $^{385}/_{400}$ Rp. = $^{77}/_{80}$ Rp.; also statt 8940 Rp. nur $\frac{77 \quad 8940}{80}$ Rppn. = = $\frac{77 \,.\, 447}{4}$ Rppn. = $\frac{3129}{3129}$ Rppn. : 4 = $^{34419}/_{4}$ Rp. = $8604^{3}/_{4}$ Rp. = = 86 Fr. $4^{3}/_{4}$ Rppn.

9) Wenn man beim Läutern des Peches 18 % Abgang rechnet, wie viel ungeläutertes braucht man dann, um $2^{1}/_{4}$ Ztr. geläutertes zu erhalten? Lösung: Für 100 Pfd. ungeläutertes erhält man 82 Pfd. geläutertes, also für 41 Pfd. geläutertes bedarf man 50 Pfd. ungeläutertes, daher für 1 Pfd. geläutertes $^{50}/_{41}$ Pfd. ungeläutertes und für 225 Pfd. geläutertes $\frac{50 \,.\, 225}{41}$ Pfd. ungeläutertes = 11250 Pfd. : 41 = $274^{16}/_{41}$ Pfd.
30
18

10) Wie theuer muß 1 Ztr. Waare, den man für 23 Fr. eingekauft hat, verkauft werden, damit man 20 % gewinnt? Lösung: 20 % gewinnen heißt für 100 ausgegebene Fr. 120 Fr. einnehmen. Also muß man für 1 ausgegebenen Fr. $^{120}/_{100}$ Fr. oder $^{6}/_{5}$ Fr. einnehmen, daher auch für 23 ausgegebene Fr. $\frac{6 \,.\, 23}{5}$ Fr. = $^{138}/_{5}$ Fr. = $27^{3}/_{5}$ Fr. = = 27 Fr. 60 Rppn. einnehmen.

11) Wenn man 1 Ztr. Waare für 30 Fr. verkauft und dadurch 30 % gewinnt; wie theuer hatte man ihn eingekauft? Lösung: So oft man 130 Fr. einnimmt, so oft hat man 100 Fr. ausgegeben; wenn man also 1 Fr. einnimmt, hat man dagegen $^{100}/_{130}$ Fr. = $^{10}/_{13}$ Fr. ausgegeben; daher bei 30 Fr. Einnahme hatte man $\frac{30 \,.\, 10}{13}$ Fr. = $^{300}/_{13}$ Fr. = $23^{1}/_{13}$ Fr. Ausgabe. U. s. f.

Wenn die Brüche der Resultate in die kleinsten Maß- oder Münzeinheiten ꝛc. verwandelt sind, so darf man den letzten Bruch entweder wegwerfen oder, wenn er nahe an der Einheit ist, eine solche dafür nehmen. Der Schüler muß an diese Auslegung des Schlußergebnisses gewöhnt werden. Besonders präparirte oder zugeschnittene Rechnungsaufgaben taugen für die Schule nicht viel, das Leben bietet sie auch nicht so, und wenn man auch im Leben bei den Grundlagen der Rechnung die Brüche möglichst zu

vermeiden sucht, so führt doch die Rechnung mit diesen Verhältnissen auf den Bruch und derselbe kann hier durchaus nicht entbehrt werden, selbst wenn nur ein einfacher Dreisatz zu lösen ist. — Da die vorausgegangene Rechnungsabtheilung schon eine größere Gewandtheit und Sicherheit im arithmetischen Schließen erfordert, so ist hier die Verifikation der einzelnen Rechnungen ein um so unerläßlicheres Erforderniß. Der Schüler wird dadurch auch erst recht an ein vielseitigeres Denken gewöhnt. Die Art, wie er seine Rechnungsergebnisse verifizirt, soll ihm aber überlassen bleiben; je eigenthümlicher er verfährt, desto besser, wenn nur das Verfahren ein richtiges und verständiges ist! Die folgenden Beispiele sollen also nicht als Norm, sondern als bloße Andeutungen gelten.

Verifikation zur ersten der vorausgegangenen Aufgaben: 200 Fr. bringen 7 Fr. Zins, 10 Fr. bringen 35 Rppn., 10 Rppn. bringen $^7/_{20}$ Rppn. und 40 Rppn. bringen $1^2/_5$ Rppn.; also 210 Fr. 40 Rppn. bringen 7 Fr. $36^2/_5$ Rppn. Zins.

Zur 4ten: Mit 68 Fr. oder 4 . 17 Fr. wurden 5 Fr. verloren, also mit 4 Fr. $^5/_{17}$ Fr. und mit 4 . 25 Fr. $\frac{5 \cdot 25}{17}$ Fr. $= {}^{125}/_{17}$ Fr. $= 7^6/_{17}$ Fr. Auf 100 $7^6/_{17}$ verlieren, heißt $7^6/_{17}$ $^0/_0$ verlieren.

Zur 5ten: Auf $7^1/_2$ Fuß 1 Fuß Fall, macht auf 15 Fuß 2 Fuß und auf 5 Fuß $^2/_3$ Fuß, also auf 100 Fuß $^{40}/_3$ Fuß $= 13^1/_3$ Fuß, d. i. $13^1/_3$ $^0/_0$ Fall.

Zur 6ten:

$$\left.\begin{array}{rcl} 48 \text{ a. Fr.} = 70 \text{ n. Fr.}; & \text{also } 700 \text{ a. Fr.} = & 1020^5/_6 \text{ n. Fr.} \\ 4 \text{ " } = 5^5/_6 \text{ " } & \text{" } 10 \text{ " } = & 14^7/_{12} \text{ " } \\ 1 \text{ " } = 1^{11}/_{24} \text{ " } & \text{" } 20 \text{ " } = & 29^1/_6 \text{ " } \\ 100 \text{ " } = 145^5/_6 \text{ " } & \text{" } {}^1/_4 \text{ " } = & {}^{35}/_{96} \text{ " } \end{array}\right\} = 1064^{91}/_{96} \text{ n. Fr.}$$

u. s. f.

Oder statt solch stückweiser Zusammensetzung auf eine andere Art, die sich etwa auf die Vertauschung der Rangordnung der Operationen bezieht. Z. B. bei der 8ten könnte man rechnen, wie viel man von 8940 Rp. abziehen darf, wenn von 100 $3^3/_4$ abgehen, und alsdann den Gesammtrabatt von 8940 Rppn. wegzählen.

Auch zur bloßen Schätzung der Resultate müssen die Schüler angehalten werden; sie finden dadurch oft schon mit einem Blick, zwischen welchen Gränzzahlen das Resultat sich befinden muß und das ist schon für sich sehr nützlich. Ueberdieß ergibt sich hieraus, ob ein nach einem gewissen Rech-

nungsverfahren erhaltenes Resultat wenigstens ein mögliches ist, oder nicht. Z. B. bei obiger Aufgabe 7) würde folgen: 2 Mal mehr Arbeiter, d. s. 34 Arbeiter, hätten 2 Mal weniger Monate, d s. $1^7/_8$ Monate, und 3 Mal mehr Arbeiter, d. s. 51 Arbeiter, hätten 3 Mal weniger Monate, d. s. $1^1/_4$ Monat Daher muß das Resultat für 39 Arbeiter doch wenigstens zwischen $1^1/_4$ und $1^7/_8$ Monate liegen u. s. f. — Eine weitere wichtige Uebung ist die Analysirung der angewandten Aufgaben, d. h. die Aufsuchung der einzelnen Operationssätze, durch welche irgend eine angewandte Aufgabe gelöst werden kann. Es versteht sich, daß hier zunächst das Normal- oder Generalverfahren zu berücksichtigen ist, d. h. diejenige Lösungsweise, die auf alle Aufgaben einer gewissen Gattung anwendbar ist; alsdann werden auch diejenigen Operationen aufgesucht, die je nach den besondern Eigenthümlichkeiten einer speziellen Aufgabe deren Resultat ebenfalls hervorbringen können. Z. B. obige Aufgabe 11 enthält nach dem Generalverfahren den Divisionssatz: Bei 1 Fr. Einnahme hat man den 130sten Theil von 100 Fr. ausgegeben, und den Multiplikationssatz: Bei 30 Fr. Einnahme hat man 30 Mal so viel ausgegeben. Dann allfällige Aufsuchung irgend einer besondern Lösung, die etwa von der Beschaffenheit der Zahlen 130, 100 und 30 abhängt ꝛc. Endlich ist noch eine wichtige Seite des Unterrichts die, daß die Schüler veranlaßt werden, Aufgaben, wo ihnen solche in ihrem Erfahrungskreise im Leben entgegentreten, festzuhalten und auch Aufgaben selbst zu bilden; also Aufgaben, die ihnen entgegentreten, nach den Operationssätzen, die sie enthalten, zu analysiren und dann zu lösen, so wie auch Aufgaben nach bestimmten Operationsverbindungen selbst zu machen und alsdann zu lösen. Die Schüler bilden also mit Berücksichtigung beliebiger ungleichnamiger Brüche

1) Aufgaben, welche die Verbindung der beiden ersten Rechnungsverrichtungen (Zu- und Wegzählen) enthalten.

2) Aufgaben, welche die Verbindung einer der beiden ersten mit einer der beiden folgenden Rechnungsverrichtungen (Vervielfachen und Entvielfachen) enthalten.

3) Aufgaben, welche die Verbindung der beiden letztern Verrichtungen (Dreisätze mit gerader und umgekehrter Proportionalität) enthalten. Der Lehrer beurtheilt dieselben und läßt sie lösen (etwa auch als Uebung im Kopfrechnen).

Vierte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht

auf der dritten Schulstufe;

Real-Ergänzungsschule.

I.

Siebentes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem zwölften und dreizehnten Altersjahr.

§ 65.

Aufgabe.

Als solche wurde in der ersten Abtheilung bezeichnet: Ableitung der Dezimalbrüche und Abschluß des Zahlsystems nach unten. Einfaches Rechnen mit Dezimalen. Als Anwendungen auch im Sinne der realen Erweiterung: Sowohl einfache Operationssätze als paarweise Operationsverbindungen mit Dezimalbrüchen; dann als weiterer Fortschritt: der mehrfach verbundene Multiplikations- und Divisionssatz oder der zusammengesetzte Dreisatz.

§ 66.

Reines Rechnen (Zählen) mit Dezimalbrüchen.

A. Ableitung der Dezimalbrüche und Abschluß des Zahlsystems.

Es ist nicht gut, wenn man dem jungen Schüler ohne weiters die Dezimalbrüche als solche Brüche vorführt, die die Eigenthümlichkeit haben, daß ihre Nenner nur 10, oder 100, oder 1000, oder 10000 ꝛc. (überhaupt eine g. a. Potenz von 10, wie man nach einer mehr wissenschaftlichen Terminologie zu sagen pflegt) sein können, und darauf dann sogleich die eigenthümliche Bezeichnungsweise dieser Brüche lehrt. Man entzieht so dem Schüler gleich im Anfange, was ihm zum Voraus nicht vorenthalten bleiben sollte: nämlich die konkrete und praktische Grundlage dieser besondern Brüche. Erhält aber der Schüler auch hier eine recht lebendige

Anschauung von der dekadischen Abstufung der Bruchtheile und faßt er deren Zusammenhang mit den dekadisch eingetheilten bürgerlichen Rechnungsgrößen schon von Anfang an auf, so wird bei ihm dieser ganze Unterricht weit wirksamer sein; er kann fast unmöglich in die sonst so häufig bemerkbare Unsicherheit jener Schüler verfallen, die so leicht 10er mit 10teln, 100er mit 100steln u. s. f. verwechseln, eben weil sie bei einem zu abstrakt objektiven und zu wenig entwickelnden Unterrichte weder die einen noch die andern dieser Einheiten scharf aufgefaßt haben. Die oben bezeichnete, auf konkreter und praktischer Grundlage beruhende Entwicklung der Dezimalbrüche kann der Lehrer z. B. auf folgende oder eine ähnliche Weise beginnen:

Wir wollen an der Wandtafel auf eine gerade Linie eine Anzahl Zolle, z. B. $23^2/_5$'' abtragen. — Hier haben wir also eine Länge, in der als größter Theil 2' oder 2 Zehner Zolle, dann 3 ganze Zolle und zuletzt noch 2 Stückchen vorkommen, von denen jedes $^1/_5$'' ist. Die Länge ist also aus verschiedenen Stücken zusammengesetzt, nämlich aus Fußen, Zollen und Fünftelzollen. Die Fuße sind 10 Mal so groß als die Zolle, diese aber nur 5 Mal so groß als die Fünftelzolle. Sollten nun alle Stücke so beschaffen sein, daß stets ein Stück einer Art 10 Mal so groß als ein Stück der nächst kleinern Art ist, so müßte man statt der Fünftelzolle solche Stücke wählen, die auch 10 Mal kleiner als die Zolle, also = 10tel Zollen (oder Linien) wären. Wie viele 10tel sind $^2/_5$? — Also hätte man jetzt $23^4/_{10}$''. Hier sind die Stücke Zehner, Einer, Zehntel in der Abstufung zu einander, wie man sie wünschte. Wie manchmal so groß ist ein Einer als ein Zehntel? Ein Zehner als ein Zehntel? — Hätte man gehabt $125^3/_4$''; so wären die verschiedenen Stücke, die hier gezählt sind, Hunderter-, Zehner-, Einer- und Viertel-Zolle; die Bruchstücke passen also auch hier nicht zu der Abstufung nach 10, da sie bloß 4 Mal und nicht 10 Mal kleiner sind als die Einer. Wie viele Zehntel hat nun $^1/_4$? — Gut, 1 Viertel hat 2 und einen halben Zehntel, also 3 Viertel 7 und einen halben Zehntel; das wollen wir darstellen. Man sieht also, die 4tel lassen sich nicht in lauter 10teln ausdrücken; es bleibt noch ein Stückchen, das gleich ist einem halben Zehntel. Wir wollen dasselbe auch noch in Theilchen ausdrücken, die 10 Mal kleiner als die 10tel, also = 100stel sind. Es ist 1 Zehntel = 10 Hundertstel, daher ein halber Zehntel = 5 Hundertstel. Die $125^3/_4$ Zoll zerfallen nun in 1 Hunderter, 2 Zehner, 5 Einer, 7 Zehntel und 5 Hundertstel des Zolls, von welchen

Stücken je die nächst kleinere Art 10 Mal kleiner als die vorangegangene ist. — So noch ein paar andere Beispiele, bezogen auf andere Einer als die Zolle! Dann: Wenn man durch eine Zahl, die aus Ganzen und Bruchtheilen besteht, lauter solche Stücke ausdrücken will, die sich nach 10 abstufen, d. h. von denen je eines 10 Mal so groß ist als das nächst untergeordnete, so muß man aus dem Bruche die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel u. s. f. ausrechnen und ihn in solchen Stellentheilen ausdrücken. Diese Stellentheile des Bruchs gehen also nach dem gleichen Gesetze, nach welchem die Stellentheile der ganzen Zahlen fortschreiten; daher kann man dieses Gesetz auch für die Bruch-Ziffern, wie für diejenigen der ganzen Zahlen benutzen. Es muß nämlich stets jede Ziffer rechts nach einer andern 10 Mal kleinere Stücke bezeichnen als die Ziffer links und man hat so nur zu wissen, welche Stelle die Einer bezeichnet. Zu diesem Behufe wird rechts nach der Einerziffer ein Strich gesetzt. Die obige Zahl $23^2/_5$'' oder $23^4/_{10}$'' würde also geschrieben 23,4'', worin die Ziffer 3 die Einer-Zolle, 2 die Zehner-Zolle oder Fuße, 4 diejenigen Stücke, die 10 Mal kleiner als die Einer-Zolle, also Zehntel-Zolle bezeichnet. Ebenso wäre $125^3/_4$'' = 125,75'', worin 7 die Zehntel- und 5 die Hundertstel-Zolle ausdrückt. U. s. f. mehrere Beispiele auch für 1000stel ꝛc.

Wenn nun die Bruchtheile eines Bruchs in 10teln, 100steln, 1000steln, 10000steln ꝛc. ausgedrückt sind, so bilden dieselben einen Dezimalbruch, d. h. eben einen Bruch, der nach der gleichen Dezimal- oder Zehner-Regel gebildet ist wie die ganzen Zahlen.

Wir wollen noch einige andere gewöhnliche Brüche in solche Dezimalbrüche verwandeln lernen.

Es ist z. B. $^7/_8$ gleich dem 8ten Theil von 7 Ganzen oder von 70 Zehnteln, das macht zunächst 0 Ganze und 8 Zehntel (geschrieben 0,8), der Rest ist 6 Zehntel oder 60 Hundertstel und der 8te Theil davon 7 Hundertstel (0,07) und der neue Rest 4 Hundertstel oder 40 Tausendstel, von denen der 8te Theil genau 5 Tausendstel (0,005) ausmacht. Also der 8te Theil von 7 Ganzen, d. i. $^7/_8$, = 0,875. Ebenso wäre $^{17}/_{20} = {}^{17}_{1,00} : 20 = 0{,}85$; $^3/_{16} = 3 : 16 = 0{,}1875$; also $^{17}/_{20} = {}^8/_{10} + {}^5/_{100} = {}^{80}/_{100} + {}^5/_{100} = {}^{85}/_{100}$ und $^3/_{16} = {}^1/_{10} + {}^8/_{100} + {}^7/_{1000} + {}^5/_{10000} = {}^{1875}/_{10000}$

Statt also die Stellen nach den Komma einzeln zu lesen, liest man die Ziffern nach demselben wie gewöhnlich und die Zahl, welche sie

bezeichnen, drückt den Werth des Bruchs in Bruchtheilen von der niedrigsten Stelle aus. Wie viel sind z. B. folgende Brüche: 0,86; 0,341; 0,444; 0,7103; 0,10456; 0,123456; 0,0145; 0,01045; 0,004; 0,0003; 0,000804; 0,0000085; ꝛc.? (Die Antworten etwa so: 0,01045 bezeichnet $^{1045}/_{100000}$, denn die letzte Stelle zählt 100000stel. Oder: Dieser Bruch enthält $^{1}/_{100} + {}^{4}/_{10000} + {}^{5}/_{100000} = {}^{1045}/_{100000}$.) Wie viel zählt die Stelle rechts nach den Einern, nach den Zehnteln, nach den Hundertsteln ꝛc.? Wie viel die Stelle nach den Hunderttausendsteln, vor den Zehntausendsteln, vor den Hundertsteln, vor den Einern, vor den Zehnern, ꝛc.? — Schreibet folgende Dezimalbrüche nach obiger Regel des Zehnersystems auf: $^{3}/_{10}$; $^{5}/_{100}$; $^{7}/_{1000}$; $^{9}/_{1000}$; $^{6}/_{10000}$; ꝛc. z. B. 0,3; 0,05; 0,007; u. s. f. — Schreibet in einen Dezimalbruch 0 Ganze, $^{5}/_{100}$, $^{9}/_{1000}$ (so: 0,059); dann ebenso: $^{3}/_{10}$, $^{5}/_{100}$, $^{6}/_{1000}$; dann $^{4}/_{10}$, $^{1}/_{1000}$, $^{3}/_{10000}$; dann $^{5}/_{100}$, $^{9}/_{1000}$, $^{3}/_{10000}$; dann $^{9}/_{10}$, $^{4}/_{100}$, $^{7}/_{10000}$, $^{1}/_{100000}$ u. s. f. Wie viel machen diese Stellen für jeden dieser Brüche in den niedrigsten Dezimaltheilen ausgedrückt? Z. B. der erste Bruch zählt 59 Tausendstel, der zweite 356 Tausendstel, der letzte 94071 Hunderttausendstel u. s. f.

Wie schreibt man ebenso folgende Dezimalbrüche: $^{17}/_{100}$; $^{43}/_{1000}$; $^{101}/_{1000}$; $^{72}/_{10000}$; $^{1044}/_{10000}$; $^{281}/_{100000}$; $^{108451}/_{1000000}$; $^{144}/_{10}$; $^{1579}/_{1000}$; $^{34001}/_{10000}$; $^{3456}/_{100}$; $^{531}/_{100}$; $^{1045}/_{1000}$; $^{307108}/_{10000}$ u. s. f.? Der 1ste wird geschrieben 0,17, der 3te 0,101, der 6te 0,00281, der 8te 14,4, der 11te 34,56, der 13te 109,045 u. s. f. Ueberhaupt wird bei jedem dieser Brüche die Anzahl der Bruchtheile (der Zähler) wie gewöhnlich angeschrieben und dann das Komma so gesetzt, daß die letzte Ziffer rechts gemäß ihrem Stellenwerthe Bruchtheile bezeichnet, die gleich denen des ganzen Bruchs sind. Der Nenner eines Dezimalbruchs wird also in der praktischen Rechenkunst gewöhnlich nicht angeschrieben; er wird erkannt aus dem Stellenwerth der niedrigsten oder letzten Ziffer rechts. Die Nenner der Dezimalbrüche sind also nur 10, oder 100, oder 1000, oder 10000, oder 100000, oder 1000000 u. s. f., daher lauter Zahlen, die geschrieben werden mit der Ziffer 1 und einer oder mehreren nachfolgenden Nullen.

Schreibet einige beliebige Dezimalbrüche auf! — Welche der folgenden Brüche sind Dezimalbrüche und welche nicht: $^{17}/_{10}$; $^{5}/_{100}$; $^{7}/_{30}$; $^{23}/_{50}$; $^{23}/_{100}$; $^{3015}/_{1000}$; $^{234}/_{1000}$; $^{135}/_{2000}$; $^{41}/_{600}$; $^{700}/_{1000}$ ꝛc.? — Warum?

Mit den Dezimalbrüchen ist man jetzt im Stande, das ganze Zahlgerüste des Zehnersystems zu vollenden; alle Größen lassen sich hiedurch

zehntheilig (in Ganzen und Dezimaltheilen) so genau ausdrücken, als man irgend nöthig hat, und die Bruchtheile nehmen nach den untern Stellen eben so schnell ab, wie die obern Stellen schnell zunehmen. Hat man z. B. die Zahl 15312,123541 Ruthen, von welcher also die Einer Ruthen (d. h. 1 Ruthe = 10 Fuß) bedeuten, so stellt $^1/_{10}$ einen Fuß, $^2/_{100}$ zwei Zolle, $^3/_{1000}$ drei Linien, $^5/_{10000}$ fünf Zehntel von 1‴, $^4/_{100000}$ vier Hundertstel von 1‴, endlich $^1/_{1000000}$ den 1000sten Theil von 1‴ dar. Die $^5/_{10}$‴ lassen sich noch deutlich als $^1/_2$‴ darstellen; aber $^1/_{10}$‴ ist schon sehr klein, dagegen sind die $^4/_{100}$‴ nicht mehr deutlich darstellbar und noch viel weniger $^1/_{1000}$‴. Wir können uns diese fortgesetzte Abnahme bloß noch denken, allein in Gedanken so weit fortsetzen, als wir wollen, und es kommt dann stets auf die Größe des Einers an, ob eine gewisse Dezimalstelle noch etwas wirklich Darstellbares oder bloß in Gedanken Festgehaltenes bezeichne. Wie stark die Stellen der Ganzen nach oben zunehmen, haben wir früher schon gesehen, ebenfalls, daß wir zuletzt wohl noch von dem Gesetze des Zunehmens eine Vorstellung haben können, nicht aber mehr von der Zahl der einzelnen aus einander zu haltenden Dinge. Beide Zweige nach oben und unten verlieren sich also, was die wirkliche Darstellung der Zahlgröße anbelangt, zuletzt ins Undeutliche, nach oben ins ohne Ende Anwachsende (Unendlichgroße), nach unten ins ohne Ende Abnehmende (Unendlichkleine). Zwischen beiden Gränzen hat man das durchs Zählen bestimmt Aufzufassende (das Endliche) die wirklichen Zahlen: ganze und gebrochene.

B. Das einfachste Rechnen mit Dezimalen.

Das Zu- und Wegzählen, Vervielfachen und Theilen von Dezimalen kann ganz gleich ausgeführt werden wie dasjenige von gewöhnlichen Bruchtheilen; jenes geht nur leichter von Statten als dieses, da bei jenem das so schwerfällige Gleichnamigmachen wegfällt.

a. Zusammenzählen:

$^3/_{100} + {}^1/_{10} + {}^5/_{10} + {}^4/_{1000} + {}^6/_{100} = {}^6/_{10} + {}^9/_{100} + {}^4/_{1000} = {}^{694}/_{1000}$; (nach gewöhnlicher Additionsweise).

oder $0{,}03 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}004 + 0{,}06 = 0{,}6 + 0{,}09 + 0{,}004 = 0{,}694$;

ferner $^5/_{10} + {}^7/_{1000} + {}^1/_{100} + {}^4/_{10} + {}^1/_{10000}$ oder $0{,}5 + 0{,}007 + 0{,}01 + 0{,}4 + 0{,}0001 = ?$

$0{,}5 + 0{,}12 + 0{,}6 + 0{,}25 + 0{,}015 + 0{,}7 + 0{,}907 + 0{,}009 = ?$ u. s. f. beliebige Beispiele.

Man sieht, daß man bei diesen Brüchen nur die gleichen Stellentheile zusammenzählen muß wie bei den ganzen Zahlen, um die Summe zu erhalten. Da thut man beim Rechnen mit Zifferansatz am besten, die gleich hohen Stellen der einzelnen Posten wie früher bei den ganzen Zahlen unter einander zu schreiben und so zusammen zu zählen. Man habe auf diese Weise:

Ruthen:	
0,123	
0,0451	
3,1235	
17,03161	
201,20041	
8,9071	
0,0056	
230,43632	

Es liegt in der Bedeutung der Summe, daß dieselbe alle Theile der einzelnen Posten in sich aufnehmen muß; sie muß also alle Hdrttausdstl., alle Zehntsdstl., alle Tausdstl. u. s. f. in sich enthalten. Ganz aus dem gleichen Grunde, wie bei den ganzen Zahlen, wird man also zuerst die gleichen Stücke der niedrigsten Art zusammenzählen, um allenfalls für je 10 derselben 1 Einheit zu denen der nächst höhern Art zählen zu können u. s. f. Die niedrigsten Theile sind Hdrttausdstl., es sind deren 1 + 1 oder 2; dann Zehntsdstl., nämlich 6 + 1 + 4 + 6 + 5 + 1 oder 23, die lassen sich zerlegen in 3 Zhntsdstl. und 20 Zhntsdstl. oder 2 Tsdstl. So werden auch alle Tausendstel zusammengefaßt u. s. f. bis und mit den ganzen Zahlen. Die Summe zählt also 230 ganze Ruthen, $^4/_{10}$ R. oder 4′, $^3/_{100}$ R. oder 3″, $^6/_{1000}$ R. oder 6‴, $^3/_{10000}$ R. oder $^3/_{10}$‴ und $^2/_{100000}$ R. oder $^2/_{100}$ ‴. Hierauf mancherlei Aufgaben zur Addition von Dezimalen.

b. Wegzählen; zunächst einfachere Aufgaben, z. B.:

$^9/_{10} - {}^5/_{10} = {}^4/_{10}$ oder $0{,}9 - 0{,}5 = 0{,}4$; $^{18}/_{100} - {}^{12}/_{100}$ oder $0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}06$. u. s. f.

$0{,}45 - 0{,}09 - 0{,}09 - \ldots$ bis 0 bleibt; $0{,}124 - 0{,}031 - 0{,}031 - \ldots$ bis 0.

$8^{14}/_{100} - 6^{11}/_{100}$ oder $8{,}14 - 6{,}11 = ?$ $9^{23}/_{1000} - 1^{151}/_{1000}$ oder $9{,}023 - 1{,}151 = ?$ $16{,}9 - 5{,}9 = ?$ $17{,}01 - 12{,}92 = ?$ $314{,}103 - 100{,}0123 = ?$ $0{,}001 - 0{,}0001 = ?$

$1 - 0{,}5$; $1 - 0{,}56$; $1 - 0{,}0134$; $1 - 0{,}123057$; $2 - 1{,}000501$; $4570{,}7 - 1259{,}12$; $1957 - 500{,}731 - 500{,}731 - \ldots$ u. s. f.

Da die Theile der Abzugszahl von den entsprechenden der Vollzahl weggezählt werden müssen, so thut man beim Rechnen mit Zifferansatz am besten, jene unter diese so anzuschreiben, daß die gleich hohen Stellen unter einander zu stehen kommen, also 10tel unter 10tel, 100stel unter 100stel u. s. f. wie bei den Ganzen. Man habe so:

1044,9456 Kubikfuß.
943,8241 =
101,1215 =

Am zweckmäßigsten werden zuerst die niedrigsten Theile weggezählt, hierauf die nächst folgenden u. s. f. Also 1 Zehntausendstel von 6 Zehntausendstel bleiben 5 Zehntausendstel, 4 Tausendstel von 5 Tausendsteln bleibt 1 Tausendstel u. s. f. Man kann aber auch den Unterschied durch Hinzuzählen finden. Was gibt zu 1 Zhntsdstl. gezählt 6 Zhntsdstl.? (Antwort: 5 Zhntsdstl.). Zu 4 Tsdstl. 5 Tsdstel.? (Antwort: 1 Tsdstl.). Zu 2 Hdrtstl. 4 Hdrtstl.? Zu 8 Zhntl. 9 Zhntl.? ꝛc. In beiden Fällen erhält man den wahren Unterschied oder diejenige Zahl, die zur Abzugszahl hinzugefügt die Vollzahl gibt. Es ist gut, wenn die Schüler nach beiden Arten geläufig rechnen können. Die Bestimmung des Unterschiedes durch Hinzufügung ist eben so praktisch als durch Wegnahme, z. B.:

345,60781 Ztr.
134,81792 =
210,78989 =

Man hat nur zu jedem Stellentheil der Abzugszahl (natürlich beim niedrigsten beginnend) so viel hinzuzuzählen, bis der entsprechende der Vollzahl oder dann die kleinste zweistellige Summe herauskommt, von welcher die erste Stelle so viel ausmacht, wie die entsprechende der Vollzahl; die zweite Stelle wird gerade wie beim Addiren zur folgenden der Abzugszahl gezählt und dann wieder verfahren wie vorhin; also: 2 Hdrttsstl. + **9** Hdrttsstl. = (1 + 10) Hdrttsstl.; die 10 Hdrttsstl. oder 1 Zhntsdstl + 9 Zhntsdstl, sind 10 Zhntsdstl. und noch **8** solche dazu sind (8 + 10) Zhntsdstl.; die 10 Zhntsdstl. oder 1 Tsdstl. + 7 Tsdstl. sind 8 Tsdstl. und noch **9** solche hinzu geben (7 + 10) Tsdstel. u. s. f. bis und mit den Ganzen; also ein wirkliches stellenweises Addiren des zu suchenden Unterschiedes zur Abzugszahl in der Weise, daß stets die Stellentheile der Vollzahl herauskommen. — Bei der Bestimmung des Unterschiedes durch Wegnahme sollte nun das ziemlich mühsame Entlehnen bei der Vollzahl vermieden und ein etwas schnelleres Verfahren eingehalten werden. Nach diesem wird man zu jeder Stelle in der Vollzahl, die kleiner ist als die entsprechende in der Abzugszahl, 10 Theile oder Einheiten dieses Ranges hinzudenken, aber dieselben mit der nächstfolgenden Stelle der Abzugszahl wieder wegrechnen u. s. f.; also: 2 Hdrtsdstl. von 11 Hdrtsdstl. bleiben **9** Hdrtsdstl; dann (1+9) Zhntsdstl. von 18 Zhntsdstl. bleiben **8** Zhntsdstl.; dann (1+7) Tsdstl. von 17 Tsdstln. bleiben **9** Tsdstl.; dann (1 + 1) Hdrtstl. von 10 Hdrtstln. bleiben **8** Hdrtstl. u. s. f. bis zu Ende. — Daß man von Zeit zu Zeit die Resultate nach ihren Theilen wieder zergliedern und deren Bedeutung hervorheben läßt, ist ganz am Platze, man verhindert so, daß die Schüler bloß mit Formen, Ziffern

und Namen verkehren, und führt sie immer wieder zur Sache, zur Realität zurück. Der obige Unterschied beträgt also 210 ganze Ztr., $^{7}/_{10}$ Ztr. oder 70 Pfd., $^{8}/_{100}$ Ztr. oder 8 Pfd., $^{9}/_{1000}$ Ztr. oder $^{9}/_{10}$ Pfd., d. i. (9 . 50) Gramme, $^{8}/_{10000}$ Ztr. oder $^{8}/_{100}$ Pfd., d. i. 40 Gramme, und $^{9}/_{100000}$ Ztr. oder $^{9}/_{1000}$ Pfd., d. i. $^{9}/_{2}$ Gramme.

Bei der Multiplikation und Division werden wir bloß die einfachsten Fälle behandeln, nämlich diejenigen, in denen Multiplikator und Divisor noch ganze Zahlen sind, gerade wie auf der frühern Schulstufe bei den gemeinen Brüchen auch erst diese Fälle berücksichtigt wurden. Wo die Schulverhältnisse sehr günstig sind, da mag der Lehrer wohl noch weiter gehen und dasjenige hier noch folgen lassen, was wir im nächsten Schuljahre als Fortsetzung dieser Partie zunächst behandeln. Für die Mehrzahl der Schulen wird dagegen der hier gebotene Umfang genügende Arbeit liefern, besonders wenn wir noch die praktische Aufgabe dieses Schuljahres und hier insbesondere die Behandlung der zusammengesetzten Dreisätze ins Auge fassen.

c. Bei der Multiplikation sind zunächst Uebungen folgender Art (ohne Ziffersatz) theils zur Repetition und Befestigung des Frühern, theils zur Weiterführung zweckmäßig. Z. B.: Wie viel geben 3 Zehntel 4, 5, 8, 9 Mal genommen? — Gut, also Zehntel 1 Mal oder Einer Mal genommen, geben wieder Zehntel. Wie viel geben 7 Zehntel 10 Mal genommen? (7 Ganze). Und 7 Zhntl. 20, 30, 40 Mal genommen? (das ist so viel als 7 Zhntl. 10 Mal und dann noch 2 Mal, 3 Mal, 4 Mal. Aber 7 Zhntl. 10 Mal sind 7 Ganze, und dann noch 2 Mal sind 14 Ganze; eben so $^{7}/_{10} . 10 . 3 = 21$; $^{7}/_{10} . 10 . 4 = 28$). Also Zehntel 10 Mal, überhaupt 10er Mal genommen, geben Ganze, Einer. Und in gleicher Betrachtung: Zehntel 100er Mal genommen geben Zehner. Zehntel 1000er Mal genommen geben Hunderter ꝛc. Eben so: Hundertstel 1 Mal oder 1er Mal genommen geben Hundertstel. Jeder 100stel 10 Mal genommen gibt aber 1 Zehntel, also überhaupt Hdrtstl. 10er Mal genommen geben Zehntel. Eben so Hdrtstl. 100 Mal, 1000 Mal, 10000 Mal geben Einer, Zehner, Hunderter u. s. f. So für alle Stellen von den Zehnteln bis Millionsteln multiplizirt mit Einern, Zehnern, Hundertern . . . bis Millionen. — Dann beliebig, z. B.: Wie viel machen 4 Zhntsdstl. × × 6 Tsdr.? Die Schüler leiten das Ergebniß auf verschiedene Weise ab; z. B. 4 Zhntsdstl. × 6 sind 24 Zhntsdstl., 4 Zhntsdstl. × 6 Zehner geben 10 Mal mehr, also 24 Tsdstl., dann × 6 Hunderter 100 Mal

mehr, also 24 Hdrtstl., dann × 6 Tsdr. 1000 Mal mehr, also 24 Zhntl. — Oder 4 Zhntsdstl. × 6 Zhntsdr. gäben 24 Einer, also 4 Zhntsdstl. × 6 Tsdr. 10 Mal weniger, das sind 24 Zhntl. Oder $^4/_{10000} \times 6000 = ^{24000}/_{10000} = ^{24}/_{10}$ u. s. f. auf beliebige passende Weise.

Nun folgen ganz gleiche Aufgaben und Zusammensetzungen dieser Aufgaben als Uebungen im Zifferrechnen. Z. B.:

$^1/_{10} \times 5$ oder $0{,}1 \times 5 = 0{,}5$; $^4/_{100} \times 7$ oder $0{,}04 \times 7 = 0{,}28$ ꝛc.

$^7/_{10} \times 20$ oder $0{,}7 \times 20 = 14$; $0{,}007 \times 600 = 4{,}2$ u. s. f.

$0{,}013 \times 5 = 0{,}065$; $0{,}0405 \times 9 = 0{,}3645$; $0{,}1234 \times 8 = ?$ u. s. f.

$0{,}7 \times 10 = 7$; $0{,}09 \times 40$; $0{,}007 \times 60$; $0{,}0008 \times 50$ ꝛc.

$0{,}6 \times 900 = 540$; $0{,}07 \times 600 = 42$; $0{,}04 \times 6000 = ?$

$0{,}005 \times 7000 = ?$ ꝛc.

$0{,}015 \times 40 = 0{,}6$; $0{,}62 \times 700 = 434$; $0{,}0815 \times 9000 = 733{,}5$ ꝛc.

$0{,}27 \times 12 = 3{,}24$; $0{,}3057 \times 11 = 3{,}3627$; $0{,}0715 \times 36 = ?$ ꝛc.

$0{,}123 \times 49 = ?$; $0{,}6014 \times 67 = ?$; $0{,}314 \times 123 = ?$;

$0{,}94 = 4012 = ?$

$0{,}4123 \times 3412 = ?$; $0{,}01359 \times 12345 = ?$;

$0{,}301234 \times 121367 = ?$ u. s. f.

$5{,}1 \times 72 = ?$; $19{,}34 \times 121 = ?$; $135{,}14 \times 351 = ?$;

$7012{,}401 \times 8671 = ?$ u. s. f.

Ausführung einiger der zusammengesetztern obiger Beispiele:

$0{,}94 \times 4012$;	$0{,}4123 \times 3412$;	$7012{,}401 \times 8671$
1,88	0,8246	7012,401
9,4	4,123	490868,07
376	164,92	4·207440,6
	1236,9	56·099208
3771,28	1406,7676	60·804529,071

Beim ersten dieser Beispiele müssen die 0,94 zwei Mal, dann noch 10 Mal und dann noch 4000 Mal und diese Ergebnisse alle zusammen genommen werden. Nun sind $0{,}04 \times 2 = 0{,}08$; $0{,}9 \times 2 = 1{,}8$, zusammen: 1,88. Ferner $0{,}94 \times 10 = 9{,}4$; dann $0{,}04 \times 4000 = 160$ und $0{,}9 \times 4000 = 3600$, zusammen: 3760. Endlich alle die drei Stellenergebnisse zusammen: 3771,28. Aehnlich geht die Lösung beim zweiten und eben so beim dritten Beispiel, wo die Ganzen, die noch dem Multiplikand beigefügt sind, die Sache nicht ändern; es wird einfach jeder Stellentheil der Vervielfachungszahl die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender des Vervielfachers Mal genommen u. s. f.

d. Beim Theilen haben wir eine ähnliche, aufs Kopfrechnen gestützte Einleitung wie beim Vervielfachen der Dezimalbrüche. Die Theilung beliebiger Stellenwerthe durch Ganze muß dem Schüler durch mannigfaltige Anschauung und Uebung zuerst geläufig werden. Da kommen Uebungen wie die folgenden: Wie viel ist der 5te Theil von 15 Zhntln., der 4te Theil von 24 Hdrtstln., der 11te Theil von 88 Tsdstln., der 25te Theil von 75 Tsdstln., der 105te Theil von 315 Zhntsdstln. u. s. f.? (Antwort etwa so: Der 105te Theil von 315 Zhntsdstln. ist 3 Zhntsdstl., weil diese 105 Mal genommen 315 Zhntsdstl. geben. Eine nöthig scheinende Veranschaulichung ist leicht.) Schon diese Uebungen würden fürs Theilen von Dezimalbrüchen ausreichen. Wer aber mehr Vorübungen machen will, kann noch beliebige Stellenwerthe durch Zehner, Hunderter ꝛc. theilen und allenfalls eben so das Messen berücksichtigen. Hierauf folgen stufenweise fortschreitende Aufgaben zur Uebung in der Division mit Zifferansatz. Z. B.: $^9/_{10} : 5$ oder $0,9 : 3 = {}^3/_{10}$ oder $0,3$; $0,8 : 4 = 0,2$; $1,4 : 7 = 0,2$; $1,4 : 70 = 0,02$; $0,045 : 9 = 0,005$; $1,08 : 4 = 0,27$ u. s. f. $13 : 5 = 2,6$; $9 : 8 = 1,125$; $4,5 : 25 = 0,18$; $3 : 20 = 0,15$; $7,15 : 50 = 0,143$; $135 : 40 = 3,375$ u. s. f. $1 : 3 = 0,333 \ldots$; $1 : 6 = 0,1666 \ldots$; $1 : 9 = 0,1111 \ldots$; $2 : 9 = 0,222 \ldots$; $3 : 11 = 0,2727 \ldots$; $1 : 7 = 0,142857 \ldots$ ꝛc. $212 : 14 = ?$; $391 : 27 = ?$; $8901 : 153 = ?$; $8712 : 1234 = ?$ ꝛc. $1,18 : 12 = ?$; $56,701 : 125 = ?$; $6731,0012 : 3123 = ?$; $6139,07 : 14235 = ?$ ꝛc.

Ausführung zweier der zusammengesetztern obiger Beispiele:

$212 : 14 = 15,142857 \ldots$; $6139,07 : 14235 = 0,431265 \ldots$

7
2,
Periode.
6
4
12
8
10
2

445,0
18,02
3,785
0,9380
8390
12725

Das Theilen kann beim ersten dieser Beispiele etwa folgendermaßen geschehen: Der 14te Theil von 21 Zhnr. ist 1 Zhnr. und es bleiben noch 7 Zhnr.; die machen mit den 2 Einern 72 Einer. Der 14te Theil von diesen beträgt 5 Einer, weil 5 Einer $\times$ 14 = 70 Einer; also bleiben noch 2 Einer oder 20 Zhntl. Der 14te Theil davon ist = 0,1 und es bleiben noch 0,6 oder 0,60, wovon der 14te Theil = 0,04 und der Rest noch 0,04 ist u. s. f. Beim zweiten Beispiel soll der 14235ste Theil von 6139 Ganzen und 7 Hdrtstln. genommen werden. Diese Ganzen machen auch 61390 Zhntl. und hievon ist der 14235ste Theil = 0,4;

diese müssen 14235 Mal genommen und von der Theilungszahl weggezählt werden (nach der Bedeutung der Division als Mehrfach-Wegzählen). Da kann man die 0,4 5 Mal, dann 30 Mal, dann 200 Mal ... bis 10000 Mal nehmen und jedesmal das Erhaltene wegzählen, z. B.: $0{,}4 \times 5 = 2$, von 20 Zhntln. bleiben 0 Zhntl.; $0{,}4 \times 30 = 12$, macht mit den vorhin zur Vollzahl hinzugedachten 2 Ganzen 14 und diese von 19 bleiben 5 (man hat wieder zu den 9 Einern noch 1 Zhnr. hinzugedacht); ferner $0{,}4 \times 200 = 8$ Zhnr. macht mit dem vorhin zu viel gedachten Zhnr. 9 Zhnr., von 13 Zehnrn. (man denke wieder 1 Hdrtr. zur Vollzahl hinzu) bleiben 4 Zhnr.; dann $0{,}4 \times 4000 = 16$ Hdrtr. und der vorige dazu macht 17 Hdrtr., von 21 Hdrtrn. bleiben 4 Hdrtr.; endlich $0{,}4 \times 10000 = 4000$, hiezu die zu viel gedachten 2000 macht 6000, von 6000 bleibt kein Tsdr. mehr. Der 14235ste Theil von 6139,0 ist also 0,4 und es bleibt noch ein Rest von 445,0. Hiezu werden die 7 Hdrtstl. genommen und alsdann die Theilung ganz gleich fortgesetzt wie im ersten Mal. (Die Schüler haben sich nach und nach in diese Divisionsweise hineinzufinden, die, bei Weglassung der erläuternden Ausdrücke, fürs praktische Rechnen kürzer und bequemer ist als jene frühere mit Benutzung des Entlehnens.) U. s. f. Die Division noch auf irgend eine andere entsprechende Weise.

Wenn die Division nicht aufgeht, so kann man das Ergebniß bis zu welcher Dezimalstelle man will bestimmen, und je weiter man geht, desto genauer ist das Resultat, so klein auch die letzten Dezimalen allmälig werden. Eine bemerkenswerthe Erscheinung ist hiebei die Wiederholung gleicher Stellen im Divisionsergebniß (Quotienten). Man nennt solche Stellen, die in einem Dezimalbruch in derselben Aufeinanderfolge ohne Ende wiederkehren, eine Periode, und den Dezimalbruch selbst einen periodischen. Die Division 1 : 3, d. i. der Bruch $1/3$, hat oben gegeben 0,333 ...; 1 : 9 oder $1/9 = 0{,}1111\ldots$; 1 : 7 oder $1/7 = 0{,}142857\ldots$ u. s. f. Hier haben die Schüler Beispiele von Größen, die ohne Ende wachsen und doch nie vollständig eine gewisse endliche Größe erreichen können. Wenn man z. B. hat: 1 fl. $= 2\,1/3$ Frkn., so kann man diese Summe in Dezimaltheilen nie genau erreichen, so weit man auch gehen mag. Man erhält 2 ganze Fr. + $3/10$ Fr. + $3/100$ Fr. + $3/1000$ Fr. + in inf. und je mehr Stellen man hinzunimmt, desto mehr wächst die Summe, erreicht aber die bestimmte Größe von genau $2\,1/3$ Fr. nie ganz. Eben so wäre $1/9$ Ruthe $= 0{,}111\ldots$ R, also $= 1' + 1'' + 1''' + 1/10''' + 1/100''' \ldots$ in inf., was — so unendlich wenig zuletzt auch fehlen mag — doch nie

völlig $1/9$ R. ausmacht. — Daß nicht alle Divisionen nach Dezimalen aufgehen oder, was dasselbe ist, daß nicht alle gewöhnlichen Brüche in abgeschlossene Dezimalbrüche verwandelt werden können, ist eben so natürlich wie daß z. B. 3tel auch nicht in 4tel, 16tel ꝛc. verwandelt werden können. Fürs praktische Rechnen sind aber die Dezimalbrüche Erleichterungen, weil man durch sie diejenigen kleinsten Theile wegwerfen kann, die im Resultate keine erhebliche Bedeutung mehr haben. Wenn der Nenner eines Bruches aus einfachen Faktoren besteht, von denen keiner von 2 oder 5 verschieden ist, so läßt sich der Bruch in einen abgeschlossenen Dezimalbruch verwandeln, weil eben dieser Nenner in einem gewissen Stellenwerthe des Xsystems ohne Rest enthalten ist. Z. B. $3/40$ oder $\frac{3}{2.2.2.5}$. Der Nenner 40 ist in dem Stellenwerth 1000 ohne Rest 25 Mal enthalten, also ist $3/40 = \frac{3.25}{40.25} = 75/1000 = 0{,}075$; u. s. f. für jeden derartigen Bruch. Enthält dagegen der Nenner einen Faktor, der von 2 oder 5 verschieden ist, so wird der Bruch nie einen fertigen Dezimalbruch geben, weil eben jener verschiedene Faktor in keinem Stellenwerth des Xsystems restlos enthalten ist. Z. B. $1/6$ oder $\frac{1}{2.3}$, d. i. $1/2 : 3 = 0{,}5 : 3 = 0{,}166\ldots$ Woher rührt wohl die Stelle (oder bei andern Brüchen die Stellen), die der Periode vorangeht? Warum muß sich in solchen Fällen jedes Mal eine Periode ergeben? Wie viele verschiedene Reste sind nämlich möglich und was tritt also ein, wenn ein gleicher wiederkehrt? Wie viele Stellen kann also eine Periode höchstens erhalten? u. dgl. Fragen mehr. Die Rückverwandlung von periodischen Dezimalbrüchen in gewöhnliche u. dgl. feinere Aufgaben der Dezimalbruchrechnung sind vorderhand hier nicht nothwendig. Zum Schlusse kommen Aufgaben folgender Art: Drückt in Dezimalen aus: $6\,1/2'' = ?'$ (d. h. = dem wievielten Theil von 1′ in Dezimalen); $5\,1/4$ Maß = ? Saum; 2 Wochen 7 Tage = ? Jahr; 5 Pfd. 14 Gr. = = ? Ztr.; 9760′ = ? Wegstunden; 18758 □′ = ? Jucharten u. s. f., und umgekehrt: 0,15 Stunden = ? Minuten; 1,5 □Klftr. = ? □′; 0,075 Fr. = ? Rppn; 1,507 Mltr. = ? Sester ꝛc. Z. B. 1 Maß = $= 1/100$ Saum; $1/4$ Maß $= 1/400$ Saum und $21/4$ Maß $= 21/400$ Saum $=$ $= 0{,}0525$ Saum.

§ 67.
Angewandtes Rechnen mit Dezimalbrüchen.

Anmerkung. Eine Aufgabensammlung für die Schüler muß hier namentlich solche Beispiele enthalten, bei denen der Gebrauch der Dezimalbrüche kein er-

zwungener und erkünstelter, sondern ein natürlicher ist und wobei es sich *insbesondere* zeigt, daß der Gebrauch dieser besondern Brüche eine Erleichterung und nicht eine Erschwerung in der Rechnung bildet. Aus den Beispielen in manchen Rechenbüchern dürfte der Schüler gerade auf die *entgegengesetzte* Ansicht von all diesem gelangen.

Angewandte Additions- und Subtraktionssätze sind leicht, wir setzen daher bloß einzelne wenige beispielsweise hieher:

1. Aus einer Theilung verschiedener Sorten Wein fallen dem Herrn N zu 2,3 Saum Winterthurer, 6,27 Saum Meiler, 1,03 Saum Rheinwein, 7,9 Saum Markgräfler, 5,49 Saum Oberländer, 174,5 Maß Waadtländer und 97 Maß Champagner; wie viel Saum macht dieß im Ganzen? Antwort: Saum $(2{,}3 + 6{,}27 + 1{,}03 + 7{,}9 + 5{,}49 + 1{,}745 + 0{,}97) =$
$= 25{,}705$ Saum, das macht 25 Saum 70 und eine halbe Maß.
(Oder die Posten auch *unter* einander!)

2. Drei Handelsleute theilen nach einem bestimmten Verhältniß einen Gewinn; der erste erhält genau 300 Fffrthlr., der zweite 167,3 Fffrthlr. und der dritte $1234\frac{1}{4}$ Frkn.; wie viele Fünffrankenstücke macht der Gewinn im Ganzen aus? Antwort: $(300 + 167{,}3 + 246{,}85)$ Fffrthlr. $=$
$= 714{,}15$ Fffrthlr., das sind 714 ganze Fffrthlr. und 15 Fünfer oder Fünfrappenstücke u. s. w.

3. Jemand hat in einer Kasse 2345,7 Fr. an baar, aber in verschiedenen Münzsorten. Davon gibt er nun $340\frac{1}{2}$ Rflstücke à 2,1 Fr. aus; wie viel in Franken bleibt ihm noch? Antwort: Da 340 Rflstücke $=$
$= (2{,}1 \times 340)$ Fr. $= 714$ Fr. und $\frac{1}{2}$ Rfl. $= 1{,}05$ Fr., so bleiben ihm noch $2345{,}7$ Fr. $- 715{,}05$ Fr. $= 1630{,}65$ Fr.

4. Ein Bauer will 605 Kb.^{0} (Kubikruthen, wovon 1 Kb.$^0 = 1000$ Kb.$'$) Erde wegführen lassen; nun sind bereits 499,608 Kb.^{0} vom Platze gebracht, wie viele sind noch wegzuführen? Antwort: 605 Kb.^{0} $-$ 499,608 Kb.$^0 =$
$= 105{,}392$ Kb.^{0} oder 105392 Kb.$'$.

5. Wenn der Rigi 1800 Meter und der Uto 871,2 Meter über dem Meeresspiegel liegt; wie viel höher ist der Rigi als der Uto? Antwort: $(1800 - 871{,}2)$ Mtr. $= 928{,}8$ Mtr. $= {}^{9288}/_{3}{}' = 3096{}'$.

6. Jemand hatte eingenommen 35,7 Fr. $+$ 179,15 Fr., und davon wieder ausgegeben 100,9 Fr. und noch 17,14 Fr.; wie viel blieb ihm? u. s. f. beliebige passende Beispiele zur Addition und Subtraktion.

Beispiele von Multiplikations- und Divisionssätzen mit Dezimalen:

1. Jemand, der von seinem jährlichen Einkommen den betreffenden

Antheil auf den Tag berechnet hat, weiß, daß er täglich $6{,}048$ Fr verdient; wie viel verdient er also in 3 Wochen 4 Tagen? Antwort: In 3 Wochen 4 Tagen oder in 25 Tagen verdient er $6{,}048$ Fr. $\times$ 25 = $151{,}2$ Fr.

2. Wenn 1 Maß Wein auf $35{,}4$ Rppn. zu stehen kommt, wie viele Franken kosten $3\frac{3}{4}$ Saum? Antwort: 1 Maß kostet $35{,}4$ Rppn. oder $0{,}354$ Fr., also $3\frac{3}{4}$ Saum oder 375 Maß ($0{,}354 \times 375$) Fr. = $132{,}75$ Fr. oder 132 Fr. 75 Rppn.

3. Wenn 1 Immi (neues Mäßli) Erbsen auf $24{,}2$ Rppn. zu stehen kommt, wie hoch kommen 1 Sester; 1 Malter; 2 Malter $2\frac{1}{2}$ Sester? Antwort: 1 Sester kostet 242 Rppn.; 1 Mltr. $24{,}2$ Fr., und 2 Mltr. $2\frac{1}{2}$ Sester oder 225 Immi $24{,}2$ Rp. $\times$ 225 = $54{,}45$ Fr. oder 54 Fr. 45 Rppn. ꝛc.

4. Ein Zentner Kaffee kostet 87 Fr. 35 Rppn.; wie hoch kommt 1 Pfd.; wie hoch kommen 10 Pfd.; 28 Pfd.? Antwort: 1 Pfd. kostet $87{,}35$ Rppn.; 10 Pfd. kosten 8 Fr. $73{,}5$ Rppn.; und 28 Pfd. kosten $87{,}35$ Rppn. $\times$ 28 = $2445{,}8$ Rppn. oder 24 Fr. $45{,}8$ Rppn.

5. Ein Betrag von 5890 Fr. soll unter 64 Antheilhaber zu gleichen Theilen vertheilt werden; wie groß ist einer der gleichen Antheile? Wie groß aber, wenn 73 Theilhaber sind? Antwort:
5890 Fr. : 64 = $92{,}03125$ Fr. oder 92 Fr 3 Rp. ($\frac{125}{1000}$ oder $\frac{1}{8}$ Rp.).
5890 Fr. : 73 = $80{,}6849\ldots$ Fr. = 80 Fr. 68 Rp. ($\frac{49}{100}$ Rp. beinahe $\frac{1}{2}$ Rp.).

6. Wenn 5 Ztr. 84 Pfd. Zucker 284 Fr. gekostet haben, wie hoch kam 1 Pfd.? Antwort: 284 Fr. : 584 = $48{,}63\ldots$ Rppn. = 48 und etwas mehr als $\frac{1}{2}$ Rppn.

7. Bei der Herstellung einer Straße zahlt man für jedes Klafter laufende Straße 4 Fffrthlr.; wie viel für den laufenden Fuß? Antwort:

20 Fr. : 6 = $3{,}3333\ldots$ Fr. = 3 Fr. $33\frac{1}{3}$ Rppn.

U. s. f. beliebige passende Beispiele zur Multiplikation und Division von Dezimalen.

Einfache Dreisätze mit Dezimalen:

1. Welchen Jahreszins trägt ein Kapital von 987 Fr. 24 Rppn. zu $3\frac{1}{2}$ %? Ausrechnung: 100 Rppn. bringen $3{,}5$ Rppn., also 1 Rppn. $0{,}035$ Rppn. Jahreszins, daher 98724 Rppn. $0{,}035$ Rppn. $\times$ 98724 = = ($2961{,}72 + 493{,}62$) Rppn. = $3455{,}34$ Rppn.

2. Welches ist der Jahreszins von $1455\frac{1}{4}$ Frkn.; $973\frac{2}{5}$ Frkn.; 3589 Frkn. 73 Rppn. zu 3 %? Welches zu 4 %? (Ausrechnung ähnlich wie vorhin.)

3. Wie viel Jahreszins bringen 2478,9 Fr.; 12504 Fr. 17 Rppn.; $1890^{7}/_{25}$ Fr. zu $4^{1}/_{2}$ %?

4. Welches Kapital würde zu 5 % einen jährlichen Zins von 750 Fr. 54 Rppn. eintragen? Ausrechnung: Zu 5 Rppn. Zins sind 100 Rppn. Kapital erforderlich, also zu 1 Rppn. 20 Rppn. Kapital = 0,2 Fr. Kapital und zu 75054 Rppn. 0,2 Fr. × 75054 = 15010,8 Fr. Kapital.

5. Zu welchem Zinsfuß würden 1600 Fr. jährlich 70 Fr. Zins abwerfen? Ausrechnung: 1600 Fr. geben 70 Fr. Zins, 1 Fr. gibt $^{7}/_{160}$ Fr. und 100 Fr. $^{700}/_{160}$ Fr. = $^{35}/_{8}$ Fr. = 4,375 Fr. Also zu 4,375 %.

6. Zwei Kaufleute theilen mit einander einen Gewinn, der eine erhält 9468,1 Fr.; wie viel erhält der andere, wenn sich der Antheil des ersten zu dem des zweiten wie 8 zu 7 verhält? Ausrechnung: So oft der erste 8 Rppn. erhält, so oft bekommt der zweite 7 Rppn., und so oft jener 1 Rppn. erhält, so oft erhält dieser $^{7}/_{8}$ Rppn. = 0,875 Rppn.; bekommt aber jener 946810 Rppn., so trifft es diesem 0,875 Rppn. × 946810 = ?

7. Wenn sich aber der Antheil des ersten zu dem des zweiten wie 2 zu $1^{1}/_{12}$ verhalten würde, wie groß wäre der Antheil des zweiten? Ausrechnung: Der erste hat 2 Rppn. wie der zweite $1^{1}/_{12}$ Rppn.

= = = 1 = = = = $^{13}/_{24}$ =

also der erste 946810 Rppn. wie der zweite ($^{13}/_{24}$. 946810) Rppn. = = 12308530 Rppn. : 24 = 512855,416 . . Rppn.

8. Jemand hatte Eisenbahnaktien im vollen Werthe um die Summe von 16950 Fr. gekauft; wie viel verliert er, wenn er sie in einer Zeit verwerthen muß, da die Aktien bloß auf $65^{1}/_{4}$ stehen, d. h. statt je 100 nur $65^{1}/_{4}$ gelten? Ausrechnung: Mit 100 Fr. verliert er 34,75 Fr., mit 1 Fr. 0,3475 Fr. und mit 16950 Fr. verliert er 0,3475 Fr. × 16950 = ?

9. Ein Hofraum von 1475 □′ soll neu belegt werden; wie hoch kommt die Belegung, wenn 1 □⁰ auf $18^{1}/_{2}$ Fr. zu stehen kommt? Ausrechnung: 1 □′ kostet 18,5 Fr. : 100 = 0,185 Fr., und 1457 □′ kosten (0,185 . 1457) Fr. = ?

10. Jemand versteuert 45750 Fr. Vermögen: wie viel beträgt die Vermögenssteuer zu $1^{3}/_{4}$ per Mille ($^{0}/_{00}$)? Ausrechnung: Von 1000 Fr. steuert man 1,75 Frkn., von 1 Frkn. 0,00175 Frkn. und von 45750 Frkn. (0,00175 × 45750) Fr. = ? Oder auch ($1^{3}/_{4}$. 45750) Fr. : 1000.

11. Wie viel beträgt die Assekuranzsteuer zu $1^{1}/_{8}$ per mille für ein um 18970 Fr. versichertes Haus?

12. Ein Kaufmann verkaufte eine gewisse Waare um 379 Fr. 45 Rp.

mit $10^3/_5$ % Verlust; wie theuer hatte er die Waare rechnen müssen und wie viel hatte er im Ganzen verloren? Ausrechnung: Statt $89^2/_5$ Fr. muß er 100 Fr. rechnen, statt 1 Rp. $^{1000}/_{894}$ Rp. und statt 37945 Rp.? Ferner, bei je 89,4 Fr. hat er 10,6 Fr. Verlust, bei 1 Rppn. wie viel und bei 37945 Rppn.?

13. Ein Teich wird von einer Quelle, aus der in jeder Minute 8,3 Maß Wasser fließt, in 35 Stunden 10 Minuten gefüllt; wie bald würde er voll, wenn mit der ersten noch eine zweite Quelle hineingeleitet würde, die in der Minute $4^1/_4$ Maß Wasser gibt? (Lösung wie oben.)

U. s. f. beliebige Dreisätze, oder nun auch andere paarweise Operationsverbindungen. Z. B.:

1. Ein Angestellter verdient jeden Monat 105,75 Fr., hat aber monatlich 87,45 Fr. auszugeben; wie viel schlägt er in 1 Jahr vor?

2. Man mischt dreierlei Korn: 1 Mltr. um 20 Fr., $1^1/_2$ Mltr. im Gesammtwerthe von 34,35 Fr. und 1 Mltr. 7 Sester im Gesammtwerthe von $36^1/_4$ Fr.; wie hoch wird 1 Sester von dem gemischten Korn zu stehen kommen?

Die Ausrechnung so wie die Verifikation dieser und der obigen Aufgaben sind leicht, so daß über Proben nichts Besonderes weiter zu bemerken ist, da solche sich fast von selbst darbieten.

§ 68.

Die mehrfach verbundene Vervielfachung und Entvielfachung (zusammengesetzter Dreisatz); mit gewöhnlichen und Dezimalbrüchen.

Der Lehrer hat den Schülern deutlich zu machen, daß die vorgenannten Aufgaben Rechnungssätze sind, die aus wiederholten Vervielfachungen und Entvielfachungen, oder aus einzelnen einfachen Dreisätzen zusammengesetzt sind. An einer bestimmten Aufgabe läßt sich dieß am besten zeigen: Z. B.: Wenn 3 Personen in 8 Tagen ein Feld bearbeiten, das $2^1/_2$ Jucharten groß ist; wie lange werden 7 Personen an einem 3 Juchart großen Felde von gleicher Beschaffenheit haben? — Offenbar ließe sich diese Aufgabe in folgende zwei in einander greifende Aufgaben zerfällen: Wenn 3 Personen in 8 Tagen $2^1/_2$ Jucharten bearbeiten, so haben 7 Personen an derselben Arbeit wie lange? Hier hätte 1 Person 8 . 3 Tage, folglich 7 Personen $^{24}/_7$ oder $3^3/_7$ Tage. Und die zweite Aufgabe: Wenn nun 7 Personen $^{24}/_7$ Tage zur Bearbeitung von $2^1/_2$ oder $^5/_2$ Jucharten

brauchen, so brauchen 7 Personen wie viele Tage zu $^6/_2$ Jucharten? Zu $^1/_2$ Juchart brauchen sie 5 Mal weniger Zeit als zu $^5/_2$ Jucharten, also $^{24}/_{35}$ Tage, und zu $^6/_2$ Jucharten wieder 6 Mal so viel Zeit, also $^{24}/_{35}$ Tage $\times$ $\times$ 6 = $^{144}/_{35}$ Tage = $4^4/_{35}$ Tage Die beiden zusammenhängenden Dreisätze lassen sich am übersichtlichsten so darstellen:

3 Personen haben 8 Tage.	An $^5/_2$ Jucharten haben sie $^{24}/_7$ Tage.
7 = = ? ($^{24}/_7$)	= $^6/_2$ = . = ? ($^{144}/_{35}$)

wo bei dem Resultat die fortlaufende Vervielfachung und Entvielfachung sich in dem Bruche darstellt: $\frac{8 \cdot 3 \cdot 6}{7 \cdot 5}$ Tage. Die Schüler haben diese zusammengesetzten Dreisätze stets im Sinne der Ableitung und nicht (namentlich im Anfange durchaus nicht) nach einer abstrahirten Regel zu lösen. Ansatz und Lösungsweise kann kurz etwa in folgender Weise formulirt werden:

3 Personen. 8 Tage. $2^1/_2$ Jucharten.
7 = ? = 3 = Antw.: $\frac{8 \cdot 3 \cdot 6}{7 \cdot 5}$ Tage = $4^4/_{35}$ Tage.

Die Schlußweise geht, wie oben schon angegeben wurde, auf die Einheit, und von dieser wieder auf die Mehrheit; natürlich kann als Einheit auch der Bruchtheil (bei gewöhnlichen wie bei Dezimalbrüchen) angesehen werden. Bei obigem Beispiel ergeben sich also folgende Schlußfolgerungen im Zusammenhange: 1 Person hat an den $2^1/_2$ Jucharten 8 . 3 Tage und 7 Personen $\frac{8 \cdot 3}{7}$ Tage, und wenn sie an $^5/_2$ Jucharten so lange haben, so haben sie an $^1/_2$ Juchart 5 Mal weniger lang, also $\frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 5}$ Tage, und daher an $^6/_2$ Jucharten 6 Mal länger, nämlich $\frac{8 \cdot 3 \cdot 6}{7 \cdot 5}$ Tage. So wird das Resultat bei jedem Beispiel allmälig abgeleitet und dann erst die Endausrechnung vollzogen, nachdem man noch nachgesehen, ob sich einzelne Faktoren im Zähler und Nenner gegen einander aufheben oder nicht. So mögen Beispiele wie die folgenden (Zusammensetzungen von 2, 3, 4 einfachen Dreisätzen) mit gewöhnlichen wie mit Dezimalbrüchen gelöst werden:

1. Wenn 3 Personen in 9 Tagen $30^1/_2$ Pfd. Brod bedürfen, wie viel Brod werden unter gleichen Verhältnissen 20 Personen in 13 Tagen nöthig haben?

2. Wenn 17 Schreiber, indem sie täglich 9 Stunden arbeiten, in 25 Tagen 89 Bücher abschreiben, wie lange würden 20 Schreiber bei bloß 8stündiger täglicher Arbeit an 100 gleich großen Büchern haben?

3. Es ist für 120 Pferde, wenn die Ration (das tägliche Quantum Futter) 11 Pfd. Hafer in sich begreift, auf 18 Tage Futter vorhanden;

wie viel wird aber die tägliche Ration Hafer betragen, wenn noch 30 Pferde hinzukommen und der gleiche Hafervorrath auf 15 Tage reichen soll?

4. Eine Brustwehr von 120 ⁰ Länge, 7 ′ Höhe und 16 ′ Dicke wird von 500 Arbeitern in 15 Stunden aufgeführt; wie stark (dick) wird eine solche bei 6,5 ′ Höhe und 160 ⁰ Länge werden können, wenn 800 Mann 12 Stunden daran arbeiten?

5. Eine Mauer, 50 ⁰ lang, 18 ′ hoch und 6 ′ stark, ist von 120 Arbeitern in 60 Tagen bei 15stündiger Arbeitszeit aufgeführt worden; wie viel Stunden müssen 150 Arbeiter täglich arbeiten, um eine Mauer, die 80 ⁰ lang, 12 ′ hoch und 10 ′ stark werden soll, in 80 Tagen aufzuführen?

6. Welchen Zins bringen 972 Fr. 65 Rp. zu $3\frac{1}{2}$ % in 8 Jahren?

7. Wie viel Zins tragen 593,27 Fr. zu 5 % in 7,5 Monaten?

8. Am 1. Januar 1849 lieh Jemand ein Kapital von $345\frac{1}{2}$ Fr. zu $4\frac{1}{2}$ % aus und erhielt es den 14. Februar 1850 wieder zurück; welchen Zins wird er bezogen haben?

9. Welches Kapital gibt zu 4 % in 6 Jahren 1000 Thlr. Interesse?

10. In wie viel Jahren bringen 1000 Thlr. zu 4 % 1000 Thlr. Interesse?

11. Am 1. Januar 1850 lieh Jemand ein Kapital von 4768 Fr. zu $3\frac{1}{2}$ % aus und nahm nach einiger Zeit 210 Fr. Zins dafür ein; bis zu welchem Tage waren die Zinsen damit bezahlt?

12. Wenn ein Wucherer sich wöchentlich auf den ausgeliehenen Franken einen halben Rappen Zins geben läßt, zu wie viel Prozent hat er dann sein Geld angelegt?

13. Ein Wechsel von 1000 Fr. wird 3 Monate vor der Verfallzeit ausbezahlt; wie viel beträgt der Diskonto, wenn für das ganze Jahr 10 % Diskonto berechnet würden? Und wie viel beträgt die Zahlung?

14. Wie viel Dukaten sind 750 Vereinsgulden, wenn 7 Vereinsgulden gleich 4 Thlr., 17 Thlr. gleich 3 Louisd'or und 48 Louisd'or gleich 85 Dukaten sind?

15. Wie viele Ellen Leinwand tauscht man gegen 30 Ellen Seidenzeug ein, wenn 2 Ellen Seidenzeug gleich $1\frac{2}{3}$ Ellen Tuch und $2\frac{3}{4}$ Ellen Tuch gleich 9 Ellen Leinwand gerechnet werden?

16. Wie weit wird eine feindliche Batterie entfernt sein, wenn man zwischen dem Augenblick des Abfeuerns und dem Knall 30 Spiralschläge einer Taschenuhr zählt und bei gewöhnlichen Taschenuhren 24 Spiralschläge in 5 Sekunden geschehen?

17. Der Zentner Lunte gibt 32 Bünde, von denen jedes 90 ′ Lunte enthält. Wenn nun die Brennzeit eines Fußes Lunte 1,3 Stunden beträgt, wie lange wird dann $^1/_4$ Ztr. Lunte vorhalten (ausreichen), wenn beständig 3 Lunten brennen?

II.

Achtes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem dreizehnten und vierzehnten Altersjahr.

§ 69.

Aufgabe.

Nachholung der zusammengesetztern Bruchverbindung mit besonderer Rücksicht auf möglichste Rechnungsabkürzung. Abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen. Anwendungen: 1) Vermischte Operationsverbindungen; Stoff vorzüglich aus dem allgemein beruflichen Leben. 2) Einfache Buchführung auf das beruflich bürgerliche Leben bezogen.

§ 70.

Multiplikation und Division mit gebrochenem Multiplikator und Divisor.

Die Schüler haben bis jetzt noch nicht mit einem Bruche multipliziren und durch einen Bruch dividiren gelernt; sie sollen nun auch mit dieser Operationsform bekannt gemacht werden, weil sie fürs schnelle praktische Rechnen doch Vortheil gewährt und nunmehr den Schülern bei ihrem vorgerücktern Alter und der festen Auffassung des Vorangegangenen wohl verständlich gemacht werden kann.

a. Zuerst sucht der Lehrer zu erklären, daß „mit einem Bruche multipliziren" gleich viel heißt, als die Multiplikation und Division vereinigt anwenden. Die Verbindung der Multiplikation und Division hat schon früher in praktischer Richtung den Dreisatz erzeugt. Mit einem Bruche multipliziren heißt nun in theoretischer Richtung gerade so viel als einen Dreisatz lösen. Wenn ich z. B. eine Zahl, etwa 7 Frkn., $^3/_4$ Mal nehmen soll, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als ich soll den 4ten Theil von 7 Frkn. 3 Mal nehmen, und entspricht einem Dreisatz, der etwa heißt: 4 Dinge, Stücke, Pfunde ꝛc. kosten (überhaupt entsprechen in geradem Verhältnisse) 7 Frkn.; wie viel kosten 3 der erstern Einheiten?

Die Antwort lautet eben: 3 Mal der 4te Theil von 7 Frkn., oder in verbundener Sprache: 7 Fr. $\times$ $^3/_4$, wobei es auch überlassen bleibt, zuerst das Produkt von 7 Fr. $\times$ 3 durch 4 zu theilen, oder den 4ten Theil von 7 Frkn. 3 Mal zu nehmen. Die wirkliche Zählableitung kann der Schüler etwa durch folgende Schlußweise machen: Wenn man 7 Frkn. $^3/_4$ Mal nehmen soll, so bekommt man jedenfalls 4 Mal weniger als wenn man 7 Frkn. 3 Mal nimmt, denn im letztern Fall nimmt man 7 Frkn. 4 Mal mehr als im erstern, da 3 gerade 4 Mal mehr ist als $^3/_4$. Wenn also 7 Frkn. $\times$ 3 ein 4 Mal zu großes Ergebniß ist, so wird (7 Fr. $\times$ 3) : 4 oder $\frac{7 \text{ Fr.} \times 3}{4}$ das rechte sein. Also ist 7 Fr. $\times$ $^3/_4$ = $= \frac{7 \text{ Fr.} \times 3}{4} = {}^7/_4$ Fr. $\times$ 3, da das Letzte nach Früherm gerade so viel gibt als das nächst Letzte. Die eben abgeleitete Wahrheit würde also lauten: Eine Zahl wird mit einem Bruche vervielfacht, wenn man mit dem Zähler vervielfacht und durch den Nenner theilt. Die Rangfolge dieser beiden Operationen bleibt dem Rechner überlassen. Natürlich wird sich die Sache nicht ändern, wenn die zu vervielfachende Zahl selbst auch ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist; die gleiche Schlußfolge wie oben würde geben: $7^1/_2$ Fr. $\times$ $^3/_4$ = ($7^1/_2$ Fr. $\times$ 3) : 4 = $= \frac{15 \cdot 3}{2}$ Fr. : 4 = $\frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 4}$ Fr., woraus sich ergibt, wie man eine gemischte Zahl, d. i. auch ein Bruch mit einem Bruche vervielfacht. Die Schüler haben Aufgaben folgender Art nach obiger Anschauungsweise zu erklären und zu lösen:

9 Fr. $\times$ $^7/_8$ = ? $^1/_2$ Pfd. $\times$ $^1/_3$ = ? $4^1/_2$ Fuß $\times$ $^2/_5$ = ?
12 " $\times$ $^3/_{10}$ = ? $^3/_5$ " $\times$ $^2/_4$ = ? $5^1/_3$ " $\times$ $^5/_6$ = ?
315 " $\times$ $^7/_{20}$ = ? $^{13}/_{100}$ " $\times$ $^7/_{10}$ = ? $12^3/_{10}$ " $\times$ $^7/_{100}$ = ? u. s. w.
$7^1/_2$ Maß $\times$ $1^1/_2$ od. $^3/_2$ = ? 8 Fr. $\times$ $^7/_{10}$ od. 8 Fr. $\times$ 0,7 = ?
$5^1/_3$ " $\times$ $3^1/_4$ = ? $2^3/_{10}$ Fr. $\times$ $^9/_{10}$ " 2,3 " $\times$ 0,9 = ?
$9^1/_{10}$ " $\times$ $4^1/_{10}$ = ? $5^{14}/_{1000}$ F. $\times$ $^{73}/_{100}$ " 5,014 " $\times$ 0,73 = ?

Ansatz: $9^1/_{10}$ M. $\times$ $4^1/_{10}$ = $^{91}/_{10}$ M. $\times$ $^{41}/_{10}$ = $\frac{91 \cdot 41}{100}$ M. = $\frac{3731}{100}$ M. = $= 37{,}31$ M.

Und 5,014 Fr. $\times$ 0,73 = (5,014 Fr. $\times$ 73) : 100 = 366,022 Fr. : 100 = $= 3{,}66022$ Fr.

b. Die Division durch einen Bruch kann als Umkehrung der Multiplikation mit einem Bruch leicht gelöst werden. Hat man z. B. 7 Fr. : $^3/_4$, so muß man gemäß der Division diejenige Zahl suchen, die $^3/_4$ Mal ge-

nommen 7 Frkn. gibt. Welche Zahl gibt nun $^3/_4$ Mal genommen zunächst 1? Antwort: Der umgekehrte Bruch $^4/_3$ (reciproker Werth), denn $^4/_3 \times {}^3/_4$ ist $= 1$. Nun muß man aber den Werth haben, der $^3/_4$ Mal genommen nicht 1, sondern 1 Mal 7 Frkn. gibt; folglich ist dieser Werth $= 7$ Frkn. $\times {}^4/_3$, also 7 Frkn. $: {}^3/_4 = 7$ Frkn. $\times {}^4/_3$ oder $^{28}/_3$ Frkn., weil 7 Frkn. $\times {}^4/_3 \times {}^3/_4 = 7$ Frkn. $\times 1 = 7$ Frkn. oder $^{28}/_3$ Fr. $\times$ $\times {}^3/_4 = 7$ Fr. sind. Oder in ähnlicher Schlußweise wie oben, indem man die 7 Frkn. zuerst durch 3 dividirt und alsdann das 4 Mal zu kleine Ergebniß noch 4 Mal nimmt, oder indem man auch zuerst durch $^1/_4$ dividirt und dann das 3 Mal zu große Ergebniß durch 3 theilt, was in beiden Fällen gibt:

7 Frkn. $: {}^3/_4 = (7$ Frkn. $: 3) \times 4 = 7$ Frkn. $\times {}^4/_3$
oder $= (7$ Frkn. $\times 4) : 3 = 7$ Frkn. $\times {}^4/_3 \Big\} = {}^{28}/_3$ Frkn.

Nach dieser Ableitungsweise sind zu lösen:

$10 : {}^7/_8 = ?$ 113 Pfd. $: 1^1/_5$ oder 113 Pfd. $: {}^6/_5 = ?$

$7^1/_2 : 1^1/_4 = {}^{15}/_2 : {}^5/_4 = {}^{15}/_2 \times {}^4/_5 = \frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 3 \cdot 2.$

$18^1/_3$ Frkn. $: {}^2/_5 = 18^1/_3$ Frkn. $\times {}^5/_2 = 91^2/_3$ Frkn. $: 2 = 45^5/_6$ Frkn.

$3^1/_3$ Pfd. $: 1^1/_2$ Pfd. $= {}^{10}/_3$ Pfd. $: {}^3/_2$ Pfd. $= {}^{10}/_9 \cdot 2 = 2^2/_9$ u. s. f.

Ableitung: Z. B. In $^{10}/_3$ Pfd. ist 1 Pfd. $^{10}/_3$ Mal enthalten, also 3 Pfd. 3 Mal weniger, d. i. $^{10}/_9$ Mal, und $^3/_2$ Pfd. wieder 2 Mal mehr, nämlich $^{20}/_9$ oder $2^2/_9$ Mal.

Ferner: $1{,}5 : 0{,}05 = {}^{15}/_{10} : {}^5/_{100} = {}^{15}/_{10} \times {}^{100}/_5 = {}^{150}/_5 = 30$;

$0{,}64 : 0{,}8 = 0{,}8$; $0{,}0072 : 0{,}09 = 0{,}08$; $1{,}25 : 0{,}025 = 50$ u. s. f.

c. Zur noch einläßlichern Befestigung der Multiplikation und Division mit Dezimalen ist die Multiplikation und Division von Stellenwerthen recht einzuüben. Z. B.: Was geben Einer, Zhnr., Hndrtr., Tsdr. ꝛc. mit Zhntln. multiplizirt? Antwort: Einer Mal Zhntl. geben Zhntl., ... Tsdr. $\times$ Zhntl. geben Hndrtr. — Was geben Zhntl., Hdrtstl., Tsdstl. ꝛc. mit Zhntln. multiplizirt? Antwort: Zhntl. $\times$ Zhntl. geben Hdrtstl. ... Tsdstl. $\times$ Zhntl. geben Zhntsdstl. — Was geben Einer, Zhnr., Hdrtr. ꝛc. mit Hdrtstln. multiplizirt? Antwort: Hdrtstl., Zhntl., Einer, Zhnr. u. s. f. Was geben Zhntl., Hdrtstl., Tsdstl. ꝛc. mit Hdrtstln. multiplizirt? Antwort: Tsdstl., Zhntsdstl., Hdrtsdstl. u. s. f. Dann beliebig: Was geben Hdrtsdr. $\times$ $\times$ Zhntsdstl.? Auflösung z. B. so: Hdrtsdr. $\times$ Hdrtsdstl. geben Einer; Hdrtsdr. $\times$ Zhntsdstl. müssen 10 Mal mehr, also Zhnr geben, weil man im letztern Mal die Hdrtsdr. mit einer 10 Mal größern Zahl multiplizirt.

Was geben Zhntsdstl. × Hdrtsdstl.? Auflösung z. B. so: $^1/_{10000}$ × × $^1/_{100000}$ = $^1/_{1000\cdot000000}$; überhaupt Zhntsdstl. × Hdrtsdstl. geben Tsdmillionstl. oder wie früher nach allmäliger Schlußfolge: Zhntsdstl × × Einer geben Zhntsdstl.; Zhntsdstl. × Zhntl. geben 10 Mal weniger, also Hdrtstl.; Zhntsdstl × Hdrtstl. geben Millionstel u. s. f. bis Zhntsdstl. × × Hdrtsdstl. = Tsdmillionstl.

Diese Multiplikationsübungen werden nun zu den umgekehrten Uebungen der Division in gleicher Stufenfolge wie vorhin benutzt, so daß die Schüler beliebige Aufgaben folgender Art schnell beantworten: Wie viel geben Hdrtstl. durch Tsdstl. dividirt? Antwort: Zhnr., denn Tsdstl. × Zhnr. geben wieder Hdrtstl. Oder auch durch allmälige Ableitung, z. B. Tsdstl. durch Tsdstl. dividirt geben Einer, also Hdrtstl. : Tsdstl. 10 Mal mehr, das sind Zhnr. Was geben ferner Hdrtr. durch Zhntsdstl. dividirt? Antwort: Millionen, denn Zhntsdstl. × Millionen geben wieder Hdrtr. Oder durch allmälige Ableitung: Einer durch Zhntsdstl. dividirt geben Zhntsdr. (denn 1 : $^1/_{10000}$ = = 10000), also Hdrtr. : Zhntsdstln. 100 Mal mehr, das sind Millionen u. s. f. Beide Richtungen hauptsächlich als Kopfrechnen.

d. Beispiele für Multiplikation und Division größerer Zahlen, die mit Dezimalbrüchen oder gewöhnlichen Brüchen verbunden sind.

3456,712 Frkn. × 35,0712;

103701,36	
17283,560	
241,96984	
3,456712	
,6913424	
121231,0378944	

52,341 : 0,2341 = 223,583 . . .

5,52	
0,839	
1367	
1965	
922	
2197 u. s. f.	

Bei jeder Multiplikation muß der leitende Gedanke der sein, den Multiplikand so manchmal zu nehmen, als die Stellen (Glieder) des Multiplikators ausdrücken. Es müssen also oben die 3456,712 Frkn. 30 Mal, dann noch 5 Mal, dann noch $^7/_{100}$ Mal und noch $^1/_{1000}$ Mal und zuletzt noch $^2/_{10000}$ Mal und hierauf alle Ergebnisse zusammen genommen werden. Nun sind $^2/_{1000}$ × 30 = $^6/_{100}$ (natürlich wird man gewöhnlich die niederste Stelle des Multiplikands zuerst vervielfachen, dann die nächst höhere u. s. f., weil die Vielfachen der niedern Stellen auch Einheiten für die nächst höhern Stellen hervorbringen können). Man thut gut, die erhaltenen $^6/_{100}$ unter die Hdrtstl. des Multiplikands zu setzen u. s. w., um die gleichhohen Einheiten alle besser übersehen zu können. Dann $^1/_{100}$ × 30 = $^3/_{10}$,

die 3 Zhntl. unter die 7 Zhntl.! Ferner $^7/_{10} \times 30 = 21$ Ganze, wovon 1 unter die 6 Einer und die 2 Zehner zum nächsten Produkt 6×30 oder 18 Zhnr. gezählt werden. Von den so erhaltenen 20 Zhnrn. werden 0 Zhnr. unter den 5 Zehnern angemerkt und die 2 Hunderter wieder so fürs nächste Produkt aufgespart u. s. w., bis jeder Theil des Multiplikanden 30 Mal genommen ist. Hierauf wird man am natürlichsten in der vorigen Aufeinanderfolge jeden Theil des Multiplikanden 5 Mal nehmen, was das zweite Theilprodukt 17283,560 gibt. Nun eben so jedes Glied vom Multiplikanden $^7/_{100}$ Mal, also $^2/_{1000} \times {}^7/_{100} = 14$ Hdrtsdstl., wovon man die 4 Hdrtsdstl. auf die 5te Stelle nach dem Komma (im 3ten Theilprodukt) anschreibt und 1 Zhntsdstl. für das Produkt der nächsten Stelle aufbewahrt u. s. f. bis das ganze 3te Theilprodukt 241,96984 da ist. Ganz ähnlich geht die Sache bei der Multiplikation mit $^1/_{1000}$ und $^2/_{10000}$, bis man zuletzt durch Addition das Totalprodukt 121231,0378944 bekommt, das mit Beziehung auf die Einheit Franken außer den Ganzen einen Bruch enthält, der nicht völlig 4 Rp. werth ist ($^3/_{100}$ und $^7/_{1000}$ ꝛc.). Begreiflich kann die Reihenfolge, nach der man mit den Stellen des Multiplikators multiplizirt, beliebig genommen werden; es ist aber nicht klug, eine zu unregelmäßige Reihenfolge einzuschlagen.

Bei der Division werden die Stellen des Quotienten stets von der höchsten an allmälig durch Probiren gebildet und erst hinterher wird nachgewiesen, daß eine bestimmt angenommene Stelle die rechte ist. Wenn man hiebei den wichtigsten Theil vom Dividend (höchste Stelle, oder bisweilen beide höchsten) durch die höchste Stelle des Divisors dividirt, so erhält man annähernd die höchste Stelle des Quotienten; sie ist dann genau, wenn in ihr die höchste Anzahl Einheiten genommen sind, die mit dem Divisor multiplizirt ein Produkt geben, das noch vom Dividend weggezogen werden kann. Der wichtigste Theil des noch bleibenden Restes gibt dann durch die höchste Stelle des Divisors dividirt annähernd die nächsthöchste Stelle des Quotienten, die dann wieder gleich verifizirt wird wie die erste u. s. f bis die Division aufgeht oder bis man so viele Stellen bestimmt hat, als nothwendig erscheinen. Es sind z. B. bei der obigen Division 5 Zhnr. : $^2/_{10}$ = ungefähr 2 Hdrtr. Nun zieht man $0{,}2341 \times$ $\times 200$ vom Dividend ab; dieß ist noch möglich; nähme man aber nur 1 Hdrtr. mehr, so würde das Produkt größer als der Dividend; folglich kann der Quotient nicht mehr Hdrtr. als deren 2 enthalten. Das Produkt zieht man wohl am kürzesten in folgender Weise ab: $^1/_{10000} \times 200 = {}^2/_{100}$;

diese $^2/_{100}$ von den $^4/_{100}$ im Dividend lassen $^2/_{100}$ übrig, die als Rest dieser Stelle unter dieselbe geschrieben werden. Dann $^4/_{1000} \times 200 = {}^8/_{10}$, von $^{13}/_{10}$ bleiben $^5/_{10}$; im Dividend waren aber nur $^3/_{10}$, man hat also 1 Ganzes zu viel hinzugedacht, das man nun im nächsten Mal wieder wegnimmt. Also $^3/_{100} \times 200 = 6$, diese 6 + das vorige zu viel gedachte Ganze, d. i. 7 Ganze von 12 Ganzen, bleiben 5; und endlich $^2/_{10} \times 200 = 4$ Zhnr.; die 4 Zhnr. und der vorhin zu viel gedachte Zhnr., das sind 5 Zhnr. von 5 Zhnrn., lassen keinen Zhnr. mehr übrig. Hierauf folgt die höchste Stelle des Restes $5 : {}^2/_{10} =$ ungefähr 20, denn $0{,}2341 \times 20$ gibt das größte Produkt, das man noch (am besten wieder stellenweise wie vorhin) vom Rest wegzählen kann; es bleiben dann noch 0,839 — und es wird so die Division fortgesetzt, so weit man will. Statt der oben zuletzt bestimmten Stelle $^3/_{1000}$ könnte man, da die nächste Stelle jedenfalls über $^5/_{10000}$ gibt, wohl etwas annähernder $^4/_{1000}$ setzen. Nimmt man $^4/_{1000}$, so ist alsdann das Gesammtprodukt vom Quotienten in den Divisor etwas größer, und nimmt man $^3/_{1000}$, so ist dasselbe dann etwas kleiner als der Dividend; aber der Unterschied ist im ersten Mal geringer als im zweiten. Wir haben hier absichtlich allgemein dividirt; wer das Theilen und Messen ausscheiden will, wird leicht finden wie.

Nun mit gewöhnlichen Brüchen:

1) $18355^3/_5 \times 6317/_8 = {}^{91778}/_5 \times {}^{5055}/_8 = \frac{91778 \cdot 5055}{5 \cdot 8} =$
$= \frac{45889 \cdot 1011}{4} = 46393779 : 4 = 11598444^3/_4.$

2) $18355^3/_5 : 6317/_8 = {}^{91778}/_5 : {}^{5055}/_8 = \frac{91778 \cdot 8}{5 \cdot 5055} =$ ꝛc.

Die Art und Weise, wie solche Beispiele zu lösen sind, erhellt aus der hier verfolgten Ableitung.

e. Beispiele von abgekürzter Multiplikation und Division mit Dezimalen. — Man hat hier zwei Arten der abgekürzten Multiplikation und Division zu unterscheiden: 1) diejenige, bei welcher die Operationsglieder vollständige Zahlen, d. h. solche, bei denen alle Stellen wirklich da sind, und 2) diejenige, bei welcher die Operationsglieder abgekürzte Dezimalzahlen, Annäherungswerthe, d. h. solche, die nur bis auf eine gewisse Dezimale gegeben sind und bei denen man die folgenden Dezimalen nicht mehr hat. Bei der erstern Rechnungsart steht es dem Rechner frei, die Resultate nur bis auf eine gewisse Dezimalstelle, welche er will oder welche er mit Hinsicht auf eine vorliegende praktische Aufgabe noch angemessen findet, genau

zu bestimmen; bei der zweiten aber kann man die Resultate nicht so weit richtig haben als man will, sondern nur so weit, als es die Natur der Aufgabe mit sich bringt, d. h. so weit, als die mangelnden Stellen der Operationsglieder keinen Einfluß auf das Resultat mehr ausüben. Die Gränze dieses Einflusses hat dann eben der Rechner zu bestimmen. Es folgen hier zwei Beispiele der erstern abgekürzten Rechnungsweise, in denen die Resultate nur bis auf 1000stel richtig bestimmt sind:

347,1235 Fr. × 1004,02317; 6947,13597 Ztr. : 54,134571 =

347123, 5		1533, 67	= 128,330 .. Ztr.
1388, 494		450, 98	1 –
6, 942		17, 91	
1, 041		1, 67	
35		5	
24			
348520,036 ... Fr.			

Bei obiger Multiplikation will man also das Produkt noch bis auf 1000stel richtig wissen. Wenn man nun mit 1000 multiplizirt, so wird die niedrigste Stelle des ersten Partialproduktes $^5/_{10}$, dieß fällt also noch in den Bereich der Stellen, die man genau haben muß; darum muß das ganze erste Produkt angeschrieben werden. Ebenso das zweite, weil $^5/_{10000} \times 4$ gerade $^2/_{1000}$ geben, die man also zu $^3/_{1000} \times 4$ oder $^{12}/_{1000}$ zählen und daher $^{14}/_{1000}$ rechnen muß, wovon man $^4/_{1000}$ als erste Stelle des 2ten Produkts setzt u. s. f. Multiplizirt man nun mit $^2/_{100}$, so muß man erst bei den 100steln im Multiplikand anfangen, da 100stel × 100stel 10000stel geben, die vielleicht noch eine Anzahl 1000stel in sich fassen könnten; es sind aber $^2/_{100} \times {}^2/_{100} = {}^4/_{10000}$, die man wegläßt, da sie keinen 1000stel geben. Nun wird mit $^1/_{10} \times {}^2/_{100} = {}^2/_{1000}$ fortgefahren, welche $^2/_{1000}$ als erste Stelle im dritten Produkt zu schreiben sind u. s. w. Multiplizirt man hierauf mit $^3/_{1000}$, so gibt $^1/_{10}$ im Multiplikand × $^3/_{1000}$ zum Produkt $^3/_{10000}$, die man wie vorhin weglassen und alsdann mit 7 × × $^3/_{1000} = {}^{21}/_{1000}$ fortfahren muß, wovon also $^1/_{1000}$ die erste Stelle des vierten Produkts bildet u. s. f. Wird hierauf mit $^1/_{10000}$ multiplizirt, so muß man bei 7 im Multiplikand beginnen, da $7 \times {}^1/_{10000} = {}^7/_{10000}$ gibt, was man zur folgenden Stelle als $^1/_{1000}$ rechnen muß, da so der Fehler kleiner wird, als wenn man $^7/_{10000}$ wegläßt. Es ist dann 40 × × $^1/_{10000} = {}^4/_{1000}$ und von vorhin $^1/_{1000}$ dazu, gibt $^5/_{1000}$ als erste Stelle des 5ten Produkts. Endlich muß man mit $^7/_{100000}$ die 40 im Multiplikand multipliziren, da dieß erst $^{28}/_{10000}$ gibt, was man aus dem gleichen Grunde wie vorhin zweckmäßiger für $^3/_{1000}$ rechnet und dann zu

$300 \times {}^{7}/_{100000} = {}^{21}/_{1000}$ als letztes Produkt zählt und somit ${}^{24}/_{1000}$ ansetzt. Man hat also in allen Produkten, was keine 1000stel gab, weggelassen, darum ist das ganze Produkt nur bis auf 3 Dezimalen nach dem (,) bestimmt.

Aehnlich geht die Sache bei der obigen Division. Man will da den Quotienten auch nur bis zu den 1000steln bestimmen, darum braucht man die Reste im Dividend nur bis zu der Stelle richtig zu bilden, die durch die höchste im Divisor dividirt noch 1000stel gibt. Man muß aber zuletzt noch 100stel im Dividend haben, damit sie durch die (5) Zehner des Divisors dividirt noch die 1000stel im Quotienten geben. Nun wird wie gewöhnlich dividirt, aber das Produkt aus jeder Stelle des Quotienten in den Divisor nur bis auf die 100stel und eben so weit auch jeder Rest gebildet. Zuletzt geben ${}^{5}/_{100} : 50$ etwas genauer ${}^{1}/_{1000}$ statt ${}^{0}/_{1000}$. — Man sieht bei näherer Betrachtung leicht ein, daß man in den beiden abgekürzten Rechnungen die Resultate bis auf 3 Dezimalen nach dem (,) nicht anders bekäme, auch wenn die Operationen vollständig ausgeführt würden. Daher die Abkürzung, die Erleichterung.

Bei der zweiten Art der abgekürzten Multiplikation oder Division ist je eines oder beide der Operationsglieder abgekürzt oder mangelhaft. Hat man z. B. $19{,}41 \ldots \times 509{,}7$, wobei der Multiplikand nur bis zu den 100steln bekannt ist, so kann das Produkt nur bis zu den Einern vollständig werden, weil das höchste Mangelnde im Multiplikand, nämlich 1000stel $\times$ 500er (d. i. die höchste Stelle im Multiplikator), noch mangelnde 10tel gibt. Man multiplizirt also wie oben nach der ersten Art, indem man das Produkt bis zu den Einern richtig rechnet. Hätte man aber $19{,}41 \ldots \times 509{,}\ldots$, wobei die letzte Zahl auch abgekürzt ist, so könnte man das Produkt nur bis auf die 10er rechnen, denn 1 Zehner des Multiplikands $\times$ die mangelnden 10tel des Multiplikators geben mangelnde Einer im Produkt, weßwegen von den Einern an das Produkt nicht mehr richtig wird. — Hätte man zu dividiren $25{,}67 \ldots$ durch $16{,}7$, so ist klar, daß der Quotient nur bis zu den 1000steln richtig werden kann, denn die mangelnden 1000stel im Dividend durch 1 Zehner des Divisors dividirt, geben 10000stel im Quotienten, die also erst mangeln. Hätte man aber $25{,}67 \ldots : 16{,}7 \ldots$, so könnten nur 3 Stellen im Quotienten (also bis und mit den 100steln) richtig werden, weil im ersten abzuziehenden Produkte nur die 3 obersten Stellen bekannt sind und folglich auch nur diese Stellen in den Resten sicher werden können. — In

noch weitere Feinheiten, z. B. wie die Angabe der Fehlergränzen ꝛc., wird der Lehrer kaum eingehen können; dagegen wird er in einer Reihe von praktischen Aufgaben, wie unten als Beispiele solche folgen sollen, den Schüler mit den Vortheilen des abgekürzten Rechnens bekannt machen.

§ 71.

Praktisches Rechnen.

Wie bei jeder materialen Erweiterung im angewandten Rechnen, so müssen auch hier die Schüler zunächst — so weit es die dießfälligen Rechnungen erheischen — in diejenigen praktischen Verhältnisse eingeführt werden (wenn sie es nicht schon sind), die den zu behandelnden Rechnungen zu Grunde liegen. Dahin gehört insbesondere die Erörterung und Erklärung über die auf das vorliegende Rechnungsgebiet sich beziehenden Termen und Redeweisen, seien sie rein praktischer oder wissenschaftlicher Natur. Es folgen sodann:

a. Vermischte Operationssätze, meist ohne Dreisatz.

1) Ein Kaufmann erhält 3 Säcke einer gewissen Waare, wovon der 1ste 251 Pfd., der 2te 280 Pfd., der 3te 310 Pfd. brutto wiegt. Wenn nun die Umhüllung der Waare allein 49 Pfd. schwer ist und der Ankaufspreis der Waare 207 Fffrknthlr., die Spesen aber 72,35 Fr. betragen, wie theuer muß er das Pfund verkaufen, damit er im Ganzen 100 Frkn. gewinnt? — Lösung: Die Aufgabe enthält außer einer untergeordneten Verwandlung 2 Additionssätze, 1 Subtraktionssatz und 1 Divisionssatz, in folgender Weise: Das Bruttogewicht ist (251 + 280 + + 310) Pfd. = 841 Pfd., also netto (841 − 49) Pfd. = 792 Pfd. Diese sollen eintragen 207 Fffrknthl. oder 1035 Frkn. + 72,35 Frkn. + + 100 Frkn. = 1207,35 Frkn.; also muß für 1 Pfd. gelöst werden 1207,35 Fr. : 792 = 1,524 ... Fr.; das macht 1 Frkn. 52 und nicht völlig $^1/_2$ Rppn.

2) Ein Landwirth ist 800 Fr. schuldig; er zahlt daran 100 Brbthlr. (zu 5 Fr. 67 Rppn.) an baar; für den Rest liefert er Wein, die Maß zu 40 Rppn.; wie viele Maß macht dieß? (Lösung ähnlich wie oben: außer der Verwandlung ein Subtraktions- und dann ein Divisionssatz.)

3) Es werden $4^1/_2$ Ztnr. Seife, das Pfd. brutto zu $^1/_2$ Fr., gekauft. Wenn nun am Gewicht für die Umhüllung 8 Pfd. abzuziehen, und wenn ferner nach einer gewissen Zeit durch das Trocknen der Seife noch 43 Pfd.

verloren gegangen sind, wie theuer müßte man nun das Pfund verkaufen, wenn man dadurch bloß den Ankaufspreis decken wollte? (Multiplikations-, Subtraktions- und Divisionssatz.)

4) Eine reiche Frau stirbt und hinterläßt a) an Kapitalbriefen 80950 Fr., b) an Liegenschaften nach aufgenommenem Inventar 30571,55 Fr., c) an baar 1971 Fr. 13 Rppn. Davon ist zunächst zu zahlen 1) für laufende Schulden 1005½ Fr., 2) als Legat ins Schulgut 4000 Fr., 3) als Legat für die Waisenanstalt 3000 Fr., 4) als Legat einem Dienstboten 1500 Fr.; das Uebrige gehört den Erben; diese sind: a) 4 noch lebende Geschwister, b) 7 Kinder eines verstorbenen Bruders und c) 4 Kinder einer verstorbenen Schwester. Wenn nun der Antheil für jedes der lebenden oder gestorbenen Geschwister gleich groß sein soll und auch ein solcher Antheil unter die Kinder je eines der verstorbenen Geschwister gleich zu theilen ist; wie viel erhält dann 1) je eines der noch lebenden Geschwister, 2) je eines der Bruderskinder, 3) je eines der Schwesterkinder? (Lösung wie oben: Additions- und Subtraktions- und verschiedene Divisionssätze.)

5) Jemand kaufte 212 Mltr. Getreide zu 23 Fr. 45 Rppn.; nach einer gewissen Zeit mußte er den ganzen Vorrath wieder zu 18 Fr. 16 Rp. verkaufen; wie viel hat er bei diesem Geschäfte verloren, wenn er überdieß noch für das hiezu verwendete Geld 12 Fr. 45 Rp. Zins zu rechnen hat?

6) Was kosten 2 Faß Oel, deren Bruttogewicht zusammen 8 Ztr. 54 Pfd., die Tara im Ganzen 204 Pfd. beträgt, wenn man für den Zentner netto 83 Fr. 18 Rppn. bezahlt?

7) Ein Wirth erhält 3 Saum 54 Maß Wein, den Saum zu 28 Fr. 55 Rppn., und 4 Saum 70 Maß, den Saum zu 30 Fr. 60 Rppn. Die Spesen betragen zusammen 10 Fr. 24 Rppn. Er bringt allen diesen Wein in ein Faß; wie hoch kommt ihn so die Maß zu stehen?

Und so viele dergleichen vermischte Operationssätze.

b. Vermischte Operationssätze, mit Dreisatz.

1) Ein Kaufmann erhält 2 Ballen Waare von 5 Ztnr. 86 Pfd. und von 6 Ztnr. 70 Pfd. Bruttogewicht; die Tara beträgt zusammen 26½ Pfd. Wenn nun der Zentner netto auf 47 Fr. 18 Rp. zu stehen kommt und bei Baarzahlung ein Rabatt von 4 % gestattet wird, wie hoch beläuft sich dann die baar zu erlegende Summe? — Lösung: Die Waare wiegt brutto $(5{,}86 + 6{,}70)$ Ztnr. $= 12{,}56$ Ztnr. und netto $(12{,}56 - 0{,}265)$ Ztnr. $= 12{,}295$ Ztnr. Diese kosten $47{,}18$ Frkn. $\times 12{,}295 = 580{,}0781$ Fr. Statt 100 Fr. muß man nun baar bezahlen 96 Fr.;

also statt 1 Fr. $0,^{96}$ Fr. und statt des vorigen Nettowerthes ($580,^{0781}$. $0,^{96}$) Frkn. = $556,87^{4976}$ Fr. = 556 Fr. 87 und ungefähr $^1/_2$ Rppn.

2) Ein Wirth kauft $10^1/_2$ Saum Wein zu $30^1/_2$ Fr. und schenkt ihn aus für 20 Rppn. den Schoppen: wie viel Prozent hat er und wie viel Gewinn im Ganzen? — Lösung: Die Maß kostet ihn $30^1/_2$ Rp. und er löst dafür 80 Rp.; also gewinnt er mit je $30^1/_2$ Rp. (80 — $30^1/_2$) Rp. = = $49^1/_2$ Rp. und mit 1 Rp. ($49^1/_2$: $30^1/_2$) Rp. = $^{99}/_{61}$ Rp. und mit 100 Rp. gewinnt er $^{9900}/_{61}$ Rp.; dieß macht also $162^{18}/_{61}$ %. Da er ferner an jeder Maß $49^1/_2$ Rp. Gewinn hat, so macht dieß auf 1 Saum $49^1/_2$ Frkn. und auf $10^1/_2$ Saum $49^1/_2$ Frkn. × $10^1/_2$ = ($495 + 24^3/_4$) Frkn. = $519^3/_4$ Frkn.

3) Ein Handelsmann liefert 6 Ztnr. Schweizerkäse um $415,^{42}$ Fr. Wenn er nun hiebei im Ganzen 95 Fr. gewinnt, wie viel Prozent hat er dann gewonnen und wie theuer ist ihn das Pfund im Ankauf gestanden? — Lösung z. B. In den 41542 Rp. Einnahmen sind 9500 Rp. Gewinn, also kosteten ihn die 6 Ztnr. (41542 — 9500) Rppn. = 32042 Rp., daher 1 Pfd.? Wenn er ferner mit den 32042 Rp. Ankaufssumme 9500 Rp. gewonnen hat, wie viel mit 100 Rp., also wie viel Prozent? — u. s. f. viele dergleichen Beispiele. Ferner:

4) Zu einem Geschäft gibt ein Kaufmann 350 Frkn., ein zweiter 1470 Frkn.; sie gewinnen hiebei im Ganzen $327^3/_4$ Frkn.; wie verhält sich der Antheil des einen zum Antheil des Andern und wie viel gehört davon dem einen und wie viel dem andern? — Lösung: Die Antheile am Gewinn werden sich zu einander verhalten wie die Einlagen ins Geschäft, d. h. der erste wird 350 gleiche Theile vom Gewinn ziehen und der zweite 1470, wie jener auch 350 Fr. und dieser 1470 Fr. eingelegt hat. Wenn also dem 1sten 350 und dem zweiten 1470 gleiche Theile zukommen, so sind dieß im Ganzen 1820 gleiche Theile, auf die der Gewinn $327^3/_4$ Fr. fällt; wie viel fällt nun auf 1 Theil? und auf 350 Theile? und auf 1470 Theile? — Oder kürzer: Mit (350 + 1470) Fr. sind $327^3/_4$ Fr. gewonnen worden, wie viel mit 350 Fr.? wie viel mit 1470 Fr.?

5) Drei Personen theilen eine Summe von $8593^3/_4$ Fr.; die Antheile sollen sich zu einander verhalten wie $^1/_3$ zu $^1/_4$ zu $^1/_5$; wie viel bekommt jeder? — Lösung: Die Antheile verhalten sich zu einander wie $^1/_3$ zu $^1/_4$ zu $^1/_5$, oder, wenn man diese Brüche gleichnamig macht, wie $^{20}/_{60}$ zu $^{15}/_{60}$ zu $^{12}/_{60}$. Also muß der 1ste 20 gleiche Theile bekommen, wie der 2te deren 15 und der 3te 12. Wenn nun auf (20 + 15 + 12) oder 47 gleiche

Theile $8593\frac{3}{4}$ Fr. fallen, wie viel kommt dann auf 1, auf 20, auf 15 und wie viel auf 12 der gleichen Theile?

6) Wenn zur Bereitung des Schießpulvers 100 Theile Salpeter, 10 Theile Schwefel und 15 Theile Kohlen erforderlich sind; wie viel muß dann von diesen Stoffen genommen werden, um 35 Ztnr. Pulver zu bereiten?

7) Eine Summe von 250,34 Fr. soll unter 3 Schulen nach Verhältniß der Schülerzahl vertheilt werden. Die erste zählt 103, die 2te 95 und die 3te 115 Schüler; wie viel erhält jede Schule?

8) Drei Schäfer benutzen zusammen eine Weide um 103,5 Frkn. Wenn nun der erste 89 Schafe 14 Tage lang auf die Weide gehen läßt, der zweite 51 Schafe 15 Tage lang und der dritte 104 Schafe 24 Tage lang; wie viel hat dann jeder nach dieser Benutzungsweise zu zahlen? Lösung: Für 1 Schaf, das 1 Tag weidet, zahlt man 1 Theil u. s. f.

9) Wenn ein Gießer bei Kupfer 3 % und bei Zinn 8 % Abbrand rechnet und einen Guß von 17,65 Ztnr. Metall zu Stande bringen, das aus 8 Theilen Kupfer und 1 Theil Zinn bestehen soll; wie viel wird er von jeder Art nehmen müssen? — Lösung: Die 9 Theile Metall machen 17,65 Ztnr., also 1 Theil, und 8 Theile? Dann: Um 97 Pfd. Kupfer rein im Guß zu haben, muß man 100 Pfd. Kupfer schmelzen, also ...? ꝛc.

Eine Aufgabensammlung für die Schüler muß nun alle Hauptrichtungen der Anwendung dieser vermischten Operationssätze enthalten, also z. B. Aufgaben aus der Landökonomie, aus der Naturkunde und Geographie, aus den Künsten, Gewerben ꝛc., und zwar je das Gemeinnützlichste und Anwendbarste. Von diesen Aufgaben benutzt der Lehrer diejenigen mit den einfachsten Zahlverhältnissen zur Fortsetzung der Uebungen im Kopfrechnen und auch bei den übrigen werden die Schüler angehalten, die einfachern Zwischenresultate der Rechnungen bloß „im Kopfe" zu bilden, was ein rasches und kurzes Operiren hauptsächlich befördert. Natürlich werden die Schüler auch hier noch, wie durch den ganzen Rechnungsunterricht, zur Verifikation ihrer Rechnungsergebnisse angehalten; dieselbe bietet hier um so mehr Interesse dar, als die Aufgaben auf dieser Stufe noch weit mehr Seiten der verschiedenartigen Auffassungs- und Durchführungsweise in sich schließen als die frühern. Es mag wohl genügen, an diesem Orte nur ein einziges Beispiel einer Verifikation auszuführen, z. B. zur obigen Aufgabe 2): Man könnte abweichend von der ersten Auflösungsweise zunächst den ganzen Ankaufspreis, dann den ganzen Erlös und hieraus den Gesammt-

gewinn und den Gewinn $^0/_0$ berechnen. Hiernach hätte man $10^1/_2$ Saum zu $30^1/_2$ Fr. kosten $320^1/_4$ Fr., und da für die Maß 80 Rp., also für den Saum 80 Fr. gelöst werden, so ist der Gesammterlös für $10^1/_2$ Saum 840 Fr., folglich der Gesammtgewinn $= (840 - 320^1/_4)$ Fr. $= 519^3/_4$ Fr. (was also mit dem frühern Resultate übereinstimmt). Sind nun mit $320^1/_4$ Fr. $519^3/_4$ Fr. gewonnen worden, so wurden mit 1 Fr. $(519^3/_4 : 320^1/_4)$ Fr. $= {}^{2079}/_{1281}$ Fr. $= {}^{693}/_{427}$ Fr. $= {}^{99}/_{61}$ Fr., also mit 100 Fr ${}^{9900}/_{61}$ Fr., also (wie oben) $162^{18}/_{61}$ $^0/_0$ gewonnen. — Oder umgekehrt von diesen Resultaten wieder auf Einkaufs- und Verkaufssumme, oder von einem Resultat und dem Einkaufspreis auf den Verkaufspreis u. s. f. geschlossen, z. B.: Wenn man für die $10^1/_2$ Saum $320^1/_4$ Fr. bezahlt und dadurch $162^{18}/_{61}$ $^0/_0$ gewonnen hat; wie viel hatte man gelöst? Antwort: Statt 100 Fr. hat man $262^{18}/_{61}$ Fr eingenommen, statt 1 Fr. $(262^{18}/_{61} : 100)$ Fr. und statt $320^1/_4$ Fr. $\frac{320^1/_4 \cdot 262^{18}/_{61}}{100}$ Fr. $=$

$$= \frac{1281 \cdot 1319/61}{4 \cdot 50} \text{ Fr.} = \frac{1281 \cdot 8000}{4 \cdot 50 \cdot 61} \text{ Fr.} = 21 \cdot 40 \text{ Fr.} = 840 \text{ Fr.}$$

(wie oben).

c. Operationssätze für abgekürzte Multiplikation und Division mit Dezimalen.

1) Jemand erhält ein Faß Oel, das **brutto** 6,57 Ztnr. wiegt, das leere Faß ist $112^1/_2$ Pfd. schwer und der Zentner **netto** wird ihm zu 69,25 Fr. auf 3 Monate Ziel oder mit $^1/_2$ $^0/_0$ Diskonto per Monat angerechnet. Nun diskontirt er und es frägt sich, wie hoch ihn das Pfund Oel zu stehen kommt, wenn er zum Ankauf noch $20^1/_2$ Fr. für Fracht in Anschlag bringen muß? — Lösung: (nur bis auf 3 Dezimalen nach dem ,). Das Nettogewicht ist $(6{,}57 - 1{,}125)$ Ztnr. $= 5{,}445$ Ztnr.; diese kosten Fr. $69{,}25 \times 5{,}445 = 377{,}066 \ldots$ Fr. Bei Baarzahlung sind $^3/_2$ $^0/_0$ Diskonto zu rechnen, also sind statt je 100 Fr. nur 98,5 Fr. zu zahlen, daher statt 1 Fr. nur 0,985 Fr. und statt des obigen Betrages $(377{,}066 \ldots \times \times 0{,}985)$ Fr. $= 371{,}410 \ldots$ Fr.; dazu 20,5 Fr. Spesen, macht $391{,}910 \ldots$ Fr. Und wenn dieß nun die Auslagen sind für $544{,}5$ Pfd, so kommt 1 Pfd. auf Fr. $391{,}910 \ldots : 544{,}5 = 0{,}719 \ldots$ Fr., was fast 72 Rp. (nicht einmal $^1/_{10}$ Rp. weniger) ausmacht. U. s. f. viele derartige Beispiele, damit die Schüler die Vortheile dieses abgekürzten Dezimalrechnens auch aus vielfacher Anwendung einsehen.

2) Wie groß wird ein Kapital von 795 Fr. 18 Rp. in 3 Jahren zu $3^1/_4$ $^0/_0$ mit Zinseszinsen werden (d. h. wenn jedes Jahr der Zins

zum Kapital geschlagen und das Ganze aufs Neue zinstragend wird)? — Auflösung: 100 Fr. bringen $3^1/_4$ oder 3,25 Fr. Jahreszins, also 1 Fr. bringt 100 Mal weniger, d. i. 0,0325 Fr. und irgend eine Anzahl, z. B. 795,18 Fr., bringt diese Anzahl Mal 0,0325 Fr., also (795,18 × 0,0325) Fr., daher:

795,18 Fr. × 0,0325	821,0234 Fr. × 0,0325	847,7066 Fr. × 0,0325
23,8554	24,6307	25,4312
1,5904	1,6420	1,6954
3976	4105	4239
821,0234 nach 1 Jahr.	847,7066 nach 2 Jahren.	875,2571 nach 3 Jahren.

Das Kapital sammt Zinseszinsen macht also nach 3 Jahren $875^1/_4$ Fr. (jedenfalls keinen ganzen Rappen mehr). Durch Multiplikation des Kapitals mit dem beständigen Multiplikator (oder Coeffizienten) 0,0325 erhält man jedesmal den entsprechenden Jahreszins; die Produkte werden aber nach abgekürzter Weise stets nur bis zu einer gewissen Stelle, z. B. den 10000steln berechnet. Wenn man die Ansätze alle unter einander schreibt, braucht man Multiplikand und Multiplikator nicht wiederholt zu schreiben. Für eine größere Anzahl Jahre darf die Rechnung nur so fortgesetzt werden. U. s. w. für ein beliebiges Kapital und einen beliebigen Zinsfuß.

3) Gesetzt, man hätte eine Masse Schmiedeisen, von der man berechnet, daß sie 10 Kb.' 93 Kb." mit Weglassung der kleinern Bruchtheile enthält, wie viele Pfund würde diese Masse wiegen, wenn man erfahren hat, daß das spezifische Gewicht solchen Eisens = 7,79.. ist? Lösung: Das spezifische Gewicht zeigt an, wie manchmal man z. B. das Gewicht einer gewissen Wassermenge nehmen muß, um das Gewicht eines Körpers von eben so großer Ausdehnung wie die Wassermenge zu finden. Wenn nun 1 Kb.' Wasser (dest. + 14°R.) 54 Pfd. schwer ist, so wiegt 1 Kb.' Schmiedeisen (7,79.. × 54) Pfd. = 420,7.. Pfd. und 10,93.. Kb.' wiegen (420,7.. × × 10,93..) Pfd. = 4598,.. Pfd., also 45 Ztnr. 98 Pfd. ohne die Bruchtheile, die man hier nicht näher angeben kann.

4) Gesetzt, ein kreisrunder Teich habe 3298' im Umfange, wie groß ist sein Durchmesser? Lösung: Man muß hier wissen, daß der Durchmesser eines Kreises die Annäherungszahl 3,14.. Mal genommen annäherungsweise den Umfang gibt. Folglich ist der Durchmesser = 3298' : 3,14. = 1050' oder 105 Ruthen, wobei die Einer-Fuß nicht mehr sicher wären. — Es ist sehr wichtig, daß die Schüler, wenn in einer Rechnung Annäherungswerthe auftreten, genau dazu angehalten werden, zu ermitteln (etwa

wie es oben geschah), wie weit das Resultat richtig werden kann *. Man findet in dieser Beziehung noch in manchen Schul- und Handbüchern bedeutende Schnitzer. Zweckmäßige hieher gehörende Aufgaben folgen in der Aufgabensammlung für diese Schulstufe.

Anmerkung: Was aus der Buchhaltung noch in dieses Jahr gehört, findet sich im folgenden Jahreskurse mit dem auch dort zu Behandelnden vereinigt. Der Lehrer möge also hier von der Buchhaltung noch so viel durchnehmen als angeht und das Uebrige im nächsten Jahre folgen lassen. Für die Darstellung aber schien eine Theilung nicht zweckmäßig.

III.

Neuntes Schuljahr.

Beim Beginne: Schüler zwischen dem vierzehnten und fünfzehnten Altersjahr.

§ 72.

Aufgabe.

Gemischte Operationsverbindung beliebiger ganzer oder gebrochener Zahlen und abgekürztes Schnellrechnen. Zusammenhängende Entwicklung des bis jetzt durchlaufenen Rechnungsgebietes zum Zwecke einer abgerundeten Auffassung des Ganzen. Anwendungen: Vermischte Operationssätze, das bürgerliche Rechnungsgebiet möglichst erschöpfend. Buchhaltung und darauf bezügliche Rechnungen.

§ 73.

Reduktionen und Abkürzungen.

Man kann den Dividend und den Divisor einer Division, auch wenn sie aus Brüchen bestehen, mit der gleichen Zahl multipliziren und das Resultat (der Quotient) bleibt dem Werthe nach doch gleich, gerade wie wenn man bei einem einfachen Bruche Zähler und Nenner dieselbe Zahl Mal nimmt; denn wenn man z. B. hat $3^1/_4 : 1^2/_3$ so ist dieß gemäß dem im vorigen Jahre Behandelten $= {}^{13}/_4 : {}^5/_3 = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 5} = {}^{39}/_{20}$. Das-

---

* Bei allem Beweglichen und Veränderlichen im Raume sind Annäherungswerthe oder mittlere Zahlenwerthe der letzte Zweck, ja der Ausdruck physischer Gesetze; sie zeigen uns das Stetige in dem Wechsel und in der Flucht der Erscheinungen; so ist z. B. der Fortschritt der neuern messenden und wägenden Physik vorzugsweise durch Erlangung und Berichtigung der mittlern Werthe gewisser Größen bezeichnet. A. v. Humboldt, Kosmos.

selbe würde man aber bekommen, wenn man einfach den Dividend und den Divisor mit der Zahl 12, dem Produkte der Nenner, multiplizirte. Man hätte so: $3^1/_4 : 1^2/_3 = 39 : 20$, denn $3^1/_4 . 12 = 39$ und $1^2/_3 . 12 = 20$. Eben so wenn Dividend und Divisor aus gebrochenen Faktoren bestehen. Man wird also bei solchen Divisionen kürzer das letztere Verfahren anwenden als das erstere. So sind:

1) $4^1/_8 : 5^1/_4 = (4^1/_8 \ 8) : (5^1/_4 . 8) = {}^{33}/_{42}$; und $(4^1/_3 . 1^1/_2) : {}^5/_6 = {}^{13}/_2 : {}^5/_6 = {}^{39}/_5$, oder auch so geschrieben: $\frac{4^1/_8}{5^1/_4} = \frac{4^1/_8 . 8}{5^1/_4 . 8} = {}^{33}/_{42}$;

und $\frac{4^1/_3 . 1^1/_2}{{}^5/_6} = \frac{13 . 3}{5} = {}^{39}/_5$.

2) $\frac{4^1/_5 . 5^1/_2 . 3}{1/_2 . 2^1/_4 . 11} =$ (indem man Dividend und Divisor mit 10 . 4 multiplizirt) $\frac{42 . 22 . 3}{5 . 9 . 11} = \frac{42 . 2}{5 . 3} = {}^{28}/_5 = 5^3/_5$.

3) $[({}^{215}/_7 : 3) . 9] : 5 = \frac{215 . 9}{7 . 3 . 5} = \frac{43 . 3}{7} = {}^{129}/_7 = 18^3/_7$.

4) $[(3^3/_4 . 4^1/_2) : 1^1/_5] : 3^1/_8 = \frac{3^3/_4 . 4^1/_2}{1^1/_5 . 3^1/_8} = \frac{15 . 45}{6 . 25} = {}^9/_2 = 4^1/_2$.

5) $\frac{(5^1/_4 - 2^1/_2) \, 3^1/_3}{10 \, (2^1/_4 + 1^1/_3)} = \frac{2^3/_4 . 3^1/_3}{10 . 3^7/_{12}} = \frac{11 . 10}{10 . 43} = {}^{11}/_{43}$.

6) $\frac{(5^1/_4 - 2^1/_2) \, (2^1/_4 + 1^1/_3)}{(10 - 8^1/_5) : 3^1/_3} = \frac{2^3/_4 . 3^7/_{12}}{14/_5 : 3^1/_3} = \frac{2^3/_4 . 3^7/_{12}}{27 : 50} =$

$= \frac{11 . 43}{{}^{27}/_{50} . 48} = \frac{11 . 43 . 50}{27 . 48} =$ &c.

Wenn die Schüler mit solchen zusammengesetzten Bruchformen geläufig und mit Einsicht rechnen, dann lasse man sie alle die komplizirtern angewandten Aufgaben, die auf derartige Bruchverbindungen führen, in dieser kurzen und übersichtlichen Weise lösen. Zur Vereinfachung von Brüchen, deren Zähler und Nenner größere ganze Zahlen sind, müssen die Schüler nothwendig den größten gemeinschaftlichen Faktor (oder Divisor) solcher Zahlen auffinden können. Es reicht nicht aus, daß die Schüler bereits einige Kennzeichen der Theilbarkeit ganzer Zahlen, sei es aus eigener Erfahrung oder durch Mittheilung von Seite des Lehrers sich gemerkt haben, wie z. B. daß eine ganze Zahl durch 2 oder 5 theilbar ist (d. h. durch 2 oder 5 dividirt 0 zum Rest läßt), wenn die Zahl der Einer es ist; daß eine Zahl durch 3 theilbar, wenn die Summe ihrer Zifferwerthe es ist, durch 11, wenn der Unterschied zwischen der Summe der Zifferwerthe auf den ungeraden Stellen (1te, 3te, 5te oder Einer-, Hunderter-, Zehn-

tausenderstelle u. s. f.) und zwischen derjenigen der geraden durch 11 geht u. s. f. In allen den Fällen, wo sich größere Primfaktoren ergeben, nützen diese Kennzeichen die Schüler nichts; sie müssen ein anderes Mittel haben, durch welches sie in allen Fällen untersuchen können, ob zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Faktor haben und welches der größte ist. Diese Untersuchung können sie wohl am zweckmäßigsten etwa auf folgende Art führen: Man habe zwei Zahlen, z. B. 1378 und 962, so ist der nächste Gedanke wohl der, daß diese Zahlen jedenfalls keinen größern gemeinschaftlichen Faktor haben können als die kleinere, nämlich 962, ist; man kann nun probiren, ob dieß etwa zutrifft. Man findet $1378 : 962 = 1$ oder $1378 = 962 . 1 + 416$; es war also die kleinere Zahl nicht gemeinschaftlicher Faktor; aber so viel dürfte sich nun ergeben, daß, wenn die beiden Zahlen doch einen Faktor gemein haben, er auch in obigem Reste, nämlich in 416 liegen muß; denn gesetzt, es wäre dieß nur der Faktor 2, so hätte man $1378 : 2 = 1 . 962 : 2 + 416 : 2$ (da ja der Dividend gleich war dem Quotient × dem Divisor + dem Rest, also Gleiches durch dieselbe Zahl getheilt auch wieder Gleiches geben muß). Wenn nun 1378 und 962 irgend einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so ist 1378 : durch diesen Faktor eine ganze Zahl, ebenso 962 : durch denselben; daher muß auch 416 : durch den gleichen Faktor ganz sein, da eine ganze Zahl (links vom =) nicht gleich sein könnte einer ganzen Zahl + einem eigentlichen Bruch (rechts vom =). Daraus folgt die allgemeine Wahrheit: Wenn zwei ganze Zahlen einen gemeinschaftlichen Faktor haben und man dividirt die größere durch die kleinere, so hat auch der Rest, wenn ein solcher bleibt, diesen Faktor. Und ebenso: Wenn im Divisor und im Rest einer Division eine Zahl ohne Rest enthalten ist, so ist sie ebenso im Dividend enthalten. Denn wenn oben (rechts vom =) $962 : 2 + 416 : 2$ eine ganze Zahl ausmacht, so muß auch (links) $1378 : 2$ ganz sein. Mit diesen beiden Sätzen kann nun der größte gemeinschaftliche Divisor leicht aufgefunden werden. Man fährt mit der Untersuchung weiter, indem man überlegt, daß, wenn der gemeinschaftliche Faktor auch im Reste liegen muß, er höchstens so groß als der Rest selbst sein kann, also probirt man, ob dieß der Fall ist und fährt, wenn wieder ein Rest bleibt, so fort, bis die Division einmal aufgeht. Wo dieß eintritt, da ist der Divisor der gesuchte gemeinschaftliche Faktor. Also:

$1378 : 962 = 1$; $962 : 416 = 2$; $416 : 130 = 3$; $130 : 26 = 5$.
416 130 26 0

Da, wie man hier sieht, 26 in 130 restlos enthalten ist, so ist nach obigem zweiten Satz 26 auch im Dividend 416 enthalten, weil eben 26 im Reste 26 und im Divisor 130 liegt. Daher ist auch in der zweiten Division 26 im Dividend 962 enthalten, weil eben nach Vorigem im Rest 130 und im Divisor 416. Daraus folgt zum Schluß, es ist 26 auch noch in 1378 enthalten, weil eben im Rest 416 und im Divisor 962 der ersten Division. Dieß kann auch direkt mit Hülfe der Faktorenabsonderung gezeigt werden, z. B. $130 = 5 \cdot 26$ und $416 = 3 \cdot 130 + 26$, also $= 15 \cdot 26 + 26 = 16 \cdot 26$, und aus der zweiten Division $962 = 2 \cdot 416 + 130 = 32 \cdot 26 + 5 \cdot 26 = 37 \cdot 26$, und aus der ersten Division $1378 = 1 \cdot 962 + 416 = 37 \cdot 26 + 16 \cdot 26 = 53 \cdot 26$. — Die Schüler lösen mit Hülfe dieser stufenweisen Division (Stiegendivision) verschiedene Aufgaben über Aufsuchung des größten Divisors beliebiger ganzer Zahlen und suchen die Bruchresultate, die sie in ihren angewandten Aufgaben erhalten, auf diesem Wege abzukürzen.

Anmerkung. Eine zusammenhängende Entwicklung des ganzen Rechnungsgebietes der Volksschule soll in gedrängter Uebersicht dem letzten Hefte der Aufgabensammlung der Ergänzungsschule beigegeben werden.

§ 74.

Praktisches Rechnen (Schlußfolge der vermischten Operationssätze).

A. Dreisatz nach wiederholten Verwandlungen.

1) Jemand darf 350 Fr. 2 Jahre lang, 250 Fr. 3 Jahre lang und 300 Fr. $1\frac{1}{2}$ Jahre lang, ohne Zins zu zahlen, benutzen; wann könnte er alle diese Summen ohne weitern Nutzen oder Schaden auf ein Mal zurückbezahlen? Auflösung:

350 Fr. geben in $\frac{4}{2}$ Jahren so viel Zins als 350 . 4 Fr. od. 1400 Fr. in $\frac{1}{2}$ Jhr.
250 = = = $\frac{6}{2}$ = = = = = 250 . 6 = = 1500 = = $\frac{1}{2}$ =
300 = = = $\frac{3}{2}$ = = = = = 300 . 3 = = 900 = = $\frac{1}{2}$ =
900 Fr. = = ? = = = = = = 3800 Fr. = $\frac{1}{2}$ =

und dieser letzte Dreisatz ist noch leicht zu lösen: Wenn 3800 Fr. in $\frac{1}{2}$ Jahr einen gewissen Nutzen bringen, so bringen 900 Fr. denselben in $\frac{\frac{1}{2} \cdot 3800}{900}$ Jahren $= \frac{\frac{1}{2} \cdot 38}{9}$ Jahre $= \frac{19}{9}$ Jahre. — Es beruht also die Lösung auf den Sätzen: daß ein 2, 3, 4 ... Mal größeres Kapital den gleichen Nutzen in einer 2, 3, 4 ... Mal kleinern Zeit bringt und

umgekehrt. In allen derartigen Aufgaben wird daher die Zeit in der gleichen Einheit oder in gleichen Bruchtheilen der Einheit ausgedrückt und darauf stützen sich dann die Verwandlungen zur Grundlage des Schlußdreisatzes.

2) Welches ist die mittlere Zahlungszeit für $753\frac{3}{4}$ Fr., die nach $3\frac{1}{6}$ Jahren, und $269\frac{2}{5}$ Fr., die nach $1\frac{1}{9}$ Jahren ohne Zins zahlbar wären? — Lösung z. B. durch zusammengesetzte Bruchformen wie bei den Abkürzungen in § 73:

$753\frac{3}{4}$ Fr. für $3\frac{1}{6}$ Jahre sind so viel werth als $(753\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{6})$ Fr für 1 Jahr.
$269\frac{2}{5}$ = = $1\frac{1}{9}$ = = = = = = $(269\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{9})$ = = 1 =

Also ist aus Gründen wie im ersten Beispiel die mittlere Zahlungszeit =

$$= \frac{(753\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{6}) + (269\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{9})}{753\frac{3}{4} + 269\frac{2}{5}} \text{ Jahre} = \frac{\frac{3015 \cdot 19}{4 \cdot 6} + \frac{1347 \cdot 10}{5 \cdot 9}}{1023\frac{3}{20}} \text{ Jahre} =$$

$$= \frac{\frac{1005 \cdot 19}{8} + \frac{449 \cdot 2}{3}}{1023\frac{3}{20}} \text{ Jahre} = \frac{1005 \cdot 19 \cdot 15 + 449 \cdot 2 \cdot 40}{1023\frac{3}{20} \cdot 120} \text{ Jahre} =$$

$$= \frac{322345}{122778} \text{ Jahre} = 2\frac{76789}{122778} \text{ Jahre.}$$

3) Wann müssen 1000 Fr. auf einmal abbezahlt werden, wenn man 370 Fr. nach 2 Jahren, $150\frac{3}{4}$ Fr. nach 3 Jahren und den Rest nach 4 Jahren ohne Zins zu zahlen schuldig ist?

4) Jemand, der verpflichtet ist, $\frac{1}{3}$ einer gewissen Geldsumme nach 1 Jahr, $\frac{1}{4}$ nach $1\frac{5}{12}$ Jahren, $\frac{1}{5}$ nach 2 Jahren und das Uebrige nach $2\frac{1}{6}$ Jahren zu erlegen, möchte die ganze Summe auf einmal bezahlen; wann könnte dieß billigerweise geschehen?

5) Wann ist der Verfalltag (oder die mittlere Zahlungszeit) für 4 gleich große Kapitalien, vom Maitag an gerechnet, wenn das erste den 12. Juni, das zweite den 30. Juni, das dritte den 17. August und das vierte den 11. November des gleichen Jahres verfallen ist? U. s. f. viele Beispiele dieser Gattung.

B. Vermischter Dreisatz mit Doppelgliedern.

1) Ein Silberarbeiter will aus 10- und 15löthigem Silber $5\frac{1}{2}$ Mark 14löthiges (d. h. solches, von welchem die Mark 14 Loth reines Silber und 2 Loth Zusatz enthält) mischen; wie viele Mark 10- und wie viele Mark 15löthiges bedarf er? — Auflösung:

Nimmt er 1 Mark 10löthiges Silber, so hat er darin 4 Loth Silber zu wenig.
= = 1 = 15 = = = = = = 1 = = = viel.

Mischt er nun 1 Mark der 1sten Sorte mit 4 Mark der 2ten, so hat er (in Hinsicht auf 14löthiges Silber) darin 4 Loth Silber zu wenig, aber zugleich wieder 4 Loth Silber zu viel, also eine Komposition von richtigem Gehalt Dieses Gemisch von 5 Mark enthält also 1 Mark Silber von der ersten und 4 Mark von der zweiten Sorte, oder:

5 Mark Gemisch = 1 M. v. I + 4 M. v. II,
daher 1 " " = $^1/_5$ " " " + $^4/_5$ " " "
und $5^1/_2$ " " = ($^1/_5$ " " " + $^4/_5$ " " ") × $5^1/_2$ =
= 1,1 " " " + 4,4 " " ".

Also muß er zu $5^1/_2$ Mark 14löthigem Silber 1,1 Mark 10löthiges und 4,4 Mark 15löthiges Silber nehmen.

2) Im Wasser gewogen verlieren 37 Pfd. Zinn 5 Pfd. (d. h. sie haben so ein 5 Pfd. leichteres Gewicht), und 23 Pfd. Blei verlieren im Wasser 2 Pfd. Eine gewisse Komposition von Zinn und Blei, die 120 Pfd. wiegt, verliert dagegen im Wasser 14 Pfd. Wie viel Zinn und Blei ist in dieser Komposition? — Auflösung:

Nach der Aufgabe verliert 1 Pfd. Zinn im Wasser $^5/_{37}$ Pfd. = $\frac{6900}{37 \cdot 23 \cdot 60}$ Pfd.

und 1 " Blei $^2/_{23}$ " = $\frac{4440}{37 \cdot 23 \cdot 60}$ "

und 1 " v. d. Komposition $^7/_{60}$ " = $\frac{5957}{37 \cdot 23 \cdot 60}$ "

1 Pfd. Zinn verliert also im Wasser mehr an Gewicht als 1 Pfd. der Komposition, und zwar (6900 — 5957) oder 943 Gewichtstheile mehr; 1 Pfd. Blei verliert aber im Wasser (5957 — 4440) oder 1517 derselben Gewichtstheile weniger. Nimmt man nun 1517 Pfd. Zinn und 943 Pfd. Blei zusammen, so beträgt der Gewichtsverlust der 1517 Pfd. Zinn gerade (1517 . 943) Gewichtstheile mehr als derjenige von 1517 Pfd. von der Komposition, und derjenige der 943 Pfd. Blei gerade (1517 . 943) Gewichtstheile weniger als der von 943 Pfd. Komposition; also haben: 1517 Pfd. Zinn + 943 Pfd. Blei gerade gleichen Gewichtsverlust wie (1517 + 943) Pfd. Komposition, d. h. sie machen ein gleiches Gemisch wie die Komposition. Also sind:

(1517 + 943) od. 2460 Pfd. Komp. = 1517 Pfd. Zinn + 943 Pfd. Blei,
folglich 1 Pfd. Komp. = $^{1517}/_{2460}$ Pfd. Zinn + $^{943}/_{2460}$ Pfd. Blei,
und 120 " " = $\frac{12 \cdot 1517}{246}$ " " + $\frac{12 \cdot 943}{246}$ " " =
= 74 Pfd. Zinn und 46 Pfd. Blei. Die 120 Pfd. Komposition bestehen also aus 74 Pfd. Zinn + 46 Pfd. Blei.

3) Die Krone des Königs Hiero, bestehend aus Gold und Silber, wog 20 Pfd. Wie viel Gold und Silber mußte sie enthalten, wenn sie im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfd. verlor und sowohl $19\frac{3}{5}$ Pfd. Gold als auch $10\frac{1}{2}$ Pfd. Silber im Wasser 1 Pfd. verlieren? Gleich zu lösen wie die vorige Aufgabe.

4) Wie viel 16karatiges und wie viel 20karatiges Gold sind zu einer Mischung von $5\frac{1}{2}$ Mark 19karatigem Gold nothwendig?

u. dgl. mehr. Dann einzelne hieher gehörende unbestimmte Aufgaben, z. B.

5) Man hat Wein, den Saum zu 25 Fr., zu 30 Fr. und zu 40 Fr., und möchte daraus 20 Saum zu 35 Fr. mischen; wie könnte die Mischung geschehen?

NB. Eine derartige Aufgabe läßt unendlich viele, jedoch innerhalb gewisser Schranken sich bewegende Auflösungen zu, wie sich aus Nachfolgendem zeigen wird.

Ausrechnung. Würde man die Mischung bloß aus 2 Sorten versuchen, so könnte man dieselbe offenbar nur bewerkstelligen aus denen zu 25 Fr. und 40 Fr. oder zu 30 Fr. und 40 Fr., denn die Sorten zu 25 Fr. und 30 Fr. können kein Gemisch zu 35 Fr. geben. Löst man diese 2 Mischungsrechnungen wie oben Aufgabe 1, so folgt a) man muß $6\frac{2}{3}$ Saum der ersten Sorte und $13\frac{1}{3}$ Saum von der dritten Sorte nehmen, um 20 Saum à 35 Fr. zu bekommen; b) man muß aber gerade 10 Saum von der zweiten Sorte und 10 Saum von der dritten Sorte nehmen, um ebenfalls 20 Saum à 35 Fr. zu erhalten.

Nimmt man also 10 Saum von der dritten Sorte, so muß man alles Uebrige noch von der zweiten Sorte, also 0 Saum von der ersten Sorte nehmen, weil, wenn man hiezu einen Theil auch von der ersten Sorte einmischen wollte, die Mischung schlechter als zu 35 Fr. per Saum würde. Man kann also bei der dritten Sorte nicht unter 10 Saum annehmen, wohl aber darüber, aber auch nur bis auf $13\frac{1}{3}$ Saum, denn, nimmt man $13\frac{1}{3}$ Saum von der dritten Sorte, so muß alles Uebrige von der ersten Sorte, also 0 Saum von der zweiten Sorte genommen werden; wollte man aber über $13\frac{1}{3}$ Saum bei der dritten Sorte steigen, so müßte das Uebrige noch wohlfeiler als zu 25 Fr. genommen werden, was hier nicht angeht. Also sind die Gränzen der freien Annahme so:

Bei der dritten Sorte kann man zwischen 10 und $13\frac{1}{3}$ Saum beliebig annehmen, dann ist die Mischung fürs Uebrige aus den beiden andern Stoffen noch möglich; ähnlich kann man bei der zweiten zwischen 0 und 10 Saum und bei der ersten zwischen 0 und $6\frac{2}{3}$ Saum annehmen.

Zwischen diesen Gränzen wären aber unendlich viele verschiedene Annahmen möglich, daher gibt es auch unendlich viele Lösungen, die genügen können. Es steht nun bei dem Praktiker, eine mögliche Annahme zu treffen, wie sie ihm am besten konvenirt. Hätte er z. B. von der ersten Sorte gerade nur 5 Saum vorräthig und wollte sie ganz zur Mischung verwenden, so würde sich ergeben:

5 Saum à 25 Fr. kosten 125 Fr., die 20 Saum à 35 Fr. 700 Fr., also kommen die noch übrigen 15 Saum auf (700 — 125) Fr. = 575 Fr.

folglich 1 " davon auf $^{575}/_{15}$ " = $38^1/_3$ "

Es müssen also nun 15 Saum à $38^1/_3$ Fr. aus Wein zu 30 Fr. und zu 40 Fr. gemischt werden; dieß geschieht wie oben bei der Mischung von 2 Stoffen:

Nämlich bei 1 Saum à 30 Fr. gewinnt man $8^1/_3$ Fr. = $^{25}/_3$ Fr.,

" 1 " à 40 " verliert " $12^2/_3$ " = $^5/_3$ "

Nimmt man nun 1 Saum à 30 Fr. und 5 Saum à 40 Fr., so gewinnt und verliert man gleich viel, d. h. nichts; also sind 5 Saum à 40 Fr. und 1 Saum à 30 Fr. = 6 Saum rechtes Gemisch, wobei man nichts gewinnt oder verliert, weßwegen man hat:

6 Saum Gemisch = 1 Saum à 30 Fr. + 5 Saum à 40 Fr.,

und 1 " " = $^1/_6$ " " " + $^5/_6$ " " "

= 15 " " = $2^1/_2$ " " " + $12^1/_2$ " " "

Wenn man demnach 5 Saum von der ersten Sorte (à 25 Fr.) in die oben verlangte Mischung nimmt, so hat man noch $2^1/_2$ Saum von der zweiten (à 30 Fr.) und $12^1/_2$ Saum von der dritten (à 40 Fr.) dazu zu nehmen. Die Probe ist leicht zu machen:

5 Saum à 25 Fr. kosten 125 Fr.
$2^1/_2$ " à 30 " " 75 "
$12^1/_2$ " à 40 " " 500 "

Also die 20 Saum zusammen 700 Fr.
Es kosten aber auch die 20 Saum à 35 Fr. gerade 700 Fr.

So mögen einzelne beliebige Mischungen zu 3 oder 4 Stoffen gemacht werden.

C. Aufgaben verschiedener Art.

Es kommen hier verschiedenartige Aufgaben aus allen den durchgenommenen Gebieten, besonders auch aus denen, die bisher noch weniger berücksichtigt werden konnten. Die Aufgabensammlung, die nach dem Handbuche erscheint, wird hierin das Nöthige enthalten. Eine gute Uebung bildet hier immer noch, die Schüler ziemlich häufig aus gestellten Aufgaben die

Operationssätze angeben zu lassen, nach denen man die Resultate dieser Aufgaben ableiten kann. Wenn die Schüler hierin fest sind, gibt sich die Ausführung des Einzelnen leicht.

§ 75.

Ueber einfache bürgerliche Buchhaltung.

Der vorgeschriebene Raum dieses Buches gestattet nicht, so ausführlich über das Buchhaltungswesen einzutreten, als Manche es vielleicht wünschen möchten. In diesem Paragraphen soll bloß dasjenige berücksichtigt werden, was auch dem einfachsten Bürger und Berufsmann aus diesem Gebiete zu wissen nöthig ist. Es ist hier gemäß den frühern Untersuchungen besonders das bürgerlich berufliche Element ins Auge zu fassen; auf der nächsten Schulstufe (Zivilschule) werden noch diejenigen Abtheilungen des Buchhaltungswesens zu behandeln sein, die ihrem Charakter gemäß ins staatlich bürgerliche Gebiet gehören und die auch mit demjenigen Unterrichte im Zusammenhang stehen müssen, der dort über die Stellung des Bürgers im Gemeinde- und Staatsleben ertheilt werden soll. Der Lehrer mag nun die Art und Weise, wie er folgende oder ähnliche Mittheilungen den Schülern machen will, je nach seinen besonders zu berücksichtigenden Verhältnissen selbst bestimmen.

Unter Buchhaltung in weitester Bedeutung versteht man jede nach einem bestimmten Plane eingerichtete Rechnungsführung über irgend eine Verwaltung. Die Buchhalterei oder Buchführung ist sehr mannigfaltig sowohl mit Beziehung auf die Sache, die verwaltet wird, als auch mit Beziehung auf die Einrichtung, nach welche rdie Verzeichnung der Geschäftsvorfälle und die Rechnung geführt wird. Beziehe sie sich auf Landwirthschaft oder auf Handel im Kleinen oder Großen, oder auf Gewerbe irgend welcher Art, Manufaktur- oder Fabrikgeschäfte, oder auf Bankgeschäfte, oder auf die Verwaltung von Privat- oder öffentlichen Gütern, oder gar auf den ganzen Staatshaushalt: sie wird in jedem Falle eine bis auf einen gewissen Grad eigenthümliche Einrichtung erfordern, die eben von dem besondern Gegenstande der Verwaltung abhängt. In allen Fällen hat aber die Buchhaltung das Gleiche, daß durch sie stets eine klare und richtige Rechnung und eine klare und richtige Uebersicht und Einsicht in dem erzielt werden soll, was man in einer gewissen Verwaltung besitzt und was man schuldet. Hiezu ist aber neben der nöthigen Sachkenntniß vor allem aus eine bestimmte Ordnung die Hauptsache. Ohne diese kann kein Geschäft

gedeihen, weder im Staats- noch im Privathaushalt, und je verzweigter ein Geschäft ist, desto genauer und umfassender muß diese Ordnung durchgeführt und desto mehr Kontrollen oder Prüfungsmittel müssen in der Buchführung angelegt werden, um Irrthum oder Betrug möglichst zu verhüten. Man muß nun zunächst einige Hauptbegriffe aus diesem Gebiete und die dafür gebräuchlichen Ausdrücke kennen lernen, wenn man in die Buchhaltung eingeführt werden will. Die wichtigern davon mögen folgende sein:

Entwerfen wir ein Verzeichniß über unsern gesammten Besitzstand (die Aktiva) und unsere Schulden (die Passiva), so heißt dieses Verzeichniß *Inventarium*, auch *Status*. Ziehen wir von der Summe aller Aktiven die Passiven ab, so gibt der Unterschied — vorausgesetzt, daß die Schulden kleiner seien als der Besitzstand — unser *reines* oder *reelles* (liquides) Vermögen an. Jede Veränderung, welche mit einem Gegenstande unsers Besitzes, sei es in Kauf oder Verkauf oder Tausch ꝛc., oder durch Gewinn oder Verlust ꝛc. stattfindet, bildet einen Geschäftsvorfall, der in einem oder mehreren *Büchern* besonders aufzuschreiben ist und da einen *Posten* bildet. Was man z. B. an baarem Gelde ausgibt oder einnimmt, wird übersichtlich in ein Buch eingetragen, das man das *Kassabuch* nennt. Wer uns schuldet oder uns für irgend eine Leistung ganz oder theilweise bezahlt, oder wem wir schulden oder für irgend eine Leistung Geld geben, mit einem Worte, wer mit uns in Geschäftsverkehr tritt, dem eröffnen wir im *Hauptbuche* eine besondere Rechnung, *Konto*. Die Konto werden gewöhnlich für Personen eröffnet, mitunter aber auch für materielle Sachen ꝛc., z. B. Kassakonto, Waarenkonto ꝛc. In jedem Konto unterscheidet man das *Soll* (Debit) und das *Haben* (Kredit). Das erstere enthält dasjenige, was dem durch die *Aufschrift* oder *Ueberschrift* des Konto Bezeichneten (überhaupt dem Konto) zur Last oder als Schuld aufgeschrieben wird; das zweite enthält die Posten, die jenem durch die Aufschrift Bezeichneten gutzuschreiben sind, oder das, was ihm in der Rechnung zugut kommt. Die Posten fürs Soll werden gewöhnlich links auf eine Seite unter einander geschrieben, die fürs Haben ebenso rechts. Der Unterschied zwischen der Summe der Posten im Haben und derjenigen im Soll (überhaupt der Unterschied zwischen zwei in einer Rechnung einander entgegenstehenden Hauptsummen) heißt *Saldo*, der natürlich immer demjenigen Theile entspricht, der die größere Summe hat. In einem Konto darf man einen Posten nicht streichen; will man z. B. aus dem Soll einen Posten wegschaffen, so hat man dafür im Haben einen gleich großen Gegen-

posten zu schreiben, und dieß nennt man ein Storno (storniren). Jede Summe, die von einer Blattseite auf die nächste als Fortsetzung hinübergeschrieben wird, heißt Uebertrag oder Transport. Kassabuch und Hauptbuch sind die wichtigsten Bücher bei der Buchhaltung; außer ihnen sind, je nachdem das Geschäft ein mehr oder weniger umfangreiches ist, auch mehr oder weniger Bücher nothwendig. Ein Journal, d. h. ein Buch, in welches man alle Geschäftsvorfälle nach einer bestimmten Ordnung einträgt, oder wenigstens ein Memorial, d. i. ein allgemeines Notizbuch, worin man jeden Geschäftsvorfall, wie er stattfindet, gleich notirt, ist bei jedem Geschäfte unerläßlich. Verkehrt man mit irgend welchen Waaren, Stoffen oder Fabrikationsartikeln ꝛc., so ist überdieß ein Waaren- oder Artikelbuch ꝛc. nothwendig, worin man Ein- und Ausgang einer jeden Waare ꝛc. ähnlich einträgt wie im Kassabuch Einnahme und Ausgabe, und wodurch man stets ausmitteln kann, wie viel jederzeit von irgend einem Artikel noch genau vorhanden sein muß. Bei größern Geschäftszweigen sind außer den genannten Büchern noch manche Nebenbücher nothwendig, auf die wir hier nicht besonders eintreten können.

Nun muß man zwei Hauptarten der Buchführung unterscheiden, 1) die einfache, 2) die doppelte. Die letztere bildet ein auf strenge Regeln gegründetes Ganzes, das eine mehr künstliche und wissenschaftliche Verzeichnung und Berechnung der einzelnen Bestandtheile und Verzweigungen einer Verwaltung erfordert. Doppelt heißt sie 1) weil das Vermögen oder das Betriebskapital, das einem Geschäfte zu Grunde liegt, nicht nur als ein Ganzes auf einem Konto im Hauptbuche erscheint, sondern dessen Bestandtheile auch in andern Konto einzeln dargestellt sind, 2) weil jeder Geschäftsvorfall einen Debitor und einen Kreditor erhält und so im Hauptbuche auf der entgegengesetzten Seite zweier Konto vorkommt und zwar beim einen im Soll, beim andern im Haben. Die einfache Buchhaltung hat diese scharfe Trennung und doppelte Eintragung nicht; sie wird in der Regel mehr bei kleinern und weniger verzweigten Verwaltungen angewendet, deren Uebersicht an sich schon leichter möglich ist und bei denen man daher auch mit wenigern Kontrollen sicher auskommen kann. Wir werden nun etwas näher über einfache Buchhaltung, so wie sie dem einfachen Bürger und Berufsmann von Nutzen sein dürfte, eintreten.

Bei derselben ist zum mindesten nothwendig ein Memorial (oder allgemeines Notizenbuch), ein Kassabuch und ein Hauptbuch so wie im Falle das Geschäft es mit Waaren oder Produkten ꝛc. von einiger Bedeutung

zu thun hat, auch ein Waaren- oder Artikelbuch. Ins Notizenbuch wird jeder Geschäftsvorfall auf eine ganz einfache Weise eingeschrieben und von da nach der Ordnung einseitig auf die andern Bücher übergetragen.

Der Lehrer thut nun am besten, den Schülern die Einrichtung der einzelnen Bücher mit Beziehung auf Rubricirung, Lineatur, Eintragung ꝛc. zu erklären und alsdann irgend ein bestimmtes Geschäft und dessen Verwaltung mit ihnen zu besprechen, worauf sie dann selbst das Einzelne nach eigenem Gutdünken auszuführen hätten. Wir lassen hierüber ein Beispiel folgen: Der Schneidermeister Till in Z. beginnt mit Neujahr 1854 über sein ganzes Haus- und Geschäftswesen geordnete Bücher zu führen. Er entwirft zuerst ein genaues Inventar und trägt es wie folgt ins Hauptbuch ein:

Inventarium, aufgenommen den 31. Dezember 1853.

I. Aktiva:

a. Liegenschaften: Haus nebst einer halben Juchart Garten laut Kaufbrief				5470 Fr.
b. Fahrhabe, versichert in der Mailänder Gesellschaft für . (Siehe besonderes Inventar.)				1879 "
c. Waaren, nämlich:				
200 Ellen	schwarzes Tuch à $6\frac{1}{2}$ Fr. . .	Fr.	1300	
54 "	braunes Tuch à 7 Fr. . . .	"	378	
70 "	Leinwand à 1 Fr.	"	70	
160 "	Futterzeug à 25 Ct. . . .	"	40	
				1788 "
d. Produkte:	8 Saum Wein à 30 Fr. . .	Fr.	240	
	12 Tansen Kartoffeln à 4 Fr.	"	48	
				288 "
e. Kassa, baarer Bestand				550 "
f. Ausstehende Forderung: Obligo auf Herrn Gut für .				200 "
			Gesammtsumme der Aktiva	10175 Fr.

II. Passiva:

a. Brief auf Haus und Garten, Kreditor: Frau Mar .	4000 Fr.
b. Herrn Frei in Baden laut Faktur	650 "
Gesammtsumme der Passiva	4650 Fr.
Nach vorstehendem Inventar betragen die Aktiva	10175 Fr.
dagegen die Passiva	4650 "
Demnach ist das reine Vermögen	5525 Fr.

Das Journal benutzt Schneidermeister Till zugleich als Kassabuch wie folgt:

Seite 1.

Journal und Kassabuch, begonnen den 1. Januar 1854.

Januar.				Kassa-Einnahmen. Fr.	Kassa-Ausgaben. Fr.
1.	Hatte baar in der Kasse			550	
"	Gab in die Haushaltung				20
2.	Verkaufte an J. Gut gegen baar 6 Ellen schwarzes Tuch à 8 Fr.			48	
4.	Verkaufte an Fr. Mar 20 Ellen Leinwand à $1^1/_5$ Fr.	Fr.	24		
5.	Gab in den Beruf 40 Ellen Futterzeug à 35 Ct.				
6.	Lieferte an Jb. Gut eine ganze Kleidung (zu spezifiziren)	"	35		
7.	Lieferte Herrn Frei eine neue Weste	"	5		
"	In die Haushaltung				20
8.	Lieferte Herrn Meier in H. einen Mantel: Arbeit	"	24		
	Gab dazu 11 Ellen braunes Tuch à 8 Fr. . .	"	88		
	Zuthaten (zu spezifiziren)	"	15		
12.	Empfing v. Hr. Meier in H. 100 Ellen Barchent à 30 Ct.	"	30		
14.	In die Haushaltung				20
15.	Dem Herrn Meier in H. eine Weste	"	5		
18.	Dem Herrn Kreis ein Ueberrock	"	19		
19.	An Frau Bär 25 Ellen Leinwand à $1^1/_5$ Fr.; baar			30	
21.	Herrn Kreis Rock und Hosen; zahlt			17	
24.	In die Haushaltung				25
26.	Herrn Schneider Ost 8 Ellen schwarzes Tuch à 8 Fr.	"	64		
27.	" " " 20 " " " à $7^3/_4$ "				
	an baar			100	
	Rest .	"	55		
"	Herrn Kunz 6 Ellen braunes Tuch à 8 Fr. . .	"	48		
28.	" " 2 Westen, zahlt baar			10	
29.	Zahlte Herrn Frei in Baden für seine Faktur .				650
"	Verkaufte Herrn Kunz 3 Saum Wein à 40 Fr., baar			120	
30.	Zahlte dem Gesellen den Monatlohn				25
"	Löste für 2 Tansen Kartoffeln à $5^1/_2$ Fr. . . .			11	
31.	Verkauft an Fr. Bär 20 Ellen Barchent à 35 Ct.	"	7		
	In die Haushaltung verbraucht 1 Tanse Kartoffeln			4	4
	" " " " 20 Maß Wein .			6	6
	Summa	Fr.	419	896	770
				770	

Der Kassasaldo zu Ende Januar 1854 ist also Fr. 126.

Die bezüglichen Posten aus Inventar und Journal trägt Herr Till ins Hauptbuch und ins Waarenbuch in folgender Weise ein:

Hauptbuch.

Seite 3. **Soll.** **Jakob Gut in hier.** **Haben.**

1854. Jan.		*	Fr.	1854. Jan.		*	Fr.
1.	Laut Obligo, siehe Inventar		200	2.	Zahlt 6 Ellen schwarzes Tuch à 8 Fr.	1	48
2.	6 Ellen schwarz. Tuch à 8 Fr.	1	48				
6.	Eine neue Kleidung (zu spezifiziren)	1	35				

Seite 4. **Soll.** **Frau Mar in hier.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.		Fr.
4.	Für 20 Ell. Leinw. à $1^1/_5$ Fr.	1	24	1.	Laut Schuldbrief auf Haus u. Garten, mit Martini zu verzinsen	4000

Seite 5. **Soll.** **Herr Frei in Baden.** **Haben.**

1354. Jan			Fr.	1854. Jan.		Fr.
7.	Für eine neue Weste .	1	5	1.	Laut Faktur, siehe Inventar	650
29.	Erhielt für seine Faktur	1	650			

Seite 6. **Soll.** **Herr Meier in H.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
8.	Für einen Mantel, Arbeit	1	24	12.	Sandte 100 Ellen Barchent à 30 Ct.	1	30
"	Dazu 11 Ellen braunes Tuch à 8 Fr.	1	88				
"	Zuthaten (zu spezifiziren)	1	15				
15.	Für eine neue Weste .	1	5				

Seite 7. **Soll.** **Herr Kreis in hier.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
18.	Für einen Ueberrock (zu spezifiziren)	1	19	21.	Zahlt für Rock und Hosen	1	17
21.	Rock u. Hosen (zu spezifiz.)	1	17				

Seite 8. **Soll.** **Frau Bär in hier.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
19.	Für 25 Ell. Leinw. à $1^1/_5$ Fr.	1	30	19.	Zahlt 25 Ellen Leinwand à $1^1/_5$ Fr.	1	30
31.	" 20 " Barchent à 35 Ct.	1	7				

* Hieher kommt die Seite des Journals, überhaupt immer die Seite des Buchs, aus welchem man den Eintrag macht.

Seite 9. **Soll.** **Schneider Ost in hier.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
26.	Für 8 Ell. schw. Tuch à 8 Fr.	1	64	27.	Zahlt an die 20 Ellen .	1	100
27.	= 20 = = = à 7¾ =	1	155				

Seite 10. **Soll.** **Herr Kunz in hier.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
27.	Erhielt 6 Ellen braun. Tuch			27.	Zahlt 2 Westen . . .	1	10
	à 8 Fr.	1	48	29.	= 3 Saum Wein .	1	120
"	Erhielt 2 Westen à 5 Fr.	1	10				
29.	= 3 Saum Wein à 40 Fr.	1	120				

Seite 11. **Soll.** **Haushaltung.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
1.	Wochengeld	1	20	30.	Zahlte in d. Kasse für 2 Tan-		
7.	=	1	20		sen Kartoffeln à 5½ Fr.	1	11
14.	=	1	20				
24.	=	1	25				
30.	Für 2 Tans. Kart. à 5½ Fr.	1	11				
31.	Verbraucht 1 Tanse . .	1	4				
"	= 20 Maß Wein	1	6				

Seite 12. **Soll.** **N. N., Arbeiter.** **Haben.**

1854. Jan.			Fr.	1854. Jan.			Fr.
30.	Empfing als Monatlohn	1	25	30.	Als Monatlohn . . .	1	25

Waaren- und Produktenbuch.

Seite 1. **Eingang (Soll).** **Schwarzes Tuch. A.L.** **Ausgang (Haben).**

1854, Jan.	Ellen		Fr.	1854. Jan.	Ellen			Fr.
1.	200	Nr. 1 à 6½ Fr., siehe Inventar . . .	1300	2.	6	An Jb. Gut à 8 Fr.	1	48
				26.	8	= Schneid. Ost à 8 Fr.	1	64
				27.	20	= = = à 7¾ =	1	155

Seite 2. **Eingang (Soll).** **Braunes Tuch. M.F.** **Ausgang (Haben).**

1854. Jan.	Ellen		Fr.	1854. Jan.	Ellen			Fr.
1.	54	à 7 Fr., siehe Inventar	378	8.	11	Herr Meier in H. à 8 Fr.	1	88
				27.	6	= Kunz à 8 Fr. .	1	48

Seite 3. Eingang (Soll). Leinwand. Ausgang (Haben).

1854. Jan.	Ellen			Fr.	1854. Jan.	Ellen				Fr.
1.	70	à 1 Fr., siehe Inventar		70	4.	20	Frau Mar à $1\frac{1}{5}$ Fr.	1		24
					19.	25	= Bär à $1\frac{1}{5}$ Fr.	1		30

Seite 4. Eingang (Soll). Futterzeug. Ausgang (Haben).

1854. Jan.	Ellen			Fr.	1854. Jan.	Ellen				Fr.
1.	160	à 25 Ct., siehe Inventar		40	5.	40	à 35 Ct. in den Beruf	1		14

Seite 5. Eingang (Soll). Barchent. Ausgang (Haben).

1854. Jan.	Ellen			Fr.	1854 Jan.	Ellen				Fr.
12.	100	à 30 Ct. v. Herrn Meier gekauft	1	30	31.	20	à 35 Ct. an Frau Bär	1		7

Seite 6. Eingang (Soll). Wein. Ausgang (Haben).

1854 Jan.	Maß			Fr.	1854. Jan.	Maß				Fr.
1.	800	à 30 Ct., siehe Inventar		240	29.	300	Herrn Kunz à 40 Ct.	1		120
					31.	20	Im Haushalt verbraucht	1		6

Seite 7. Eingang (Soll). Kartoffeln. Ausgang (Haben).

1854. Jan.	Lanf.			Fr.	4854. Jan.	Lanf.				Fr.
2.	12	à 4 Fr., siehe Inventar		48	30.	2	Verkauft à $5\frac{1}{2}$ Fr.	1		11
					30.	1	Im Haushalt verbraucht	1		4

Sowohl im Kassabuch, das vom Journal meist gesondert gehalten wird, als im Hauptbuch und Waarenbuch werden gewöhnlich je zwei Blattseiten neben einander für Soll und Haben verwendet. Hier wurde der kürzern Darstellungsweise wegen die obige Einrichtung befolgt. Im Kassabuch werden oft auch bei den Einnahmen und Ausgaben (Soll und Haben) noch besondere Rubriken gemacht, um alle Einnahmen für den und den Artikel, ebenso die Ausgaben besonders zu kennen.

Eine Hauptsache ist nun die Rechnung über das Geschäft für einen bestimmten Zeitraum, gewöhnlich ein Jahr. Als Beispiel folge hier die Rechnung für einen Monat (Januar). Die Posten in der Betriebsrechnung sind der Reihe nach aus dem Hauptbuch und dem Waarenbuch gezogen.

I. Betriebsrechnung (Monat Januar 1854).

Hauptbuch.	Eingegangen.		Noch ausstehend.		Ausgegeben.	Noch schuldig.	Waarenbuch.	Ankaufssumme der eingegangenen Waaren.	Verkaufssumme der ausgegebenen Waaren.	Einkaufssumme der noch vorhandenen Waaren.	Einkaufssumme der ausgegangenen Waaren.
	Für Arbeit und kleinere Zuthaten.	Für verkaufte Waaren.	Für Arbeit und kleinere Zuthaten.	Für verkaufte Waaren.							
Seite.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Seite.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
3.	.	48	35	.	.	.	1.	1300	267	1079	221
4.	.	.	.	24	.	4000	2.	378	136	259	119
5.	.	.	5	.	650	.	3.	70	54	25	45
6.	.	.	44	88	.	30	4.	40	(14)*	30	10
7.	27	.	19	.	.	.	5.	30	7	24	6
8.	.	30	.	7	.	.	6.	240	126	144	96
9.	.	100	.	119	.	.	7.	48	15	36	12
10.	10	120	.	48	.	.					
11.	.	21	.	.	95	.					
12.	.	.	.	.	25	.					
			Obligo. 200								
3.	.	.			.	.					
Sum.	27	319	103	286	770	4030		2106	605	1597	509
			200								

Kontrollen für die Betriebsrechnung:

1) Die im Rechnungszeitraum eingegangenen Summen betragen (27 + 319) Fr. + 550 Fr. als Kassabestand vom 1. Januar; das macht 896 Fr. Gesammteinnahme, übereinstimmend wie im Kassabuch.

2) Die Einnahmen mit den ausstehenden Forderungen für verkaufte Waaren sind nach dem Obigen (319 + 286) Fr. = 605 Fr., übereinstimmend mit der drittletzten Rubrik.

3) Die Gesammtausgaben von 770 Fr. stimmen mit dem Kassabuch überein.

4) Die zwei letzten Rubriken geben (1597 + 509) Fr. = 2106 Fr. als Summe der viertletzten Rubrik.

5) Für die Passiven von 4030 Fr. ist hier eine weitere Kontrolle nicht nöthig, da sie zu leicht zu übersehen sind. Für eine ausgedehntere Rechnung wäre indessen leicht für ähnliche Kontrollen wie die vorigen zu sorgen.

6) Zieht man von der Nichtbaarsumme im Journal, betragend 419 Fr., ab die noch für Eingekauftes schuldigen 30 Fr., ferner die noch für Verkauftes ausstehenden 286 Fr., so bleiben 103 Fr. als für Arbeit ꝛc. noch ausstehend, siehe dritte Rubrik. Wie diese letztere Kontrolle bei einer umfangreichern Rechnung sich ändern müßte, ist leicht zu erkennen.

---

* Das Aequivalent hievon liegt in den Summen für Arbeit und kleinere Zuthaten ꝛc.

II. Schlußrechnung.

(Stets aus den voraus ermittelten Aktiven und Passiven zu ziehen.)

Besitz am 31. Januar 1854:	Fr.
1. Der Kassasaldo zu Ende Jan.	126
2. Noch vorhandene Waaren, siehe Betriebsrechnung . .	1597
3. Noch ausstehende Forderungen, siehe Betriebsrechnung	589
4. Unverändert an Liegenschaften und Fahrhabe, siehe Inventar	7349
Summa	9661
Hievon ab die Schulden . .	4030
Bleibt als reines Vermögen	5631
Dasjenige vor Januar war .	5525
Also der Vorschlag . .	Fr. 106

Schulden am 31. Januar 1854:	Fr.
Dieselben betragen, siehe Betriebsrechnung	4030

Der unten stehende Vorschlag läßt sich auch so kontrolliren:

Der Gewinn auf Waaren, siehe Betriebsrechnung, ist Fr. (605 — 509) =	Fr.	96
Die Forderungen f. Arbeit ꝛc. Fr. (27 + 103) =	=	130
Summa	Fr.	226
Die Ausgabe für Familie u. Arb., Hauptb. S. 11 u. 12	=	120
Bleibt Vorschlag . .	Fr.	106

Der Lehrer sieht sehr leicht ein, inwiefern sich die Rechnungsführung ändern müßte, wenn sie sich auf einen längern Zeitraum, etwa auf ein Jahr, oder auf ein komplizirteres oder ein von obigem ganz verschiedenes Geschäft beziehen würde. Für unsern Zweck mag das gegebene Beispiel über den Haushalt und den Geschäftsverkehr eines Handwerkers genügen. Der Lehrer wird die Schüler über ganz verschiedene Geschäfte Bücher und Rechnungen in ähnlichem Sinne wie oben führen lassen; er kann auch für die einzelnen Schüler gerade dasjenige auswählen, wofür sie sich durch ihre Berufswahl bereits entschieden haben mögen, z. B. Verwaltung eines Bauern-, Handels-, Fabrikationswesens ꝛc. Nur verlange er übersichtlich klare und richtige Geschäfts- und Rechnungsführung. Die Schüler werden hier um so mehr im Stande sein, sichere Kontrollen für ihre Rechnungsführung zu finden, je mehr sie in ihrem frühern Rechnungsunterricht zur sichern Verifikation der Resultate ihrer Aufgaben angeleitet worden sind.

Beim landwirthschaftlichen Rechnungswesen, das der Lehrer hauptsächlich auch wird berücksichtigen müssen, wird die Wirthschaft am zweckmäßigsten in einzelne Zweige zerfällt (z. B. A. Viehzucht, B. Pflanzenbau, nämlich 1) Wiesenbau, 2) Ackerbau, 3) Weinbau, 4) Obstbau, 5) Waldbau ꝛc. je nach Art und Umfang des zu verwaltenden landwirthschaftlichen Gewerbes) und für jeden Zweig wird ein besonderer Konto, in Unkosten und Ertrag sich theilend, geführt. Die Gesammtrechnung zerfällt dann in einzelne Verbindungsrechnungen, z. B. a. Kassarechnung, b. Naturalien- und Materialienvorrathsrechnung, c. Rechnung über das Vieh, d. Boden-, Gebäude- und Geschirrrechnung, e. Eigenthümersrechnung ꝛc.

Fünfte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht

auf der vierten Schulstufe;

Bürgerliche Unterweisungsschule, Zivilschule.

Zehntes und elftes Schuljahr.

Schüler vom fünfzehnten bis und mit dem siebenzehnten Altersjahr.

§ 76.

Aufgabe.

Dieselbe besteht nach den allgemeinen Betrachtungen der ersten Abtheilung in Rechnungen für das allgemein bürgerliche Leben, nämlich 1) Rechnungen über Familiengutsverwaltung: Vormundschaftsrechnungen ꝛc., 2) Rechnungen über öffentliche Güter: Gemeinds-, Kirchen-, Schul-, Armengutsrechnungen ꝛc. nebst Hinweisung auf die Grundzüge der Staatsrechnung (Büdget).

Anmerkung. Es ist wohl besser, den hier zu behandelnden Stoff ungetheilt und nicht nach Jahrkursen gesondert folgen zu lassen, da diese Schulstufe eben noch nicht geschaffen, also auch ihre Organisation noch nicht bestimmt ist. Der Lehrer wird indessen für besondere Verhältnisse das Passende hier leicht auszuwählen wissen. Hoffentlich wird es auch nicht mehr allzulange dauern, bis diese Schulorganisation und der betreffende Unterricht für unsere Volksschule eine bestimmte gesetzliche Regulirung erhalten. Möchte auch das Nachfolgende zur bäldern Erreichung dieses Zieles einigermaßen beitragen!

§ 77.

Ueber die Stellung von Vormundschafts- und öffentlichen Gutsrechnungen. (Fortsetzung der Buch- und Rechnungsführung fürs staatlich bürgerliche Leben.)

1. Einleitung.

Das Buchhaltungs- und Rechnungswesen, das wir zu Ende der vorigen Schulstufe betrachteten, war eine Anleitung, wie der Einzelne seine

eigene Haus- und Berufswirthschaft mit Ordnung und sicherm Ueberblick verwalten könne. Hier folgt uns nun die Betrachtung derjenigen Verwaltungsrechnungen, die mehr dem öffentlichen als dem Privatleben angehören und die also von bestimmten Behörden überwacht werden. Dahin gehört:

1. Die unter obrigkeitlicher Aufsicht stehende Verwaltung von Privatgütern. Dieselbe tritt mit der ordentlichen oder gesetzlichen Vormundschaft* des Staates ein und unter dieselbe gehören z. B. im Kanton Zürich gemäß den Bestimmungen des privatrechtlichen Gesetzbuches a) die Minderjährigen (insofern dieselben nicht unter der Familiengewalt ihres ehelichen Vaters stehen); b) die erklärten Verschwender; c) die zu Ketten oder Zuchthaus verurtheilten Sträflinge; d) Personen, welche wegen Geisteskrankheit oder Leibesgebrechen dauernd außer Stande sind, ihr Vermögen selbst zu besorgen; e) die Ehefrauen der Falliten, so weit sie eines Schutzes bedürfen; f) Personen, welche sich freiwillig unter öffentliche Vormundschaft begeben haben; g) die unbekannt Abwesenden. Dem Vormund ist nun gesetzlich die Verwaltung des Vermögens des Bevormundeten anvertraut; er wird vorläufig von dem Gemeindrath und definitiv von der Oberbehörde (dem Bezirksrathe) bestellt. Er hat spätestens alle zwei Jahre zu Handen des Gemeind- und Bezirksrathes Rechnung über das verwaltete Gut abzulegen.

2. Die Verwaltung von Gemeinds-, Staats- und andern öffentlichen Gütern. Im Kanton Zürich bestehen über die Bestimmung und die Verwaltung der Gemeindegüter im Allgemeinen folgende gesetzliche Bestimmungen. Die Gemeindegüter sind ausschließliches Eigenthum der Bürgergemeinden und zunächst dazu bestimmt, die öffentlichen Bedürfnisse des Orts und der Gemeinde zu befriedigen. Aus ihrem Ertrage vornämlich werden die hierauf bezüglichen Ausgaben bestritten. Als Ersatz für die Leistungen, welche die Gemeindegüter auch für die Nichtbürger, die Niedergelassenen, zu bringen haben, bezahlen diese jährlich an dieselben die sogenannte Niederlassungsgebühr. Das Stammgut muß ungeschmälert erhalten und darf für die laufenden Ausgaben nicht verwendet werden. Gewisse Einnahmen, wie die Einkaufs- und Einheirathungsgebühren, allfällige Legate

* Die speziellen Erläuterungen über diese gesetzlichen Bestimmungen, so wie über die nachfolgenden betreffend die Verwaltung der öffentlichen Güter gehören in den allgemein bürgerlichen Unterricht in der Zivilschule. Das Einzelne hat sich natürlich nach den Gesetzen je eines Landes oder Ortes zu richten. Wir können uns hier nur auf den Kanton Zürich beziehen.

und Schenkungen sind ebenfalls zum Stammkapital zu schlagen, worauf bei Abschluß der Rechnung und bei Berechnung des Vor- oder Rückschlages gehörig Rücksicht zu nehmen ist. Die Einheirathungsgebühren (Braut- und Bechergeld) betragen in allen Gemeinden dieselbe Summe (Landesfremde haben einen höhern Beitrag zu leisten); die Einkaufs- und Niederlassungsgebühren hingegen sind verschieden und werden in dem sogenannten Einzugsbriefe, den jede Gemeinde erhält, vom Regierungsrathe bestimmt; in dem Einzugsbriefe ist ebenso festgesetzt, nach welchem Maßstabe alle diese Gebühren unter die verschiedenen Gemeindegüter vertheilt werden sollen. Nach ihrer Bestimmung sind die Gemeindegüter ausgeschieden in Kirchen-, Armen-, Schul- und Gemeindegut. (Eine politische Gemeinde theilt sich oft in einzelne Zivilgemeinden, Wachten; diese haben gewöhnlich noch ein eigenes Gemeindegut, Zivilgut.) — Aus dem Kirchengute, das wie das Armengut in Verwaltung der kirchlichen Gemeindsbehörde (Stillstand) liegt, welche aus ihrer Mitte eigene Verwalter (Kirchen- und Armengutsverwalter) bezeichnet, werden bestritten die kirchlichen Ausgaben: für die Unterhaltung des Gottesdienstes, die Erbauung und Unterhaltung der Kirchen, die Anlegung von Begräbnißplätzen, die Besoldung des Sigristen und Vorsingers. Die ordentlichen Einnahmen dieses Gutes bestehen hauptsächlich in dem Ertrage der Kapitalien, etwaigen Grundzinsen, dem Antheile an den Einzugs- und Niederlassungsgebühren. — Die Ausgaben des Armengutes betreffen verschiedene Hülfeleistungen: an Kranke, Alte und Gebrechliche, an arme Waisen und hülflose junge Leute (jedoch nur an bürgerlich Angehörige; dürftige Niedergelassene werden aus ihrem Heimatsarmengute unterstützt); seine ordentlichen Einnahmen bilden: Ertrag der Kapitalien, Beiträge des Staates, Antheil an den Einzugsgebühren, Bußen der Gemeindepolizei, Antheil an der Hundeabgabe, Rückerstattungen (von früher Unterstützten), Geschenke, Kirchensteuern (freiwillige oder gesetzliche). — Das Schulgut wird unter näherer Aufsicht der Gemeindsschulpflege durch den von der Schulgemeinde gewählten Schulgutsverwalter verwaltet. Es bestreitet die Ausgaben für Erbauung und Unterhaltung der Schulen, ihre Beheizung, die allgemeinen Lehrmittel, die Lehrerbesoldung; seine ordentlichen Einnahmen sind: Kapitalzinse, Einzugsgebühren, Hochzeitgaben, Legate und Geschenke, Schulsteuern, Schulgelder, Schulbußen, Antheil an den Niederlassungsgebühren, Staatsbeiträge. — Das Gemeindegut (resp. Zivilgut) wird durch den Gemeindrath (resp. Zivilgemeindrath) verwaltet, der aus seiner Mitte einen besondern Verwalter (Gemeindgutsverwalter, Zivilgutsverw., Seckelmeister) bestellt.

Seine Einnahmen bestehen hauptsächlich in dem Ertrage der Liegenschaften (Gebäulichkeiten und nicht selten Waldungen), der Kapitalien, der sogenannten Ehehaften (Tavernen- und Metzgrechtsamen), den Grundzinsen, Antheil an den Einkaufs- und Niederlassungsgebühren, Gemeindesteuern; dagegen hat es zu bestreiten die Ausgaben für Entschädigung der Beamten und Bediensteten der Gemeinde, für die Löschanstalten, für das Straßenwesen, für die Gemeindebrunnen, die Errichtung und Unterhaltung von Schießstätten und Exerzirplätzen, für die Requisitionsfuhren (für Militärzwecke) und Armenfuhren, für die Gesundheitspolizei (Beitrag an die Hebammenbesoldungen), für die Eindämmung und Reinigung der Gewässer, für die Tag- und Nachtwache u. s. w. Stehende Titel in den Gemeinderechnungen sind vielorts auch die Servitutberechtigungen oder Servitutbelastungen (herrührend von der Ausscheidung der Gemeindegüter, wobei das eine gegen das andere noch besondere Verpflichtungen übernommen hat). — Die Gemeinden sind befugt, allfällige Vorschläge des einen Gutes im Nutzen eines andern Gemeindegutes, das solche Zuschüsse nothwendig hat, zu verwenden, insofern es während eines Zeitraums von zehn Jahren keine Rückschläge gemacht hat; ergibt sich hingegen ein Rückschlag, so ist derselbe durch eine Gemeindesteuer zu decken, an welche, mit Ausnahme der Armensteuern, auch die Niedergelassenen im gleichen Maße wie die Gemeindebürger beizutragen haben. Sämmtliche Schuldtitel der Gemeindegüter sind in dem Gemeindsarchive (Schirmlade) sicher aufzubewahren. Die verwaltenden Behörden sind der Gemeinde für ihre dießfälligen Verrichtungen verantwortlich; jeder Gutsverwalter hat annehmbare Bürgschaft zu leisten; der Bürgschaftsschein ist ebenfalls in der Schirmlade sorgfältig aufzubehalten. — Ueber die Verwaltung der Gemeindegüter haben die Gemeindsbehörden, beziehungsweise die Verwalter alljährlich der Bürgergemeinde Rechnung abzulegen; dieselbe ist mit dem 31. Dezember abzuschließen und in Doppel zu stellen. Ein Bürgerausschuß (Rechnungsprüfungskommission) prüft dieselbe und erstattet hierüber, nachdem die Rechnung vierzehn Tage allen Berechtigten zur Einsicht offen gelegen, an die Bürgerversammlung schriftlichen Bericht. Die dießfälligen Bemerkungen und Ausstellungen werden der Rechnung beigefügt (Abschied). Dieselbe ist so verabschiedet spätestens bis Ende Mai dem Bezirksrathe zur letztinstanzlichen Verabscheidung einzusenden. — Die öffentlichen Gutsrechnungen werden im Gemeindsarchiv aufbewahrt, das Doppel gehört dem Rechnungsgeber. Gemeinsame Güter, die hie und da Gemeinden zu besondern Zwecken besitzen (wie Freischulfonds, Stiftungen ꝛc.) werden

von den betreffenden Gemeindsbehörden ähnlich den übrigen Gemeindegütern verwaltet.

Ueber das Rechnungswesen der Staatsgüter wird im folgenden Paragraphen kurz eingetreten.

Die Rechnungen über die Güter von öffentlichen Anstalten, Korporationen ꝛc. werden nach ähnlichen Grundsätzen geführt wie die der vorausgenannten Güter, so daß die Behandlung von Rechnungen für besondere Anstalts- und Korporationsgüter ꝛc. hier nicht mehr erforderlich ist.

II. Ueber die Stellung von Gutsrechnungen im Allgemeinen.

Nach dem Vorausgegangenen haben die Vormünder (Vögte) und Verwalter von öffentlichen Gütern in bestimmten Zeiträumen Rechnung über die ihnen anvertrauten Verwaltungen abzulegen. Diese Rechnungen sollen einerseits eine genaue und klare Uebersicht über die Größe und die Bestandtheile des betreffenden Gutes gewähren, so wie über die Veränderungen desselben in dem Zeitraume, den die Rechnung umfaßt; anderseits sollen sie den Beweis für gute und getreue Verwaltung liefern.

A. Eine solche Rechnung umfaßt daher:

1. Eine kurze genaue Darstellung des Gutes beim Anfang des Rechnungszeitraums.
2. Eine möglichst klare Darstellung der Veränderungen des Gutes im Laufe der Rechnungsperiode.
3. Einen genauen Nachweis des Gutsbestandes am Schluß des Zeitraums, den die Rechnung umfaßt.

Ein bloßes Verzeichnen und Vergleichen der Einnahmen und Ausgaben, zumal nur derer in baarem Gelde, reicht dazu keineswegs aus. Der größere oder geringere Betrag des eingenommenen und ausgegebenen oder beim Schluß der Rechnung vorhandenen baaren Geldes läßt keinen Schluß auf Gang und Stand des Gutes machen. Die Baarschaft kann sich vermehren und das Gut gleichzeitig sich vermindern, und umgekehrt können die Baarausgaben die Baareinnahmen übersteigen und das Gut sich zugleich vermehrt haben. Bestimmte Fälle hiefür können leicht gefunden werden. — So zeigt ein Kassabuch weder die Größe und die Bestandtheile des Gutes noch die wesentlichste Veränderung desselben, Vorschlag oder Rückschlag. — Dagegen ist die genaue Führung eines Kassabuchs für den Verwalter selbst unerläßlich. Es gibt ihm ein solches jederzeit den besten Aufschluß über den wichtigsten Verkehr, den Verkehr mit baarem Geld; er sieht daraus, wie

viel und wofür er eingenommen und ausgegeben und ob der Kassabestand mit dem Kassabuch übereinstimmt; es ist ihm daher das Kassabuch eine Hauptkontrolle für die zu stellende Rechnung. Wir wollen nun die drei genannten Abtheilungen einer Gutsrechnung näher ins Auge fassen.

a. Die Darstellung des Bestandes des Gutes beim Anfang des Rechnungszeitraums. Bei der ersten Rechnung, die über die Verwaltung eines Gutes gestellt wird (z. B. der ersten Rechnung bei eingetretener Vormundschaft), gründet sich diese Vorführung des Vermögens auf das Inventar, d. i. wie wir auf der vorigen Schulstufe schon gesehen, das ausführliche Verzeichniß des gesammten Besitzes oder der Aktiva, so wie der auf dem Besitze haftenden Schulden oder der Passiva. In dem Inventar sind die verschiedenen Bestandtheile des Besitzes nach besondern Titeln ausgeschieden, als: Liegenschaften, Fahrhabe, Handels- und Gewerbsgegenstände, zinstragende Kapitalien, baares Geld, eingehende Forderungen und Guthaben u. s. w. Durch diese Anordnung wird Gleichartiges zusammengebracht, Ungleichartiges aus einander gehalten. Im „Zusammenzug der Aktiven" werden diese Titelsummen zusammengezählt zur „Summe aller Aktiven". Von dieser Summe aller Aktiven werden die Passiven abgezogen und so das reelle Vermögen, oft auch „liquides" genannt, gefunden. In der Rechnung erscheint nun der Nachweis des Vermögensbestandes bloß titelweise, dem Inventar entsprechend und unter Verweisung auf dasselbe. — Bei den folgenden Rechnungen wird die Darstellung des Vermögensbestandes zu Anfang der Rechnungsperiode der nächst vorhergehenden Rechnung entnommen. — Bei der ersten Rechnung über ein neu entstandenes Gut, z. B. einen Freischulfond, wird im Eingange der Rechnung auf die Entstehung oder Gründung desselben hingewiesen.

Der Vermögensbestand beim Anfang des Rechnungszeitraums bildet immer den ersten Titel der Einnahmen. Dabei wird die Totalsumme in der Summenrubrik rechts (siehe unten das Beispiel) als „Vermögensbestand laut Inventar" oder „Uebertrag aus der letzten Rechnung" eingetragen. Die einzelnen Titel stehen postenweise in der Summandenrubrik links nebst der Probesumme (siehe unten). Die Passiven werden von den Aktiven abgezogen und so das reelle Vermögen dargestellt.

b. Die Darstellung der Veränderungen des Gutes im Laufe des Rechnungszeitraums durch die stattgehabten Einnahmen und Ausgaben wie durch anderweitige Vermehrungen oder Verminderungen des Gutes. Dieser zweite Theil der Rechnung bezieht sich nicht

nur auf den Baarverkehr, wie dieß mit dem Kassabuch der Fall ist, sondern er umfaßt alle Vorfälle, durch welche das Gut vermehrt oder vermindert wird. Die richtige Einführung jener Art Vermehrungen oder Verminderungen des Guts, die keinem Baarverkehr entsprechen, bietet unstreitig die größten Schwierigkeiten für Alle, die nicht genau damit vertraut sind. Wir werden daher über einzelne dieser Fälle weiter unten speziell und unter Anführung von Beispielen noch eintreten, nachdem wir mit dem Allgemeinen zu Ende sein werden. — Die verschiedenen, das Gut in seinem Bestande ändernden Vorfälle werden nicht bloß in Einnahme oder Vermehrung und Ausgabe oder Verminderung eingetheilt. Eine solche Zusammenstellung würde die Uebersicht und Prüfung sehr erschweren und die erforderliche Klarheit und Ueberschaulichkeit durchaus nicht bieten. Einnahmen wie Ausgaben werden wieder nach verschiedenen Titeln getheilt, wodurch Gleichartiges vereinigt, Ungleichartiges aus einander gehalten wird. Die verschiedenen Einnahmsquellen und Ausgabenrichtungen treten so unter besondern Titeln in entsprechender Weise hervor. (Die Theilung nach Titeln mag ausbleiben in Rechnungen, bei denen Einnahmen und Ausgaben nur in wenigen Posten bestehen.)

Die Titel sind bei den Rechnungen über verschiedene Güter nach Zahl und Namen natürlich auch verschieden. Indessen erscheint, wie schon bemerkt, bei jeder Rechnung (ausgenommen die erste eines neu entstandenen Gutes) der „Uebertrag aus letzter Rechnung" oder der „Vermögensbestand laut Inventar" als erster Titel der Einnahmen, und bei jedem Gut, das zinstragende Kapitalien besitzt, erscheinen „verfallene Zinse von Kapitalien" als ein weiterer Titel der Einnahmen. — Die Summen der verschiedenen Titel werden am Schluß der Einnahmen wie der Ausgaben im „Zusammenzug aller Einnahmen" oder im „Zusammenzug aller Ausgaben" vereinigt zur „Summe aller Einnahmen" und zur „Summe aller Ausgaben". Nach dem Zusammenzug aller Ausgaben folgt der „Rechnungsabschluß" oder die „Abrechnung", wobei man von der Summe aller Einnahmen die Summe aller Ausgaben abzieht.

c. Nachweis des Gutsbestandes am Schlusse des Rechnungszeitraumes. Da in der Summe aller Einnahmen der Bestand des Gutes zu Anfang des Rechnungszeitraums neben allen Einnahmen und Vermehrungen des Gutes aus dem Laufe dieses Zeitraumes inbegriffen ist, so umfaßt der Rest, der sich aus dem Rechnungsabschluß ergibt, den ganzen Betrag des Gutes, den dasselbe am Schluß der Rechnung haben muß. Dieser Rest oder der Guts-

bestand am Ende der Rechnungsperiode, „Rechnungsschuld" genannt, muß nun von dem Verwalter gezeigt werden, d. h. er muß ihn in seinen nunmehrigen Bestandtheilen, als: Liegenschaften, Fahrhabe, zinstragenden Kapitalien, Guthaben, Restanzen ꝛc. ꝛc. nachweisen. Dieser Nachweis des Gutes in seinem Bestande am Schluß der Rechnung heißt „Zeiger", etwa auch „Zahler". (Der Zeiger ist dann wieder der Uebertrag in die folgende Rechnung.) Was an anderweitigen Titeln im Zeiger nicht nachgewiesen werden kann, das muß an Baarschaft vorhanden sein. Das baare Geld muß immer die übrigen Titel zum Betrag der Rechnungsschuld ergänzen. Diese Baarsumme muß dem Kassabestand genau entsprechen, wenn die Rechnung richtig gestellt ist.

Von dem im Rechnungsabschluß und im Zeiger nachgewiesenen Besitz oder der Summe der Aktiven sind nun die allfälligen Passiven noch abzuziehen, um die Größe des reellen oder liquiden Vermögens am Schluß der Rechnung zu finden.

Anmerkung. Man fand sonst mitunter und findet vielleicht noch Rechnungen, in denen der Zeiger mit Ausschluß von Baarschaft größer ist als die Rechnungsschuld und dabei die Bemerkung: »Somit zeigt der Verwalter zu viel und sollen ihm ersetzt werden Frkn. ..... (gleich der Differenz zwischen dem Zeiger und der Rechnungsschuld)«. Diese Erscheinung beruht jedesmal auf einem Formfehler. Sie rührt daher, daß der Verwalter mehr baares Geld für das Gut ausgelegt hat, als er besaß, z. B. aus dem eigenen Sack Zuschüsse machte. Diese Mehrausgabe ist ohne einen Zwischenvorfall, ohne das Entlehnen oder »Aufbrechen« von baarem Geld nicht möglich. Man bringt daher dem Hergange entsprechend das Mangelnde der Baarschaft zuerst in Einnahme unter dem Titel »Geldaufbruch«. Die Rechnungsschuld vergrößert sich dadurch um diesen Betrag, der Zeiger entspricht der Rechnungsschuld und der Geldaufbruch wird zur Passivschuld, die das Gut an denjenigen zu bezahlen, resp. zu verzinsen hat, von dem der Betrag des Geldaufbruchs kam.

Unter dem Titel „Rechnungsergebniß" wird endlich der nunmehrige Betrag des reellen Vermögens mit demjenigen vom Schluß der letzten Rechnung verglichen und dadurch die Größe des Vorschlags oder Rückschlags gefunden. — Damit ist die eigentliche Rechnung geschlossen. Es folgt nun die Unterschrift des Verwalters, der Tag des Rechnungsabschlusses (der letzte Tag, den die Rechnung noch umfaßt) und allfällig auch das Datum der Rechnungsstellung (da die Rechnung zur Abgabe vollendet war), welches nach Größe und Bedeutung der Rechnung Wochen, ja Monate (Staatsrechnung) vom erstern abstehen kann.

In einem „Anhange“ werden etwa Besitztheile aufgeführt, die im Uebertrag und im Zeiger nicht als Gutsbestandtheile erscheinen, unveränderliche Aktiven, Gegenstände, über die besondere Rechnung geführt wird u. dgl. Z. B. Pathengeschenke der Bevormundeten, Liegenschaften und Geräthschaften des Schulgutes ꝛc., vorräthige Schreibmaterialien und Lehrmittel für Schulkinder in Schulgutsrechnungen u. s. w.

B. Besprechung einzelner Fälle, die besondere Berücksichtigung verdienen.

1) Die Zinseinnahmen von Kapitalien. Hier ist vor allem zu bemerken, daß nicht nur die eingegangenen oder wirklich bezahlten, sondern alle verfallenen Zinse in Einnahme gebracht werden, daß also von jeder Kapitalpost, insofern sie nicht im Laufe der Rechnungsperiode neu angelegt oder abbezahlt wurde, so viele ganze Zinse in Einnahme gebracht werden, als die Rechnung Jahre umfaßt, also gewöhnlich ein, bei Vogtrechnungen zwei Zinse. Bei abbezahlten Kapitalien sind natürlich so viele Zinse in Einnahme zu bringen, als seit dem letzten in Einnahme gebrachten Zinse verfallen sind, und es können dieß wohl auch Bruchzinse sein. — Bei neu angelegten Kapitalien sind nur die ganzen Zinse in Einnahme zu bringen, die seit Anlegung des Kapitals verfallen sind, und bei neu angekauften so viele ganze als erlaufen sind seit der letzten Verfallzeit, da der Verkäufer noch im Besitz des Schuldtitels war.

Die noch ausstehenden Zinse werden gegenüber den verfallenen nach ihrer Zahl und ihrem Betrag in der zu diesem Zweck geöffneten Rubrik mit der Ueberschrift „Restanzen“ eingetragen und wie die verfallenen am Schluß des Titels summirt. Die Zinsrestanzen machen einen besondern Bestandtheil des Zeigers aus.

Diese Form für Aufnahme der Zinse bietet mehrere Vortheile: sie stellt die Größe des Gutes richtig dar, denn das Gut vergrößert sich von dieser Seite alle Jahre um einen Zins, ob derselbe eingehe oder noch ausstehe; dabei ist sie überschaulich und erleichtert die Einsicht und Prüfung sehr, es kann weniger ein Irrthum stattfinden und so auch weniger Schaden für das Gut oder den Verwalter entstehen. Der Rechnungsprüfer hat um der arithmetischen Richtigkeit der Einnahmen willen bloß die verfallenen Zinse zu berücksichtigen, was sehr leicht und sicher geschehen kann. Daneben liegt ihm die Zahl und der Betrag der ausstehenden Zinse auf einen Blick klar vor Augen. — Wenn dagegen nur die eingegangenen Zinse in Einnahme kämen, so könnte leicht, z. B. durch ein Ver-

sehen in der Jahrzahl der Verfallzeit, ein Zins zu wenig in Einnahme kommen, ohne daß der Fehler so sicher in die Augen fiele; der Rechnungsprüfer müßte zudem Post um Post mit der vorjährigen Rechnung vergleichen und eine Uebersicht der Restanzen wäre gar nicht vorhanden. — Für die Rechnungsgeber endlich erwächst aus dieser Form ebenfalls kein Nachtheil. Werden z. B. bei einer Kapitalpost so viele Zinse bezahlt, als verfallen sind innert dem Rechnungszeitraum, so bleiben die Restanzen sich gleich und die Einnahme in baar stimmt mit der in Rechnung gebrachten überein. Wenn aber weniger Zinse bezahlt werden als verfallen sind, so vermehren sich die Restanzen um diesen Betrag; die Einnahmen laut Rechnung übersteigen zwar die wirklichen Baareinnahmen, aber die Restanzen sind um den gleichen Betrag größer geworden; da aber Baar und Restanzen zusammen wieder den Betrag der Einnahmen ausmachen, so muß im „Zeiger" nicht mehr Baarschaft erscheinen, als wirklich eingegangen ist. — Werden aber mehr Zinse bezahlt, als im Rechnungszeitraum erlaufen sind, so vermindern sich die Restanzen um den gleichen Betrag und der Verwalter hat diesen Minderwerth der Restanzen durch das entsprechende Mehr in Baar zu ergänzen im Zeiger, wie es ihm wirklich auch eingegangen ist.

2) Einnahmen an anderweitigen Zinsen und Bezug verfallener Gebühren. Wie bei den zinstragenden Kapitalien die volle Summe der verfallenen Zinse in Einnahme kommt, so soll auch bei andern Einnahmsquellen, als Grundzinsen, Mieth- und Pachtzinsen und anderweitigem Ertrag von Liegenschaften, bei Steuern, Schullöhnen und andern gesetzlichen Gebühren der volle Betrag des Guthabens, also mit Inbegriff des noch nicht Eingegangenen, in Einnahme gebracht werden. Der nicht eingegangene Theil kommt als Restanz in den Zeiger, wodurch die unter diesem Titel eingegangene verfügbare Einnahme auf den Betrag der Baareinnahme zurückgeführt, das über die Geldeinnahme zu viel in Rechnung gebrachte ausgeglichen wird. — Wenn aber unter den Ausständen sich Posten finden, die nie eingehen werden (also verloren sind), so werden diese Posten nicht in die Restanzen geschrieben, sondern (unter „Allerlei") in Ausgabe gebracht unter der Form: „An . . . . . verloren". — Dadurch wird ein unnöthiges Nachschleppen unerhältlicher Ausstände vermieden und durch die Aufnahme der betreffenden Posten in die Ausgaben wird die Einnahme auf die (an baar erhältlichen Restanzen) nachweisbare Größe zurückgeführt. Dabei ist wohl zu beachten, daß Posten, welche als verloren in die Ausgaben gebracht worden sind, nicht mehr als Restanzen im Zeiger

erscheinen dürfen; das Gut würde dadurch um den Betrag derselben geschmälert werden, wie leicht einzusehen ist.

In Beziehung auf die Form des Restanzennachweises bemerken wir noch, daß, wenn die Einnahmen spezifizirt aufgenommen werden, wie z. B. bei Zinsen aller Art, man auch die Restanzen auf dem gleichen Blatte spezifizirt aufführt, addirt und in den Zeiger nur die Summe unter Verweisung auf die betreffende Seite aufnimmt; wenn aber die Einnahme in ihrem Gesammtbetrag aufgenommen wird, wie bei Steuern, Schullöhnen ꝛc., so sind die Restanzen im Zeiger zu spezifiziren oder, wenn es viele wären, unter Verweisung auf ein besonderes Verzeichniß aufzuführen. Diese Form in der Stellung der Rechnung bietet nicht unwesentliche Vortheile. Vermöge derselben kann die Richtigkeit der aufgeführten Einnahmen durch die Prüfung leicht ermittelt werden. Die Guthaben auf saumseligen Schuldnern liegen klar vor und der Nachbezug derselben kann vom Verwalter nicht vergessen oder vernachlässigt werden. Die Restanzen fließen vermöge dieser Form der Rechnungsstellung beim spätern Eingang sicher dem Gute zu, ohne daß der Bezahlung erwähnt werden muß, denn die bezahlten Restanzen führt der Verwalter am Schluß der folgenden Rechnung nicht mehr im Zeiger auf und er muß nun natürlich deren Gegenwerth in Baar zeigen. Versäumt er den Bezug, so muß er, wenn er anders sie nicht aus eigenem Sack durch Baar ablösen will, dieselben in der folgenden Rechnung wieder vorführen und so zeigen, daß er sie nicht bezogen hat.

3) Aenderungen im Kapitalbestand. Wenn an ein Gut ein Kapital zurückbezahlt wird, so fällt diese Baareinnahme natürlich auch ins Kassabuch des Verwalters; aber in der Gutsrechnung darf diese Einnahme nicht aufgenommen, sondern etwa in einer Notiz angemerkt werden. Es würde aus der Aufnahme dieses Baarbetrags unter die Einnahmen in der Rechnung für den Verwalter ein Schaden erwachsen, der gleich dem Betrage dieser Einnahme wäre. — Der Grund liegt darin, daß diese Einnahme keine Vermehrung des Gutes zur Folge hat, es besitzt noch gleich viel, nur in anderer Form; mit der Einnahme des Baarbetrags des Kapitals ist das Guthaben in dem Schuldbrief ꝛc. verloren gegangen. Von dem ganzen Vorgange ist besonders dadurch in der Rechnung Notiz zu nehmen, daß in dem Titel „verfallene Zinse von Kapitalien" in der Kapitalrubrik das abbezahlte Kapital nicht mehr aufgeführt und nur im Text zum verfallenen Zins bemerkt wird: „.... Zins von .... Frkn. mit .... (Datum) abbezahltem Ka-

pital". So wird nur die Kapitalsumme dieses Titels um das abbezahlte Kapital kleiner und die Differenz muß im Zeiger durch Baar (die eingenommene Summe) ersetzt werden. Würde die eingegangene Baarsumme in Einnahme gebracht worden sein, so würde offenbar die Rechnungsschuld um diese Summe größer und dazu noch das Kapitalvermögen um gleich viel kleiner geworden sein, und somit hätte der Verwalter das Doppelte an Baar weisen müssen, um die Rechnungsschuld zu zeigen. — Wenn für das Gut ein Schuldbrief angekauft oder ein neues Kapital angelegt wird, so macht der Verwalter aus seiner Kasse eine entsprechende Ausgabe, der Kassabestand wird kleiner und er wird nicht ermangeln, diese Ausgabe dem Kassakonto gutzuschreiben. In die Rechnung aber darf diese Ausgabe nicht gebracht werden, denn das Gut ist nicht vermindert worden dadurch. Durch Aufnahme der ausgegebenen Summe unter die Ausgaben würde das Gut zu Gunsten des Verwalters um diese Summe verkürzt. — Die Eintragung in die Rechnung geschieht einfach dadurch, daß im Titel „verfallene Zinse von Kapitalien" in die Rubrik „Kapital" der Werth des neu angelegten Kapitals geschrieben wird mit der Bemerkung in der Textspalte: „Neu angelegtes Kapital auf N. N. laut .... (Schuldbrief ꝛc., d. d.)". Dadurch wird die Summe der zinstragenden Kapitalien um den Nennwerth des neuen Schuldtitels erhöht und im Zeiger muß gerade um diesen Betrag (gleich dem ausgelegten Geld) weniger Baarschaft gezeigt werden. Hätte der Verwalter dagegen den Betrag in Ausgabe gebracht, so würde dadurch die Rechnungsschuld um die entsprechende Summe kleiner geworden sein und der Unterschied wäre dem Verwalter zugut gekommen, der weniger hätte zeigen müssen.

Wenn mit einem Kapital zugleich ausstehende Zinse angekauft werden, so ist zunächst zu unterscheiden, ob nur ganze oder auch Bruchzinse dabei sind. Sind nur ganze Zinse (1, 2, 3) mitgekauft worden, so kommen diese in die Restanzen und vermehren den Zeiger um ihren Betrag, also auch um die bezügliche Auslage. Daher kommt auch keine Ausgabe für ihren Ankauf in Rechnung. Sind aber auch Bruchzinse ($^1/_2$, $^1/_4$) dabei, so werden diese (die Bruchzinse) nicht in die Restanzen aufgenommen, sondern nur die etwa noch dabei stehenden ganzen Zinse. Die Auslage für die Bruchzinse wird nun durch keinen Gegenwerth, der in den Zeiger kommt, ersetzt; daher muß dieser Theil der Auslagen in der Rechnung in Auslage gebracht werden, sonst würde ihn der Verwalter verlieren.

Noch müssen wir der in Ersparnißkassen liegenden Kapitalien deßwegen

besonders erwähnen, weil der Zins zum Kapital geschlagen wird und so alle Jahre ein anderes Kapital erscheint. Man verfährt dabei am besten folgendermaßen: In die Zinsrubrik wird bei Rechnungen auf 1 Jahr 1 verfallener Zins (resp. $^1/_2$) geschrieben, die Kapitalrubrik leer gelassen und im Text bemerkt: „1 Zins (resp. $^1/_2$) von .... Fr. Kapital auf der Ersparnißkasse ꝛc.". Dann erscheint Kapital sammt zugeschlagenem Zins — also das von nun an zinstragende Kapital — in der Kapitalrubrik mit der Bemerkung: „Erneuertes Guthaben auf der l. Ersparnißkassa N., zinstragend mit .... (Datum)". — So erscheint richtig der verfallene Zins in den Einnahmen als Vermehrer des Guts, und der nicht in Baar erhaltene Zins kommt mit dem „erneuerten Kapital" in den Zeiger. — Wie Einlagen in Sparkassen zu behandeln sind, ergibt sich nun leicht. Es versteht sich nach dem Gesagten von selbst, daß sie nicht in den Ausgaben erscheinen. — Bei Rechnungen, die 2 Jahre umfassen, erscheinen 2 getrennte Zinse, von denen der eine 1 Jahr nach dem andern verfallen ist: Der erste kommt vom ursprünglichen Kapital und ist im ersten Jahr verfallen, der zweite kommt vom ursprünglichen Kapital und dem zu diesem Kapital geschlagenen ersten Zins; er ist im zweiten Jahr der Rechnung verfallen. In der Kapitalrubrik erscheint dann als „erneuertes Guthaben ꝛc." das ursprüngliche Kapital mit Einschluß des ersten und zweiten Zinses, wobei allfällige Einlagen noch besonders zu berücksichtigen sind. — Wenn nämlich Einlagen vom gleichen Zeitpunkt an zinstragend werden wie das erneuerte Kapital, so werden sie mit diesem in eine Summe vereinigt; wenn sie aber später zinstragend werden, so werden sie getrennt aufgeführt nach den Zeitpunkten, da sie anfangen Zins zu tragen.

C. Nachdem wir die am häufigsten vorkommenden Fälle speziell besprochen, lassen wir folgende allgemeine Grundsätze folgen, die wohl für alle Fälle ausreichen, deren Einführung in die Rechnung Schwierigkeiten bieten können:

1. Alle Vorfälle, durch welche das Gut um eine bestimmt ermittelte Summe vermehrt wird, sind, wenn auch keine Baareinnahme damit verbunden ist, mit dem Betrag der Vermehrung in Einnahme zu bringen. (Der Betrag erscheint im Zeiger der Art der Vermehrung entsprechend: in Baar, in einem Guthaben oder einem Besitz irgend anderer Art.)

2. Alle Vorfälle, durch welche das Gut um eine bestimmt ermittelte Summe vermindert wird, sind, wenn auch keine Baar-

auslage damit verbunden ist, mit dem Betrag der Verminderung in Ausgabe zu bringen. (Der Zeiger hat durch den Vorfall bereits den Betrag in einer dem Vorfall entsprechenden Form verloren.)

3. Alle Baareinnahmen, durch welche ein entsprechender Gegenwerth verloren wird, der einen Bestandtheil des letzten Zeigers oder des Uebertrags ausmachte, dürfen unter keinen Titel in Einnahme gebracht werden. Vorfälle dieser Art vermehren offenbar das Gut nicht. Erscheinen aber diese Posten in den Einnahmen, so vermehren sie die Rechenschuld um ihren Betrag und erfordern einen um eben so viel vergrößerten Zeiger, während das Gut nicht größer geworden ist, sondern nur ein Wechsel in der Form des Besitzes eingetreten ist, z. B. Geld statt Kapitalien. — Der Fehler würde dem Rechnungsgeber zum Schaden gereichen.

4. Alle Baarauslagen, durch welche ein entsprechender Gegenwerth erworben wird, der als Gutsbestandtheil im Zeiger erscheint, dürfen in keinen Titel der Ausgaben gebracht werden, überhaupt nicht in der Rechnung erscheinen. (Daß ihre Aufnahme unter die Ausgaben fehlerhaft wäre, finden wir durch ähnliche Schlüsse wie bei Ziffer 3; ebenso daß der Fehler dießmal dem Gute zu Schaden und dem Rechnungsgeber zum Vortheil gereichen würde.)

D. Wir lassen nun einige Beispiele für obige Grundsätze folgen:

1. a. Dem Verwalter wird zu Gunsten des Gutes ein Schuldbrief von fl. 400 nebst 2 dabei ausstehenden Zinsen à 4 % als Eigenthum überlassen. Der Rechnungsgeber hat unter dem geeigneten Titel (Legate, freiwillige Beiträge ꝛc.) 1008 Fr. (Zins und Kapital) in Einnahme zu bringen, obschon kein Rappen in Baar in Folge dieses Vorfalls einging. — Zugleich stellt er aber auch bei dem Titel „Verfallene Zinse von Kapitalien" in die Kapitalrubrik Fr. 933. 33 Rp. und in die Restanzen 2 Zinse (wofern sie nicht bezahlt wurden) mit Fr. 74. 67 Rp., wodurch Zeiger und Rechenschuld sich um den gleichen Betrag vermehren. — Wenn seit der Schenkung noch ein Verfalltag eingetreten, so wird auch ein verfallener Zins in Einnahme gebracht und in die Restanzen entsprechend eingetragen, wenn er nämlich nicht bezahlt wurde.

b. Die zuständige Behörde erhöht bei einem Kapital von fl. 1200 mit 4 ausstehenden Zinsen den Zinsfuß von 4 % auf 5 %. Die ausstehenden Zinse (die Restanzen) vermehren sich dadurch um 48 fl. oder 112 Fr. Diese Vermehrung muß in Einnahme gebracht werden (z. B. in

Allerlei); denn das Gut besitzt 112 Fr. mehr in Folge dieser Erhöhung des Zinsfußes. — In den Restanzen und somit auch im Zeiger tritt die entsprechende Vermehrung ein. Würde die Rechenschuld nicht auch um diesen Betrag erhöht durch Aufführung unter den Einnahmen, so müßte der Verwalter diesen Betrag an Baar weniger, d. h. zu wenig zeigen.

c. In einer Vormundschaft wird ein neues Aktivum (z. B. ein Guthaben) von 91 Fr. aufgefunden. Es muß aus leicht zu findenden Gründen in den Einnahmen erscheinen.

d. Ein wohlthätiger Bürger schenkt der Waisenanstalt 5 Gründungsaktien von 100 Fr. — In der Rechnung müssen dafür 500 Fr. in Einnahme gebracht werden. Wenn dabei (wie gewöhnlich) die Summe der Aktiven als Uebertrag erscheint, von denen die Passiven und so auch die Aktiven erst abgezogen werden müssen, um das reine (reelle) Vermögen zu finden, so muß der Betrag von 500 Fr. auch in Ausgabe erscheinen als verwendet zur Tilgung der 5 geschenkten Aktien oder zur Ablösung von Passiven. Der Grund liegt darin, daß die Aktiven um dieses Vorfalls willen sich nicht vermehrt haben und die Vermehrung des reinen Vermögens, die hier allerdings stattgefunden, im Zeiger und Uebertrag nicht vertreten ist. Unterbliebe in diesem Falle die Aufnahme unter die Ausgaben, so würde der Rechnungsgeber sich selbst um diese Summe bringen und die Passiven ohne Grund vermindern oder falsch angeben.

2. Wenn irgend ein Vermögensbestandtheil, der im Zeiger und Uebertrag inbegriffen war, verloren geht, so ist der Verlust unter die Ausgaben zu bringen, so z. B. verlorene Kapitalien, Zinse und anderweitige Guthaben; desgleichen die unerhältlichen und verloren erklärten Steuerbeträge, Schullöhne und alle andern zum Bezug verfallenen Beiträge, insofern der volle Betrag der verfallenen Steuer ꝛc. in Einnahme gebracht wird. Wenn, umgekehrt zu einem oben gesetzten Falle, à 5 % berechnete Zinsrestanzen zu 4 % abbezahlt werden, so wird der Unterschied von 1 % zwischen den 5prozentigen Restanzen und dem à 4 % geschehenen Eingang in Baar auch in Ausgabe gebracht. Auf diese Weise nur wird die Rechenschuld und mit ihr das Vermögen um den Betrag verkleinert werden, der ihm durch Verlust, Schenkung oder anderweitige Vorfälle entzogen worden ist. — Ein Versehen in dieser Richtung würde dem Verwalter zum Schaden gereichen, der in der Rechnung den Ausfall an Baar vorstellen müßte.

3. Beispiele für den dritten der allgemeinen Grundsätze sind bereits oben unter den Zinseinnahmen und Kapitaländerungen erwähnt worden. —

Es gehören dahin alle Einnahmen von abbezahlten Kapitalien, von Zinsrestanzen und Restanzen jeder Art, von Forderung und durch Verkauf von irgend welchen Werthgegenständen, alles insofern sie einen Bestandtheil des Zeigers ausmachten und also ein der Einnahme entsprechender Gegenwerth aus dem Zeiger fällt. Wäre dieß nicht der Fall, so müßte die Einnahme in Rechnung gebracht werden als Vermehrer der Rechenschuld und des Baarbestands des Zeigers.

4. Alle Vorfälle, durch welche mittelst einer Baarauslage ein gleich großer Vermögensbestandtheil erworben wird, der als Gutsbestandtheil in den Zeiger tritt, gehören hieher; z. B. Ankauf von Kapitalien und deren Zinsrestanzen, von Guthaben und andern Vermögenstheilen mehr (sofern sie einen Bestandtheil des Zeigers ausmachen, andern Falls nicht).

Anmerkung. Um die Richtigkeit einer Rechnung zu prüfen, ist es nöthig, daß Einnahmen und Ausgaben bezeugt seien. Es sind hiezu besondere Beilagen (Belege) nöthig, die man einer Rechnung numerirt beilegt und auf die man in der entsprechenden Rubrik der Rechnung durch Ziffern hinweist (siehe die nachfolgenden Beispiele). Manche Einnahmen bewahrheiten sich immer durch die vorhergehende Rechnung oder durch die Rechnung selbst, andere kontrolirt die Oberbehörde (Rechnungsprüfungsbehörde) u. s. f. Für die letztern legt man meistens keine Belege bei. Mit Beziehung auf die Ausgaben gelten ähnliche Bemerkungen.

III. Beispiel zur Stellung von Vormundschaftsrechnungen.

Es gibt zwei Arten der Vormundschaftsrechnungen, nämlich sogenannte „Haushaltungsrechnungen" und „gewöhnliche Vogtrechnungen". Die erstern unterscheiden sich von den letztern namentlich dadurch, daß sie in der Regel einen Verkehr in Liegenschaften oder ein anderes Gewerbe mit oder ohne Kapitalien betreffen, dessen theilweise oder ganze Verwaltung den Bevormundeten unter Aufsicht des Vormundes überlassen werden muß, während die letztern (Vogtrechnungen) lediglich Bezug haben auf dasjenige Vermögen von Bevormundeten, welches ausschließlich von dem Vormunde verwaltet wird und gewöhnlich bloß in Kapitalien besteht. (Anleitung zu Vormundschaftsrechnungen aus dem von Dr. Bluntschli herausgegebenen zürcherischen Vormundschaftsgesetz.)

Wir lassen eine „Haushaltungsrechnung" folgen:

Seite 1. Titel: Dritte Rechnung über das Vermögen der wegen des falliten Zustandes ihres Mannes N. N. bevormundeten Frau S. Braun, geb. N. N., und der Kinder Rosina, Karolina und Jakob Braun von Wetzikon, geführt von dem Vormunde N. N. von N. für den Zeitraum vom Mai 1852 bis 1854.

Seite 2. Namen und Alter der Bevormundeten.
Angaben über Aufenthalt, Thätigkeit, Erziehung der Kinder.

Seite 3. Vermögensbestand.

	Fr.	R.	Fr.	R.
Der Vermögensbestand laut letzter Rechnung war . .			7597	73
nämlich: A. an Liegenschaften	5656	—		
B. an zinstragendem Kapital auf N. N. lt. Schuldbrief d. d.	1000	—		
C. an Fahrhabe: 1) Geräthschaften ꝛc. . . .	633	96		
2) Vieh (an Produkten nichts)	207	67		
D. an Baarschaft, Kassa laut letzter Rechnung .	100	10		
	7597	73	7597	73
Darauf an Passiva: A. Grundversichert	4000	—		
B. Laufend	828	34	4828	34
Bleibt als reines (liquides) Vermögen			2769	39

Seite 4. Ertrags- und Verkehrsrechnung.

I. Einnahmen.

100 Fr. 10 Rp. Der Kassasaldo aus letzter Rechnung.

Zinse. Fr.	Zinse. Rp.	Kapital. Fr.	Kapital. Rp.	%	Verfallzeit.	A. Verfallene Kapitalzinse.
80	—	1000	—	4	Mai 1853 u. 1854.	von N. N. in ... (Schuldbrief d. d.)

Seite 5. Einnahmen.

Fr.	Rp.	
		B. Ertrag des Gütergewerbes.
35	—	Für im Jahr 1852 verkaufte Kartoffeln.
35	—	= = = 1853 = =
70	—	
		C. Ertrag des Spezereihandels der Frau Braun.
943	85	Vom Mai 1852 bis Mai 1854.

Seite 6. **Rekapitulation der Einnahmen.**

Fr.	Rp.	
100	10	Der Kassasaldo letzter Rechnung.
80	—	A. An Zinsen.
70	—	B. Ertrag des Gütergewerbs.
943	85	C. = = Spezereihandels.
1193	95	Summa aller Einnahmen.

Seite 7. **II. Ausgaben.**

Fr.	Rp.	Beleg.	
			A. An amtlichen Taxen und Belohnungen.
1	90	1	Für Ratifikation der zweiten Rechnung der Bezirksrathskanzlei.
5	84	2	Für Ausfertigung eines Kaufbriefs der Notariatskanzlei H.
7	74		
			B. An Staats- und Gemeindssteuern.
4	73	3 4	Brandassekuranzsteuer für 1852 und 1853.
5	84	5	Ansäßgebühr für 1852.
4	24	6	Für 1 Zelgweg in O. 1852.
14	81		

Seite 8. **Ausgaben.**

Zinse. Fr.	Zinse. Rp.	Kapital. Fr.	Kapital. Rp.	%	C. An Zinsen.	Beleg.
480	—	4000	—	4	3 Zinse, mit Mai 52, 53 u. 54 verfallen, an N. N.	7
40	10	268	34	3	2 Zinse, dem Heimatlosenverein (Mai 53 u. 54) (400 Fr. abbezahlt Mai 1854.)	8
520	10	4268	34			

Seite 9. **Ausgaben.**

Fr.	Rp.	D. An abbezahlten Kapitalien.	Beleg.
400	—	Abschlagszahlung an das Obligo dem Heimatlosenverein, Mai 1854	9

Seite 10. **Ausgaben.**

Fr.	Rp.	E. Für Konti und Allerlei.	Beleg.
74	67	Dem Schmid Bader in A. für einen Pflug	10
50	—	Zuschuß in die Haushaltung mit Neujahr 1854	11
60	10	Für Kleider für die Bevogteten	12
184	77		

Seite 11. **Rekapitulation der Ausgaben.**

Fr.	Rp.	
7	74	A. An amtlichen Taxen und Belohnungen.
14	81	B. = Staats- und Gemeindssteuern.
520	10	C. = Zinsen.
400	—	D. = abbezahltem Kapital.
184	77	E. Für Konti und Allerlei.
1127	42	Summa aller Ausgaben.

Seite 12. **Abrechnung.**

Summa d. Einnahmen Fr. 1193. 95 Rp. Der Saldo letzter Rechnung Fr. 100. 10 Rp.
= = Ausgaben = 1127. 42 = = = vorlieg. = = 66. 53 =
Kassasaldo Fr. 66. 53 Rp. Verminder. im Kassasaldo Fr. 33. 57 Rp.

Seite 13. **Gegenwärtiger Vermögensbestand (Zeiger).**

	Fr.	Rp.	Fr.	Rp.
Aktiva.				
An Liegenschaften laut voriger Rechnung	5656	—		
An Fahrhabe (Geräthschaften ꝛc., Vieh) laut voriger Rechnung	841	63		
An vermehrter Fahrhabe durch Anschaffung eines Pflugs	74	67		
An zinstragendem Kapital	1000	—		
Kassasaldo mit Mai 1854	66	53		
			7638	83
Passiva.				
An N. N. in ... laut Schuldbrief d. d.	4000	—		
Dem Heimatlosenverein Rest des Obligo d. d.	268	34		
			4268	34
Bilanz.				
Gegenwärtig reines (liquides) Vermögen			3370	49
Reines Vermögen laut letzter Rechnung			2769	39
Ergibt sich ein Vorschlag mit Mai 1854 von			601	10

Seite 14.

Uebersicht der Veränderungen in den Vermögensverhältnissen seit Mai 1852.

Vermehr. Fr.	Vermehr. Rp.	Vermind. Fr.	Vermind. Rp.	
74	67			An Fahrhabe laut Seite 10 und 13.
400	—			Durch Abzahlung von Passiven laut Seite 9.
160	—			Durch Bezahlung eines restirenden Zinses laut Seite 8.
		33	57	Durch kleinern Kassasaldo laut Seite 12.
634	67	33	57	
33	57			
601	10			Gleich dem oben gezeigten Vorschlag.

Wetzikon, den 1. Mai 1854. Der Vormund: N. N.

Allfälliger Anhang für besondere Besitzgegenstände, dann der „Abschied" des Gemeindrathes und Bezirksrathes.

Natürlich hat der Lehrer je die in seinem Lande gesetzlichen Bestimmungen über Stellung der genannten Rechnungen zu beobachten. Er thut gut, allfällige Formulare zur Erläuterung beizuziehen.

IV. Beispiel zur Stellung öffentlicher Gutsrechnungen.

Zur Erläuterung für die Verwaltung der Schulgüter, so wie auch der andern bezeichneten Güter folgt nun in gedrängter Kürze eine Schulgutsrechnung.

Die Verwaltung des Schulguts erstreckt sich über einen Schulfond und eine Schulkasse. Der Schulfond ist das bleibende Vermögen, dessen Kapitalwerth nicht vermindert werden darf, sich gegentheils durch gesetzlich bestimmte Zuflüsse (siehe Beispiel Seite 292) zu äufnen hat, und nur die Zinsen der Kapitalien können zu Schulzwecken verwendet werden. Die Schulkasse gibt Rechnung über Einnahmen und Ausgaben je eines Rechnungsjahres (siehe das Beispiel).

Rechnung

über die

Verwaltung des Schulgutes

der

Schulgemeinde B.

vom 1. Januar 1852 bis 31. Dezember 1852.

№ 14.

Abgelegt von

Theod. Kubli, Schulgutsverwalter dahier,

unter Bürgschaft von

Herrn C. Kubli dahier,
= G. Strubi =

laut dem im Gemeindsarchive aufbewahrten Bürgschaftsschein d. d. 23. Mai 1851.

A. Schulfond.

Einnahmen.

	Fr.	R.	Fr.	R.
I. Uebertrag von voriger Rechnung	.	.	22817	90
nämlich:				
a. an zinstragenden Kapitalien	15633	34		
b. = Zinsrestanzen	.	.		
c. = Servitutsberechtigungen	4841	67		
d. = Guthaben auf der Schulkasse . . .	1182	31		
e. = baarem Gelde	1160	58		
Summa wie oben Fr.	22817	90		
Auf diesem Gute haften keine Passiva.				

II. Jahreseinnahmen.

Nag. des Zinsb.	Zinse. Fr.	R.	Kapital. Fr.	R.	%	Verfallzeit.	a. Verfallene Zinse von Kapitalien.	Restanzen Zahl.	Fr.	R.
4	18	67	466	67	4	Mart.	von Gebrüder Lang auf d. Oberhof lt. Brief d. d. 7. Okt 1788	.	.	.
15	74	67	1866	67	4	Mai	von Gebrüder Hotz im Dorf laut Brief d. d. 15. Mai 1835 .	.	.	.
26	233	33	5833	33	4	Mart.	von der Gemeinde H. lt. Obligo d. d. 24. Nov. 1840 . .	.	.	.
29	93	33	2333	33	4	Mart.	von Joh. Biber im Berg lt. Brief d. d. 28. Nov. 1850 . .	.	.	.
30	56	—	1400	—	4	Mart.	von der Zivilgemeinde B. lt. Obligo d. d. 12. Nov. 1851 .	.	.	.
31	130	67	3266	67	4	Mai	von Heinr. Hüni auf der Allmend lt. Brief d. d. 29. April 1827	.	.	.
32	18	67	466	67	4	Mai	von der Zivilgemeinde A. lt. Obligo d. d. 12. Mai 1851 .	.	.	.
	625	34	15633	34						

Einnahmen.

	Fr.	Rp.
b. Grundzinse und Zehnten. Nichts.		
c. An Einzugsgebühren.		
Antheil an den Braut- und Bechergeldern laut Bescheinigung des Herrn Gemeindgutsverwalters, Beilage Nr. . .	23	—
Summa Fr.	23	—
d. An Hochzeitgaben.		
Von J. Nägeli	3	—
= J. Nötzli	3	—
Summa Fr.	6	—
e. An freiwilligen Schulsteuern.		
Schulpredigtsteuer vom 9. Mai	60	80
Summa Fr.	60	80
f. An Legaten.		
Von Kirchmeier Götschi's sel. Erben	250	—
Summa Fr.	250	—
g. An neu entlehnten Kapitalien. Nichts.		

Zusammenzug aller Einnahmen.

	Fr.	Rp.	Fr.	Rp.
I. Uebertrag von voriger Rechnung . .	.	.	22817	90
II. Jahreseinnahmen:				
a. an verfügbaren Zinsen	625	34		
b. = Grundzinsen und Zehnten . . .	—	—		
c. = Einzugsgebühren	23	—		
d. = Hochzeitgaben	6	—		
e. = freiwilligen Schulsteuern . . .	60	80		
f. = Legaten	250	—		
g. = neu entlehnten Geldern . . .	—	—		
			965	14
Summa aller Einnahmen Fr.	.	.	23783	4

Ausgabe.

	Fr.	Rp.
Der Schulkassa den Betrag der verfügbaren Zinse aus dem Schulfond laut Pag. .. und .. der Rechnung . .	625	34
Summa Fr.	625	34
Abbezahlte Kapitalien ꝛc. Nichts.		

Abrechnung.

	Fr.	Rp.
Die Einnahmen betragen laut Pag.	23783	4
= Ausgaben = = = ...	625	34
Also verbleibt die Rechnungsschuld Fr.	23157	70
welche von dem Verwalter folgendermaßen gezeigt wird:		
Fr. 15633. 34 Rp. an zinstragenden Kapitalien, Pag. . .		
= . . = = Zinsrestanzen.		
= 4841. 67 = = Servitutsberechtigungen, Pag. . .		
= . . = = Guthaben auf der Schulkasse.		
= 2682. 69 = = baarem Gelde.		
Fr. 23157. 70 Rp. Summa wie oben.		
Am Schlusse der vorjährigen Rechnung bestund das liquide Vermögen in	22817	90
Der dießjährige Vorschlag beträgt sonach Fr.	339	80

B. Schulkassa.

Einnahmen.

1852.			Fr.	Rp
		I. Kassaüberschuß laut vorjähriger Rechnung. Nichts . . . . . da dieselbe im Gegentheil ein Defizit von 10fl. 506. 29 ß. 3 hlr. = Fr. 1182. 31 Rp. zeigte.	—	—
		II. Jahreseinnahmen.		
		a. An verfügbaren Zinsen.		
		Aus dem gemeinen Schulfond laut Pag. . .	625	34
		Summa Fr.	625	34
		b. Ertrag von Liegenschaften. Nichts.		
		c. An Servitutberechtigungen. (Zinse von Fr. 4841. 67 Rp., siehe Pag. ..)		
Mai	7.	Aus dem Gemeindsgut, mit Mai 1852 verfallen	7	—
Dez.	31.	= = Wachtgut H., mit Mart. 1852 verfallen	186	67
		Summa Fr.	193	67
		d. An Niederlassungsgebühren.		
Dez.	31.	Von Herrn Zivilgutsverwalter Stapfer als gesetzlicher Antheil aus den Niederlassungsgebühren vom Jahr 1852	233	30
		Summa Fr.	233	30
		e. An Schullöhnen.		
Schulrodel		Schullöhne, mit Mai 1852 verfallen . .	626	50
		= = Martini 1852 verfallen .	534	60
		(Rodel als Beilage.)		
		Hiezu kommen noch Restanzen von voriger Rechnung	109	15
		Summa der eingegangenen Schulgelder Fr.	1270	25

Einnahmen.

1852.			Fr.	Rp.
Steuerrodel.		**f. An Schulsteuern**		
		Betrag der bezogenen Steuer vom Jahr 1852 zu $^1/_2$ pr. $^{00}/_{00}$, 57 Rp. pr. Haushaltung und 51 Rp. pr. Mann (Beilage) . .	2759	85
		An obiger Summe abzuziehen an unerhältlichen Restanzen . . . . . Fr. 38. 48 Rp.		
		Abzug für unrichtige Verzeichnung = 15. 21 =	53	69
		Summe der eingegangenen Schulsteuer Fr.	2706	16
		g. An Staatsbeiträgen.		
März	2.	Staatsbeitrag an Schullöhne und Lehrmittel .	213	3
=	17.	= aus dem Salzregal	404	95
Dez.	31.	= an die Leistungen dürftiger Schulgenossenschaften pro 1851	43	18
		Summa Fr.	661	16
		h. An Allerlei.		
Nov.	18.	Steuerbuße von sel. Rellstabs Erben den fünffachen Betrag von Fr. 182000 a. W. à $^1/_2$ pr. $^{00}/_{00}$ für x Steuern	663	54
		Summa Fr.	663	54

Zusammenzug aller Einnahmen.

		Fr.	Rp.	Fr.	Rp.
I.	Kassaüberschuß laut letzter Rechnung. Nichts.	.	.	—	—
II.	Jahreseinnahmen:				
a.	an verfügbaren Zinsen	625	34		
b.	= Ertrag von Liegenschaften . . .	—	—		
c.	= Servitutberechtigungen	193	67		
d.	= Niederlassungsgebühren	233	30		
e.	= Schullöhnen	1270	25		
f.	= Schulsteuern	2706	16		
g.	= Staatsbeiträgen	661	16		
h.	= Allerlei	663	54		
				6353	42
	Summa aller Einnahmen Fr.	.	.	6353	42

Ausgaben.

1852.			Beleg Nr.	Fr.	Rp.
		a. An Lehrerbesoldungen.			
		Besold. an Hrn. Lehrer Graf, verf. m. Mart. 1852	1	1000	—
		= = = = Bodmer, = = = =	2	1000	—
		= = = = Lips, = = = =	3	1000	—
		= = = = Ruegg, = = = = (nach Abzug von Fr. 140 für die Wohnung)	4	860	—
		Summa Fr		3860	—
		b. Für Lehrmittel.			
Dez.	9.	Hrn. Lehrer Graf für Anschaffung von Material zum Unterricht in der Naturlehre	5	4	—
=	22.	Hrn. Lehrer Ruegg für verabreichte Singhefte an Sing- und Repetirschüler . . .	6	2	50
		An Lehrmittel für bedürftige Schulkinder	7	7	80
		Summa Fr.		14	30
		c. Für Reinigung und Beheizung der Schulzimmer.			
April	17.	Frau Binder für Waschen von 22 Stück Vorhänge	8	2	64
Sept.	4.	Karl Ochsner im Feldmoos für 6 Fuder Torf	9	95	66
Nov.	11.	Für Hauptreinigung des Schulhauses .	10	20	—
Dez.	10.	Schiffer Brändli für 1 Klafter Tannenholz	11	19	25
=	14.	Huber für Spalten von 1 Klafter Holz	12	4	67
		Summa Fr.		142	22
		d. An Bau- und Unterhaltungskosten.			
Mai	11.	Zimmermann Biber	13	5	70
Juli	10.	Dachdecker Knabenhans	14	1	50
Dez.	9.	Kaminfeger Schärer	15	3	55
=	31.	Glaser Baumann	16	3	—
=	31.	Brandassekuranzsteuer pro 1852 . . .	17	8	37
		Summa Fr.		22	12
		e. An Staatsbeiträgen.			
		an 73 Schulgenossen bezahlt als Staatsbeitrag	18	213	3
		Summa Fr.		213	3

Ausgaben.

1852.			Beleg Nr.	Fr.	Rp.
		f. An die Arbeitsschule.			
Nov.	15.	Beitrag der Schulkassa	19	25	—
		Summa Fr.		25	—
		g. Rückzahlung von gemachten Geldaufbrüchen.			
		Dem Schulfond zurückbezahlt (laut Defizit der vorjährigen Rechnung)		1182	31
		Summa Fr.		1182	31
		h. An Allerlei.			
März	15.	Für Einladungskarten in die Gemeindsschulpflege	20	7	—
=	20.	Beitrag an Wächter Weber zu seiner Besoldung	21	8	75
=	26.	Techniker Müller für eine den Schülern der sechsten Klasse gegebene Vorstellung seiner galvanischen Experimente	22	31	50
Okt.	9.	Bezirksräthliche Ratifikation der Rechnung von 1851		3	50
Dez.	1.	Wächter Weber für Vertheilung der Steuerzedel	23	8	50
=	31.	Buchdrucker Weiß f. Steuerscheine u. Inserate	24	33	20
=	31.	An Zinstrinkgeldern		5	30
		Summa Fr.		97	75

Zusammenzug aller Ausgaben.

	Fr.	Rp.
a. An Lehrerbesoldungen	3860	—
b. Für Lehrmittel	14	30
c. = Reinigungs- und Beheizungskosten	142	22
d. = Bau- und Unterhaltungskosten	22	12
e. = Staatsbeiträge	213	3
f. = die Arbeitsschule	25	—
g. = Rückzahlung gemachter Geldaufbrüche	1182	31
h. = Allerlei	97	75
Summa aller Ausgaben Fr.	5556	73

Abrechnung.

	Fr.	Rp.
Wenn die Einnahme Pag .. von	6353	42
verglichen wird mit der Ausgabe Pag. .. von . . .	5556	73
so ergibt sich als Kassaüberschuß Fr.	796	69

Abgeschlossen den 31. Dezember 1852.

Der Rechnungssteller:
Theod. Kubli.

Als Anhang würde nun der Rechnung noch ein Verzeichniß (Inventar) des beweglichen Eigenthums so wie der Liegenschaften folgen.

Wie das Muster zeigt, sind in der Rechnung Einnahmen und Ausgaben sorgfältig unter Haupttitel gefaßt, wodurch die Rechnung übersichtlich und eine Prüfung derselben sehr erleichtert wird.

Die Einnahme besteht immer aus dem vorjährigen Vermögensbestand (siehe Seite 291) und den ordentlichen und außerordentlichen Jahreseinnahmen. Ordentliche oder alle Jahre wiederkehrende Einnahmen sind z. B. die auf Seite 291 unter a, b ꝛc. und Seite 294 und 295 unter a, b, c, d, e, g. Andere Titel sind mehr zufällig oder besondern Beschlüssen der Gemeinde unterworfen, wie der auf Seite 295 unter f.

Die ordentlichen Jahreseinnahmen sind zum Theil durchs Gesetz bestimmt in Hochzeitgaben, Einzugsgebühren, Niederlassungsgebühren, Schulgelder, Servitutsberechtigungen ꝛc. Letzterer Einnahmetitel ist zu der Zeit, als die Schulgüter von andern Gütern ausgeschieden wurden, entstanden (siehe Einleit. I). Sind die einzelnen Einnahmen aufgeführt, so wird der Zusammenzug gemacht (siehe Seite 292 und 295).

In gleicher Weise erscheinen auch die Ausgaben. Sind diese summirt, so wird Abrechnung gehalten, d. h. von den Einnahmen werden die Ausgaben abgezogen, um den Vermögens- oder Kassabestand darzulegen, siehe Seite 293 und 298.

Einnahmen wie auf Seite 291 bewahrheiten sich durch die vorgehende Rechnung, andere, wie auf Seite 294 a, b, c, durch die Rechnung selbst; die übrigen sind durch besondere Beilagen zu bekräftigen.

In der Rechnung sind durch numerirte Belege die sämmtlichen Ausgaben ausgewiesen.

In ähnlicher Weise, denn nur die Einnahme- und Ausgabetitel können sich ändern, werden nun die Rechnungen über das Kirchen-, Gemeind- und Armengut gestellt.

Eine getrennte Fond- und Kassarechnung ist aber gesetzlich nur für das Schulgut gefordert. In einigen Gemeinden wird diese Rechnungsweise auch für das Armengut befolgt.

Auch hier werden allfällige gesetzliche Formulare für öffentliche Gutsrechnungen die nöthige Berücksichtigung beim Unterrichte finden.

§ 78.

Voranschlagsrechnungen. (Büdgets.)

Ein Vater, der seinem Hauswesen gut vorsteht, sucht zum Voraus annähernd zu bestimmen, welche Einnahmen er im Laufe eines angetretenen Jahres machen werde. Manche Arten von Einnahmen kennt er genau, z. B. Zinsen von Kapitalien, die er allfällig besitzt, fixe Besoldung, die er bezieht, den Ertrag einer Arbeit, die keinen Unterbrechungen ausgesetzt ist u. s. w. Andere Einnahmen, wie z. B. der Ertrag eines Gütergewerbs, eines Handels u. s. w. lassen sich nur annähernd zum Voraus berechnen, da Witterung und mancherlei andere nicht vorauszusehende Verhältnisse Einfluß darauf üben. Letztere Arten von Einnahmen schlägt er so an, daß dieselben eher mehr als weniger abwerfen.

So gewinnt er eine Uebersicht seiner sichern und muthmaßlichen Einnahmen.

Ebenso sucht er zum Voraus die zu machenden Ausgaben zu bestimmen, und zwar in der Weise, daß er zuerst den unerläßlichen Ausgaben die nöthige Summe zuschreibt. Dahin gehören die Kosten für Wohnung, Nahrung und Kleidung seiner Familie, für Erziehung seiner Kinder u. s. w. Dann bedenkt er diejenigen Ausgaben, die ihm nützlich werden können, aber nicht gerade unerläßlich sind, z. B. Verbesserungen in Haus und Feld, Anschaffungen von Büchern, Kunstwerken ꝛc., Reisen. Zuletzt wird er an die Ausgaben gehen, die nur dem Vergnügen bestimmt sind und die also im Nothfalle ohne Nachtheil vermieden werden können.

Der haushälterische Mann wird seine Ausgaben hiebei so abmessen, daß sie in keinem Falle die Einnahmen übersteigen, sondern er wird, wenn immer möglich, einen Ueberschuß der Einnahmen über die Ausgaben zu erlangen suchen, damit er in seinen Vermögensverhältnissen eher vorwärts als rückwärts kömmt.

Er wird auch nicht außer Acht lassen, daß Krankheiten und andere Unglücksfälle ihn und seine Familie treffen können, wodurch die Ausgaben vermehrt und die Einnahmen vermindert werden, und daß dieß ihn veranlassen muß, die Ausgaben ohne Noth nicht auf die Höhe der Einnahmen zu setzen.

Diesen Ueberschlag der Einnahmen und Ausgaben für ein kommendes Jahr heißt man einen Voranschlag (Budget).

Der Haushalter wird im Laufe des Jahres sich in der Weise daran halten, daß er die Einnahmen über die Ansätze des Voranschlags zu steigern und die Ausgaben unter den Ansätzen desselben zu halten sucht. Kann er eine Verminderung der Einnahmen nicht hindern, so sucht er sie durch eine Verminderung der Ausgaben auszugleichen. Muß er in Folge eines Steigens der Lebensmittelpreise mehr für Nahrung ausgeben, als er veranschlagt hat, so wird er die Ausgaben für Kleider, für Vergnügungen u. s. w. mindern, um am Ende doch eine möglichst günstige Jahresrechnung zu machen.

So wichtig nun auch solche Voranschläge für einen Familienvater sind, so haben sie doch noch weit mehr Bedeutung für die Verwaltung von Gemeinwesen, wie Gemeinden und Staat. Sie erleichtern nicht bloß die Erhaltung des Gleichgewichts in den Einnahmen und Ausgaben, sondern sie sichern zugleich vor Willkürlichkeiten in der Verwendung der öffentlichen Gelder, d. h. der Gelder, welche der Gemeinde oder dem Staate gehören, von Seite der verwaltenden Behörden.

Es ist natürlich nicht möglich, daß eine Gemeinde um jeder Ausgabe willen, die auf ihre Rechnung gemacht wird, sogleich zusammentreten und einen Beschluß darüber fassen kann. Sie muß dieß dem Gemeindrath überlassen. Damit aber diese Behörde keine Ausgaben mache, die nicht nothwendig oder dem Willen der Gemeinde nicht entsprechend sind, so kann die Behörde angehalten werden, der Gemeindsversammlung für je das folgende Jahr einen Voranschlag zur Genehmigung vorzulegen. *

In diesem Voranschlag sind die Einnahmen zusammengestellt, die bestehen werden

1. im Ertrage des Gemeindgutes,

---

* Es geschieht dieß zwar nicht in allen Gemeinden, weil das Gesetz es unsers Wissens nicht gerade verlangt; allein sehr zweckmäßig ist es, wenn die Gemeinden diesen Beschluß fassen und den Gemeindrath hiezu veranlassen.

2. in verschiedenen Gefällen wie Ansäßgeldern u. s. w.,
3. in Steuern.

Das Ausgabenbüdget zeigt die Ausgaben, welche für Bestreitung der Verwaltungskosten, für Unterhaltungskosten von Gebäuden und Straßen, für allfällige Gemeindeanstalten u. s. w. bestimmt sind.

Jeder Ausgabeposten des genehmigten Büdgets hat die Bedeutung eines dem Gemeindrathe eröffneten Kredits, d. h. der Gemeindrath ist befugt, für den angegebenen Zweck bis auf diese Summe zu verwenden, ohne daß er die Gemeinde weiter darüber anzufragen hat. Er ist aber nicht befugt, diese Summe zu überschreiten.

Da dieß aber auch bei der sorgfältigsten Abfassung des Büdget nicht immer zu vermeiden möglich ist, indem z. B durch Naturereignisse, die nicht vorhergesehen werden können, bisweilen bedeutend größere Ausgaben nothwendig werden, so muß die Behörde entweder die Bewilligung zu einer Kreditüberschreitung bei der Gemeinde einholen oder aber dieselbe auf eigene Verantwortlichkeit hin vornehmen in der Voraussicht, daß sie die Gemeinde, die Nothwendigkeit derselben erkennend, nachträglich genehmigen werde.

Das Büdget gewährt also zwei wesentliche Vortheile: Erstens gibt es schon im Anfange des Jahres Aufschluß, wie man muthmaßlich am Ende des Jahres stehen werde, d. h. wie die Jahresrechnung ausfallen werde; zweitens hindert es die Verwaltungsbehörden, die Einkünfte der Gemeinde wider den Willen derselben zu verwenden, ohne daß sie im Uebrigen gehemmt werden.

Bei der Verwaltung eines Staates sind die Verhältnisse ganz ähnlich, nur mit dem Unterschiede, daß die Rechnungsführung eine viel ausgedehntere und verwickeltere ist.

Im Kanton Zürich wird der Voranschlag der Einnahmen und Ausgaben für je das kommende Jahr vom Regierungsrath dem Großen Rath in seiner Wintersitzung zur Genehmigung vorgelegt. Die Einnahmen werden in folgenden sieben Titeln aufgeführt:

1. Ertrag des unmittelbaren Staatsgutes;
2. Ertrag der Regalien (Salz-, Post- und Bergwerksregal);
3. Steuern und Gebühren;
4. Bußen und Prozeßgebühren;
5. Beiträge an das Unterrichtswesen;
6. Beiträge an das Armenwesen;
7. Allerlei.

Die Ausgaben erscheinen in folgenden Abtheilungen:

I. Ausgaben für die Verwaltung.
   1. Allgemeine Landesverwaltung.
      A. Regierungsrath.
      B. Direktion des Innern.
      C. Direktion der Polizei.
      D. Direktion der Finanzen.
      E. Direktion der öffentlichen Arbeiten (Hochbauten, Straßen- und Wasserbauten ꝛc.).
      F. Direktion des Militärs.
      G. Direktion der Justiz.
      H. Direktion des Erziehungswesens.
      J. Direktion der politischen Angelegenheiten.
      K. Direktion der Medizinalangelegenheiten.
      L. Staatsanwaltschaft.
      M. Kirchenwesen.
   2. Bezirksverwaltung.

II. Ausgaben für das Gerichtswesen.
   1. Kantonale Gerichtsbehörden.
      A. Obergericht.
      B. Schwurgericht.
   2. Bezirksgerichte.

III. Außerordentliche Ausgaben.

Außer dem unmittelbaren Staatsgut besitzt der Kanton noch mehrere sogenannte mittelbare Staatsgüter, die unter besonderer Verwaltung stehen und über die also besondere Rechnung geführt wird, so das Spitalgut, der Kantonalarmenfond, der Viehscheinstempelfond.

Ueber jeden Kreditposten wird im Laufe des Jahres besondere Rechnung geführt und die Jahresrechnung so eingerichtet, daß jeder Posten derselben einem Posten im Voranschlag entspricht. Dabei läßt sich dann sehr leicht erkennen, worin und um wie viel die Rechnung vom Voranschlag abweicht.

Der Lehrer thut wohl am besten, nun einen wirklichen „Voranschlag der muthmaßlichen Einnahmen und Ausgaben des Staats", wie er für ein bestimmtes Jahr dem Großen Rathe vorgelegt worden, nach seinen Hauptrichtungen erläuternd zu durchgehen.

Inhalt des ersten Theiles der Mathematik der Volksschule.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Betrachtung des mathematischen, insbesondere des arithmetischen Unterrichts der Volksschule.

Seite.

§ 1. Einleitung 1

Ueber die Bedeutung der Mathematik, hauptsächlich des Rechnungsunterrichts der Volksschule.

§ 2. Die Idee der Volksschule 1
§ 3. Begriff der Mathematik der Volksschule 4
§ 4. Wichtigkeit des mathematischen Bildungsfaches 6
§ 5. Stellung des mathematischen Unterrichts zu dem übrigen Volksschulunterricht 15
§ 6. Ausscheidung der Geometrie. Verhältniß derselben zur Arithmetik . 17
§ 7. Umfang und Inhalt des Rechnungsunterrichts der Volksschule . . 23

Ueber Methodisches.

§ 8. Ueber die Methode der Mathematik der Volksschule im Allgemeinen 27
§ 9. Die Methode des Rechnungsunterrichts der Volksschule im Besondern.
I. Die Methode des reinen Rechnens 32
II. Die Methode des angewandten Rechnens 50
§ 10. Charakteristik der einzelnen Schulstufen in Hinsicht auf den Rechnungsunterricht, und übersichtliche Vertheilung des Unterrichtsstoffes auf die Schulstufen und Schuljahre 57
§ 11. Einige historisch-kritische Bemerkungen über die Methodik des Rechnungsunterrichts in Volksschulen 63

Ueber einige zur Methodik des Rechnens gehörende speziellere Punkte.

§ 12. Ueber Regel-, Denk- (Schluß-)Rechnen ꝛc. 72
§ 13. Ueber Kopf- und Zifferrechnen 75
§ 14. Ueber Sprachliches:
a. Die arithmetische Zeichensprache 86
b. Arithmetische Redensarten 93
§ 15. Ueber Rechnungsproben, Verifikationen 96

Ueber Hülfsmittel beim Rechnungsunterricht der Volksschule.

§ 16. Veranschaulichungsmittel 99
§ 17. Die bürgerlichen Rechnungsgrößen (Maße, Gewichte, Münzen) . 105
§ 18. Ueber ein individuelles Lehrmittel (Uebungsbuch) für den Rechnungsunterricht in der Volksschule 109

Zweite Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht auf der ersten Schulstufe. Elementarschule.

Seite.

§ 19. Einleitung 115

Erstes Schuljahr.

§ 20. Aufgabe 115
§ 21. Vorbereitungsunterricht 116
§ 22. Bestimmte Auffassung der Einheit gegenüber der Vielheit. Bildung der Zahlen zwei und drei 119
§ 23. Darstellung der Zahlmenge durch Zeichen, zunächst für eins, zwei, drei 124
§ 24. Bildung der Zahlen vier, fünf, sechs 126
§ 25. Darstellung der Zahlmenge in Zeichen 129
§ 26. Die ersten Uebungen im inversen Zählen (Wegzählen von Einheiten) 130
§ 27. Das erste sprungweise Zählen 131
§ 28. Zahlenraum bis zehn oder elf 133
§ 29. Fertiges Zu- und Wegzählen innerhalb dieses Zahlenraumes . . 134
§ 30. Bildung der Zahlen von zehn bis zwanzig oder einundzwanzig . 136
§ 31. Schrittweises und sprungweises Zu- und Wegzählen innerhalb dieses Zahlenraums 138
§ 32. Erweiterung des Zahlengebiets bis in die dreißig oder vierzig und Zu- und Wegzählen innerhalb dieses Gebietes 139
§ 33. Bezeichnung der Zahlen durch Ziffern und Benutzung derselben zur Aufzeichnung der Zählaufgaben und deren Ergebnisse 141

Zweites Schuljahr.

§ 34. Aufgabe 144
§ 35. Wiederholungen. 144
§ 36. Erweiterung des Zahlengebiets bis zu hundert in Verbindung mit den Ziffern 148
§ 37. Einfache Zählübungen im Umfange des ersten Hunderts 150
§ 38. Erweiterung des Zahlengebietes über hundert hinaus mit entsprechenden Zählübungen 152
§ 39. Erweiterte Uebungen im Zu- und Wegzählen 154
§ 40. Das Zu- und Wegzählen von Zehnern 156
§ 41. Fortbildung des Zählvermögens durch die Anfänge des Vervielfachens und Entvielfachens 159

Drittes Schuljahr.

§ 42. Aufgabe 162
§ 43. Wiederholungen aus dem vorigen Schuljahre 163
§ 44. Erweiterung des frühern Zahlengebiets bis zum Tausender . . . 163
§ 45. Zählübungen zur Befestigung des erweiterten Zahlengebiets . . . 165
§ 46. Angewandte (eingekleidete) Rechnungsaufgaben 170
§ 47. Fortsetzung der Uebungen im mehrfachen Zuzählen, Vervielfachen . 171
§ 48. Uebungen im Entvielfachen 174
§ 49. Eingekleidete Aufgaben 177

Dritte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht auf der zweiten Schulstufe. Realschule.

Viertes Schuljahr.

Seite

§ 50. Aufgabe 179
§ 51. Erweiterung des Zahlenraumes bis zu den Zehntausendern, höchstens bis zum Hunderttausender, und Bezeichnung der neuen Zahlen durch die entsprechenden Ziffern 179
§ 52. Uebungen im Zu- und Wegzählen innerhalb des erweiterten Zahlenumfanges 181
§ 53. Erweiterte Uebungen im Vervielfachen und Entvielfachen 183
§ 54. Operationen mit mehrfach benannten Zahlen 185
§ 55. Eingekleidete Aufgaben 186

Fünftes Schuljahr.

§ 56. Aufgabe 191
§ 57. Auffassung der Zahlen bis in die Millionen. Ein- und Aussicht ins (dekadische) Zahlensystem nach oben 191
§ 58. Uebungen im operationsgemäßen Rechnen bis in die Millionen . 192
§ 59. Entwicklung der Brüche 195
§ 60. Das Rechnen (Zählen) mit gleichnamigen Bruchtheilen 198
§ 61. Angewandte Aufgaben:
A. Einfache Operationssätze 200
B. Zusammengesetzte Operationssätze 202

Sechstes Schuljahr.

§ 62. Aufgabe 208
§ 63. Zur Fortsetzung der Bruchrechnung. Das Rechnen mit ungleichnamigen Bruchtheilen:
a. Division des Bruchtheils 208
b. Division des Bruchs und Verwandlung desselben 209
c. Zu- und Wegzählung ungleichnamiger Brüche 213
§ 64. Angewandte Aufgaben 214

Vierte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht auf der dritten Schulstufe. Realergänzungsschule.

Siebentes Schuljahr.

§ 65. Aufgabe 221
§ 66. Reines Rechnen (Zählen) mit Dezimalbrüchen:
A. Ableitung der Dezimalbrüche und Abschluß des Zahlensystems . 221
B. Das einfachste Rechnen mit Dezimalen 225
§ 67. Angewandtes Rechnen mit Dezimalbrüchen 232
§ 68. Die mehrfach verbundene Vervielfachung und Entvielfachung (zusammengesetzter Dreisatz) mit gewöhnlichen und Dezimalbrüchen . . 236

Achtes Schuljahr.

Seite.

§ 69. Aufgabe 239
§ 70. Multiplikation und Division mit gebrochenem Multiplikator und Divisor 239
§ 71. Praktisches Rechnen.
a. Vermischte Operationssätze, meist ohne Dreisatz 247
b. Vermischte Operationssätze mit Dreisatz 248
c. Operationssätze für abgekürzte Multiplikation und Division mit Dezimalen 251

Neuntes Schuljahr

§ 72. Aufgabe 253
§ 73. Reduktionen und Abkürzungen 253
§ 74. Praktisches Rechnen (Schlußfolge der vermischten Operationssätze):
A. Dreisatz nach wiederholten Verwandlungen 256
B. Vermischter Dreisatz mit Doppelgliedern 257
C. Aufgaben verschiedener Art 260
§ 75. Ueber einfache bürgerliche Buchhaltung 261

Fünfte Abtheilung.

Der Rechnungsunterricht auf der vierten Schulstufe. Bürgerliche Unterweisungsschule, Zivilschule.

Zehntes und elftes Schuljahr.

§ 76. Aufgabe 270
§ 77. Ueber die Stellung von Vormundschafts- und öffentlichen Gutsrechnungen. (Fortsetzung der Buch- und Rechnungsführung fürs staatlich bürgerliche Leben.)
I. Einleitung 271
II. Ueber die Stellung von Gutsrechnungen im Allgemeinen . . 275
III. Beispiel zur Stellung von Vormundschaftsrechnungen . . . 286
IV. Beispiel zur Stellung öffentlicher Gutsrechnungen 290
§ 78. Voranschlagsrechnungen (Budgets) 299

Angabe von Fehlern.

Von einzelnen Druck- und Schreibfehlern ersuchen wir zunächst folgende zu verbessern:

Seite	6	Zeile	14	von oben setze »gemäß« statt »analog«.
=	7	=	13	= = = das Komma nach »überhaupt«.
=	23	=	16	= unten = nach »Weise« noch »gebildet und«.
=	63	=	13	= oben = nach »Staatsrechnung« einen Punkt.
=	78	=	3	= = = »da« statt »daß«.
=	88	=	18	= unten = »benannte« statt »genannte«.
=	106	=	14	= = = »Ableitungen« statt »Ableitung«.
=	110	=	18	= oben = »erleichtert und vermittelt« statt »verleichtert und ermittelt«.
=	118	=	15	= = = »diesem« statt »diesen«.
=	126	=	2	= unten = vor »Würfel« nochmal »und ein«.
=	164	=	9 u. 10	v. = = »kein« statt »keinen«.
=	168	=	15	von = = 287 statt 289.
=	176	=	1	= oben = 7 als Divisor und 3 als Quotient.
=	176	=	9	= = = a und b statt α und β.
=	176	=	18	= = = »aufgaben« statt »ausgaben«.
=	240	=	16	= unten = »oder auch einen« statt »d. i. auch ein«.
=	271	=	14	= oben = nach »Staatsrechnung« einen Punkt.

Die

Mathematik der Volksschule.

Ein methodisches Handbuch

für

einen dem Wesen der Volksschule entsprechenden und alle ihre Stufen umfassenden Unterricht

von

J. C. Hug.

Zweiter Theil: Geometrie.

Zürich,
Druck und Verlag von Friedrich Schultheß.
1856.

Zweiter Theil.

Die Geometrie der Volksschule.

Zugleich als Anleitung

zum

richtigen Gebrauche der „methodisch gegliederten Aufgabensammlung für den geometrischen Unterricht in der Volksschule", als obligatorisches Lehrmittel in den zürch. Volksschulen eingeführt.

Vorwort.

Bei Abfassung des vorliegenden Handbuches war unser Hauptbestreben darauf gerichtet, den zu behandelnden Gegenstand als Glied des Unterrichtsorganismus der Volksschule, ihren einzelnen Stufen gemäß zu entwickeln und zu gestalten, damit derselbe als Mittel zur allgemeinen Bildung einerseits den Anforderungen der fortgeschrittenen Pädagogik, anderseits aber insbesondere den Anforderungen des fortgeschrittenen Lebens genüge. Daß ein zweckmäßig ertheilter geometrischer Unterricht von geistig bildendem Einfluß auf den Schüler ist, wird wohl nur von sehr Wenigen im Zweifel gezogen; dessenungeachtet können Viele nicht die Nothwendigkeit und den praktischen Nutzen dieses Unterrichtszweiges der Volksschule einsehen. Von gar Manchen ist dieß ohne weiters begreiflich, weil sie eben entweder das Fach, oder die Volksschule, oder beides zugleich nicht kennen, sich aber natürlich doch ein Urtheil über beides zutrauen, da gewöhnlich Jeder eben so gut ein geborner Erzieher ist, als er auch wissen muß, was in die Volksschule gehört und wie es da zu behandeln ist. Für diese wäre es also überflüssig gewesen, ein Wort über den vorliegenden Unterrichtsgegenstand zu schreiben. Allein vielen Andern, denen, wie dem Verfasser, nicht Alles so leicht oder zum Voraus schon abgemacht vorkommt, was die Volksschule betrifft, wird es nicht unlieb sein, den geometrischen Unterricht der Volksschule nach seiner ganzen Gliederung entwickelt zu sehen. — Mit besonderer Sorgfalt suchten wir auch auf das hinzuweisen, was diesen Unterricht fast für alle Richtungen des Berufslebens wichtig macht. Man sagt von der gegenwärtigen Zeit, daß sie sich besonders durch ihre materielle Richtung charakterisire, und bricht in Folge davon oft in Lamentationen aus über die Vernachlässigung der idealen Richtung in Wissenschaft und Leben. Es kann zwar nicht geleugnet werden, daß auf der einen Seite die großartigen industriellen Anstrengungen, auf der andern Seite die vermehrten Sorgen für eine wenn auch nur kümmerliche Existenz in der That in einem gewissen Maße vom rein Idealen ab- und zum Materiellen hinleiten, daß z. B. in Hinsicht auf das Gebiet, von dem wir hier besonders sprechen, die nothwendige Begeisterung und das entschiedene Bestreben, durch die Volksbildung, als erstes und natürlichstes Mittel, das geistige und körperliche Wohl des Volks begründen zu helfen, allerdings etwas erschlafft zu sein scheinen. Allein trotz alledem könnten wir hierüber kein Klagelied anstimmen, indem der Grundzug unserer Zeit seine nur zu tiefe Berechtigung hat, und wir möchten umgekehrt von der Volksschule verlangen, daß sie mehr, als sie bisher konnte, die Bedürfnisse des Lebens unserer Zeit ins Auge fasse. Es verdient große Anerkennung, daß man sich in der Gegenwart

viel und ernstlich mit jenen Fragen beschäftigt, die sich auf die ökonomische Hebung des Mittelstandes, auf möglichste Verhinderung der Armennoth, auf Förderung eines arbeitsamen sittlichen Lebens ꝛc. beziehen, aber es will uns scheinen, daß bei den betreffenden Rathschlägen oft mit einer gewissen Scheu ein sehr wirksamer Hebel bei Seite gelassen werde. Oder liegt denn nicht in der Volksbildung ein sehr natürliches und vor allen nachhaltig wirkendes Mittel zur Erreichung jener Zwecke, ein Mittel, gegen welches so manches andere als bloß vorübergehendes Palliativ erscheint? — Man vollende die Organisation der Volksschule in der Art, daß es ihr möglich wird, neben ihren mehr idealen Zwecken, auch wirklich, wie man sagt, fürs Leben zu arbeiten, so, daß sie zwar keine Berufsarten zu lehren, wohl aber den Schüler in der Weise heranzubilden hat, daß er, er mag einen Beruf ergreifen, welchen er wolle, zuvörderst mit gutem Willen, dann aber auch mit dem Bedürfniß arbeite, bei dem, was er thut, zu denken, und daß er vermöge seiner gebildeten Denkkraft, seines gebildeten Auges, seiner gebildeten Hand und seines, wenn nicht gebildeten, doch einigermaßen geläuterten Geschmackes sich immer mehr vervollkommne und so zu einem tüchtigen und arbeitslustigen Mitgliede der Gesellschaft werde. Und hier ist es nun vorzugsweise die Mathematik, die dem Schüler ein geübteres Anschauungs- und Abstraktionsvermögen, einen leichtern und freieren Blick, eine schnellere Einsicht in die Verhältnisse und das Vermögen, sich leicht und sicher zu orientiren, verschafft. Die einfachsten Hülfsmittel der Mathematik geben (namentlich in Verbindung mit der Naturkunde) dem Schüler in tausend Fällen Winke und bestimmte Anleitung zum vernünftigen und vortheilhaften Betrieb der bürgerlichen Berufsarten, wie der Landwirthschaft, der Handwerke, der Gewerbe, des Handels ꝛc., so daß derjenige, der auch nur in dienender Stellung künftig thätig, doch als tüchtigerer und geschickterer Arbeiter eher gesucht und besser gehalten sein wird. Von diesen Gesichtspunkten aus haben wir den sogenannten praktischen Theil unsers Schulfachs entworfen und ausgeführt. Ueber die mehr ideale Seite des Unterrichts gibt theils die hier gebotene Durchführung des Lehrstoffs, theils der vor zwei Jahren erschienene erste Theil unseres Handbuches, den der Beurtheiler neben dem vorliegenden zweiten nicht unberücksichtigt lassen wolle, hinreichenden Aufschluß. Zur Vollendung des Ganzen erscheint sofort ein kleines „Uebungsbuch zum Rechnen, Messen und Maßzeichnen für die III^te^ (Ergänzungs-) Stufe der schweizerischen Volksschulen", dessen Druck bereits begonnen hat. Es werden darin auch diejenigen praktischen Aufgaben noch nachgeholt, die in dem vorliegenden Band aus Mangel an Raum nicht mehr aufgenommen werden konnten. Einzelne Unebenheiten, die sich bei der Ausarbeitung fast unvermeidlich ergaben, möge die Wohlwollenheit des Lesers entschuldigen.

Neujahr 1856.

Der Verfasser.

Die Geometrie

der

Volksschule.

Motto: Die Geometrie hat ihren Ausgangspunkt in der empirischen Beobachtung und Anschauung, ihren Schwerpunkt und Stützpunkt in der geistigen Umbildung und Verarbeitung und ihren Ziel- und Endpunkt in der praktischen Anwendung.

Erste Abtheilung.

Die Geometrie der Volksschule im Allgemeinen.

§ 1.

Einleitung.

Wir haben im ersten Theil dieses Handbuches bereits einige Blicke auf die Geometrie der Volksschule im Allgemeinen geworfen; es folgt nun zuerst die Aufgabe, den geometrischen Unterricht noch einläßlicher und im Zusammenhange ins Auge zu fassen, und hierauf ist dann der spezielle Unterricht in diesem Fache nach allen seinen Hauptrichtungen auf den einzelnen Schulstufen durchzuführen.

§ 2.

Ueber die Nothwendigkeit des geometrischen Unterrichts in der Volksschule.

Vornämlich in praktischer Richtung.

Im ersten Theile dieses Handbuches wurde darauf hingewiesen, daß schon der Idee der Volksschule gemäß die Ausbildung des mathematischen Sinnes in der allgemeinen Aufgabe des Volksschulunterrichts mit Nothwendigkeit inbegriffen sein müsse, und es wurde sodann besonders noch

die Wichtigkeit des mathematischen Bildungsfaches in Hinsicht auf intellektuelle, moralisch ästhetische und praktisch reale Bildung hervorgehoben. Was dort vom mathematischen Unterrichte überhaupt gesagt ist, soll hier insbesondere auch vom geometrischen gelten.

Es stehen aber dem letztern an manchen Orten noch so viele Hindernisse entgegen, daß wir vor Allem aus noch eindringlicher auf die Nothwendigkeit, ja Unerläßlichkeit desselben hinweisen müssen und zwar hauptsächlich um der vielen aus ihm sich ergebenden praktischen Vortheile willen, auf die wir im ersten Theile weniger ausführlich eintreten wollten, da dort vornämlich der Rechnungsunterricht in Betrachtung fallen sollte, dessen praktischer Nutzen bereits allgemein ebenso bekannt als anerkannt ist, und weßwegen uns dort überflüssig schien, denselben bis ins Einzelne zu verfolgen.

Von der Geometrie läßt sich aber das Gleiche bis heute noch nicht behaupten; deßwegen wollen wir uns hierüber an diesem Orte etwas ausführlicher aussprechen.

Unsere Zeit charakterisirt sich besonders dadurch, daß in ihr das Volksleben im allgemeinsten Sinne zu einer weit größern Bedeutung gelangt ist, als in allen frühern Epochen, daß namentlich die Gesammtgesellschaft die volkswirthschaftlichen Interessen mit größerer Selbstständigkeit, in größerer Ausdehnung und mit größerem Erfolge pflegt und benutzt, und dieß Alles hauptsächlich in Folge davon, daß der Grundsatz der Freiheit jeder menschlichen Thätigkeit (ohne Anderer Rechte zu verletzen) und der der Gleichberechtigung aller Einzelnen zu immer größerer, wahrhafterer Geltung gelangt.

Es hat sich hiedurch ein volkswirthschaftlich-industrielles Leben entwickelt, das bereits zu großartigen Umgestaltungen geführt hat und noch zu bedeutsameren führen wird. Ein Stillstand für ein einzelnes Volk ist hier nur möglich, wenn es sich selbst den empfindlichsten Schlag versetzen, wenn es sich selbst aufgeben will.

Eine glückliche Fortbildung des volkswirthschaftlich-industriellen Lebens verlangt aber vor allen noch so nothwendigen materiellen Bedingungen zunächst geistige Hülfsmittel. Neben denjenigen der allgemein menschlichen Bildung sind es vorzüglich die praktischen Wissenschaften, welche die menschliche Gesellschaft jetzt in ihren Dienst zieht. Es sind dieß die Hauptwissenschaften der Neuzeit, diejenigen, die durch ihre

Hinwendung auf das wirkliche Leben dazu berufen sind, mittelbar oder unmittelbar die Zwecke der Gesellschaft und ihren Fortschritt zu fördern.

Diese praktischen Wissenschaften bilden eine Lebensbedingung der neuern bürgerlichen Gesellschaft. Und hier ist es hauptsächlich die Volksschule, d. h. die vollständig ausgebaute und organisirte, bis zum Eintritt der Jugend ins bürgerliche Leben in angemessener Weise fortwirkende Volksschule *, welche die große Mission hat, die allgemeine Verbreitung der Grundlagen jener Wissenschaften hauptsächlich und wesentlich zu begründen **.

Nicht nur einer Klasse von Bürgern (wie ehedem einer Kaste von Gelehrten) sollen die Segnungen einer allgemein menschlichen und insbesondere auch praktischen Bildung zu Theil werden, sondern allen.

Es ist weiter nichts als ein gelehrtes Vorurtheil, daß die Wissenschaften sich absondern müssen, und daß die Resultate derselben nicht einem größern Ganzen zu gut kommen sollen. Im Gegentheil ist es die Aufgabe der Gegenwart, Alles wodurch die Wissenschaften dem Leben nützlich und heilsam sein können, möglichst Vielen und nach und nach der ganzen Gesellschaft zum Vortheil gereichen zu lassen, so wie es überhaupt im Geiste der Fortentwickelung des gesellschaftlichen Lebens liegt, daß Alles, wovon das wahre Glück und Heil des Gemeinwesens abhängt, von Allen je länger je mehr erkannt und gewürdigt werde ***.

---

* Also nicht die bloße Kinderschule, wie solche z. B. in der Schweiz unter dem Namen der Elementar- und Realstufe, oder der Primarschule, besteht. Wir müssen hier diejenigen Leser, die mit der Organisation unsers Volksschulwesens nicht ganz vertraut sind, auf den ersten Theil unsers Handbuches, insbesondere auf § 2, § 10 und die Paragraphen, welche über die Realergänzungsschule und Zivilschule handeln, verweisen.

** Hierdurch ist, was zur Unterstützung derselben Aufgabe von Seite der Literatur, von Seite der höhern Unterrichtsanstalten ꝛc., neben den speziellen Fachzwecken angestrebt werden kann, nicht ausgeschlossen.

*** Wie schon in Hinsicht auf das Alterthum Cicero so schön sagt: Sokrates habe die Philosophie vom Himmel gerufen und in die Wohnungen der Menschen eingeführt, so sagt Adam Smith im Hinblick auf die Neuzeit wohl noch mit größerem Rechte: die Industrie habe die Wissenschaften mitten in den Markt des Lebens hineinversetzt. Sehr energisch wies schon vor den dreißiger Jahren Lord Brougham darauf hin, daß die Resultate der praktischen Wissenschaften eine immer allgemeinere Verbreitung unter dem ganzen Volke finden

Man thut in der Gegenwart vieles auch für das bessere ökonomische Fortkommen der arbeitenden Klassen; man unterstützt die Heimgesuchten, man lindert die Armuth, man bietet passende Arbeit; allein in unserer vorzugsweise industriellen Gesellschaft ist ein gutes ökonomisches Fortkommen nur mit einem bestimmten Grad geistiger Bildung und praktischer Tüchtigkeit möglich und ohne dieselben helfen vorübergehende Unterstützungen meist wenig.

Man gebe aber jenen Volksklassen eine nachhaltigere, tiefer ins bürgerlich industrielle Leben eingreifende Bildung , durch welche sie befähigt werden, die Verrichtungen der verschiedenen Berufsarten mit mehr Einsicht, mit mehr praktischem Geschick und Erfolg zu vollziehen — und diese Unterstützung wird eine nachdrucksvolle und gesegnete sein!

Unter jenen Wissenschaften, die von so großer praktischer Bedeutung fast für alle Berufsthätigkeiten der bürgerlichen Gesellschaft sind, nimmt die Mathematik mit ihren Anwendungen eine Hauptstelle ein. Und hier ist es insbesondere die Geometrie, die fürs bürgerliche Leben von weit größerer Wichtigkeit ist, als es gewöhnlich von Vielen eingesehen wird, und die für dasselbe auch einen weit größern Gewinn bringen kann und wird, wenn ihre Grundlagen und deren Anwendungen einmal durch die Volksschule mehr zum Gemeingut Aller gemacht werden.

Die Geometrie ist es eben vorzugsweise, die, in der Volksschule gehörig betrieben, deren Schüler für die praktische Berufsthätigkeit in dieser oder jener Richtung besonders geschickt macht, indem sie zunächst den sichern Blick und richtigen Angriff fast für jede Hantirung unterstützt. Sie gibt indessen nicht nur die Mittel an die Hand, die Gegenstände in den meisten produzirenden Berufsarten leichter zu be-

---

müssen: „die arbeitenden Klassen", sagt er, „fangen an, die ihnen gebührende Stellung in der Gesellschaft einzunehmen. Es war eine ebenso unwahre als gehässige Bezeichnung, wenn man sie die „untern" Klassen nannte. Die Nationalerziehung ist ein Gegenstand, dem die Regierungen die ernsteste Sorge widmen sollten. Es war stets mein Wunsch und meine Hoffnung, daß die arbeitenden Klassen tüchtige Züge aus dem Becher der Wissenschaften thun möchten. Die Zeit ist vorbei, wo man die Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse hemmen konnte. Jetzt hat sich die Zeit geändert; ein glücklicheres Loos soll den arbeitenden Klassen beschieden sein; der Strom des Wissens fließt unter ihren Augen; sie mögen trinken nach Herzenslust."

wältigen und besser der Bearbeitung, der Umformung ꝛc. zu unterwerfen oder zur Konstruktion ꝛc. in irgend welcher Bestimmung zu benutzen; sondern sie lehrt überdieß auch, schon zum Voraus einen richtigen Ueberschlag und Plan von der Arbeit selbst, von ihren Erfordernissen, von der Größe des bei der Arbeit ins Auge zu fassenden Ganzen sc wie seiner einzelnen Theile und derem gegenseitigen Verhältnisse ꝛc. zu machen; sie weist also auf diejenigen vielfachen Bedingungen hin, von denen hauptsächlich das rechte Gelingen der Arbeit abhängt. *

Man frage die Handwerker, besonders die konstruirenden, ob diejenigen Lehrlinge, die auch nur einige ordentliche geometrischen Kenntnisse und Fertigkeiten besitzen, sich nicht viel besser und bälder, ja oft fast ohne Mühe, in die Berufsarbeiten hineinfinden, während andere, denen die geometrischen Grundbegriffe und Grundoperationen fremd sind, sich gewöhnlich sehr schwerfällig und ungeschickt zur Arbeit anlassen. Dasselbe findet bei sehr vielen Arbeiten des Landbauers, des Gewerbsmanns u. s. w. statt. Natürlich, wer erst beim Meister, überhaupt erst in der praktischen Berufsthätigkeit sich die für die Anwendung nothwendigsten geometrischen Kenntnisse erwerben muß, begreift und erlernt sie viel schwerer, ja manchmal gar nicht recht, weil sie ihm hier nicht im rechten Zusammenhange und in der nöthigen Reinheit und Deutlichkeit, sondern höchstens nach zufälliger Veranlassung mitgetheilt werden können. Darin liegt aber für die Erlernung des Berufs sowohl als für dessen spätern einsichtigen und gedeihlichen Betrieb so viel Hemmendes, daß Manche die Entbehrung der nöthigen Bildung in diesem Fache nur zu sehr zu bedauern haben.

Es ist eine unbestreitbare Thatsache, daß unsere, wie man sagt, nur praktisch gebildeten Professionisten, deren Berufsthätigkeit sich auf irgend welche geometrischen Formen und Größen oder irgend welche geometrischen Beziehungen zu stützen hat, bei jedem Spezialfall, den sie bei ihrem Meister nicht gefunden, sich sehr unbeholfen und unpraktisch benehmen. **

---

* Wir reden hier nur von dem, was man in der Praxis zunächst der Geometrie verdankt; natürlich haben andere Fachgebiete wieder ihre besondere praktische Bedeutung und es wirken auch Momente aus verschiedenen Gebieten gewöhnlich zusammen.

** Es zirkuliren eine Menge der artigsten Erzählungen, die sich auf diese Thatsache beziehen und die, von allem Uebrigen abgesehen, besser als jede andere Betrachtungsweise die Beschränktheit der bloß rohen Praxis darstellen. So will z. B. ein Baumeister bei einem Schreiner eine sogenannte

Es bedarf aber nur ein geringes Nachdenken, um einzusehen, wie wichtig besonders in der Gegenwart ein geschicktes, rasches Begreifen und Ergreifen dieser oder jener Berufsart, dieser oder jener praktisch nützlichen Kunst ꝛc. für so Viele sein kann. Bei dem raschen Fortschritt der Industrie und ihren schnellen Umbildungen kann sich keiner darauf verlassen, daß sein Beruf für alle Zukunft ein sicherer sein werde; der Ertrag des einen oder andern Gewerbs ist oft ein sehr variabler.

Wenn nun der Volksschule der Gegenwart auch eine wirklich praktische Bedeutung zugemessen werden soll, so muß sie ihren Schülern die nöthige Kraft und Geschicklichkeit verleihen, die Geschäfte des gewöhnlichen bürgerlichen Verkehrs schnell verstehen und gewandt vollziehen zu lernen, damit der Einzelne aus einer Berufsart, aus einer Werkstätte, die verdienstlos geworden, nöthigenfalls in eine andere übergehen und hier sofort wieder den Anforderungen der Zeit genügen kann. In wie manchen Gegenden sind nicht die wohlgemeintesten Versuche zur Einführung nützlicher, bedeutenden Verdienst versprechender Industriezweige schon deßwegen gescheitert, weil der Bildungsstand der Bewohner in rein geistiger wie in praktischer* Richtung zu wenig gefördert oder gar vernachlässigt war!

Wir wollen nun etwas spezieller nachweisen, welch großen fördernden Einfluß eine lebendige Einsicht in die geometrischen Grundbegriffe und Grundoperationen (verbunden mit der durch methodische Uebungen erzielten nothwendigen Fertigkeit) auf die meisten praktischen Beschäftigungen habe.

Vor allem aus sind es die geometrischen Maße (Längen-,

Equerre (ein rechtwinkliges verschiebbares Dreieck zum Zeichnen) anfertigen lassen und gibt zu diesem Zwecke die Länge der beiden Katheten-Seiten an. Der Schreiner aber wollte durchaus noch die Länge der dritten Seite wissen, denn der Herr Baumeister dürfe nur befehlen und es müsse ihm auch die dritte Seite so lang gemacht werden, als er wolle. — Am besten aber ist der Einfall jenes Maurermeisters, der — nachdem ein von ihm aufgeführter Kochherd eine so schiefe Lage hatte, daß jedes der eingelegten Kochgeschirre, wenn es mit Wasser angefüllt werden wollte, auf der einen Seite überlief und auf der andern noch nicht voll war, — ganz ruhig erklärte: die Schuld könne nicht an ihm liegen, er habe den Herd nach seiner Bleiwage gemacht und die sei gut, das Dorf müsse „halden" (schief liegen)!

* Natürlich sind hier hauptsächlich die mannigfaltigen Anwendungen aus dem Sprachgebiet, aus der Mathematik und der Naturkunde ꝛc. gemeint.

Flächen- und Körpermaße), die hier von Wichtigkeit sind. Es ist klar, daß man nur auf geometrischem Wege, durch geometrische Entwicklung (verbunden mit praktischer Uebung) den Schülern die rechte Einsicht in den Zusammenhang und das Wesen dieser Maße beibringen kann; denn um die Bedeutung derselben richtig aufzufassen, muß man die Natur der Linien, Flächen, Körper verstehen; dieß ist aber Sache rein geometrischer Thätigkeit, kein anderer Zweig, kein anderes Fach kann dieß lehren.

Darum begegnet vielen Leuten, die keinen oder wenigstens keinen wirksamen geometrischen Unterricht genossen haben, so häufig, daß sie gleichnamige Längen-, Flächen- und Körpermaße, d. h. solche, die nach derselben Grundeinheit benannt sind, mit einander verwechseln. Es versteht sich z. B. von selbst, daß, um die Bedeutung und den Zusammenhang der Maße: Fuß, Quadratfuß, Kubikfuß ꝛc. zu verstehen, durchaus geometrische (wenn auch nicht schwierige) Erkenntnisse erforderlich sind und daß ohne diese Erkenntnisse ein freier und gewandter praktischer Gebrauch dieser Maße gar nicht möglich ist.

Noch viel weniger ist unter gleichen Umständen ein Verständniß des Zusammenhangs der geometrischen Maße mit dem Gewichtssystem möglich. Wer wird ohne geometrische Kenntnisse begreifen, wie man z. B. das Gewicht eines Volumen Wassers, einer Holz-, Stein- oder Metallmasse ꝛc. statt durch die Wage mittelst des Maßstabes bestimmen kann.

Selbst der einfache Uebergang von den gewöhnlichen Kubikmaßen zu den Hohlmaßen und die mannigfachen hiemit verknüpften Maßverwandlungen werden dem mit der Geometrie nicht Vertrauten entweder nicht, oder nur schwer verständlich sein.

Eine genaue Kenntniß der Maße und Gewichte, verbunden mit der Gewandtheit, dieselben zu den verschiedensten Größenbestimmungen benutzen zu können, ist nun für alle praktischen Berufsarten fast gleich unerläßlich: der Landbauer, der Handwerker, der Fabrikant, der Techniker ꝛc. kann sie nicht entbehren.

Die meisten Größenbestimmungen, wenn sie nämlich nicht gerade zu den allereinfachsten gehören, lassen sich aber nicht gleich direkte durch die Benutzung der entsprechenden Maße ausführen, sondern es bedarf gewöhnlich zuvor einer rein geometrischen Betrachtung, vermöge welcher erst dann die verlangte Größenbestimmung durch eine spezielle Messung und Berechnung möglich wird.

Soll etwa, um ein ganz gewöhnliches Beispiel zu wählen, die Flächengröße eines ebenen dreieckigen Grundstücks nach Quadratfußen bestimmt werden, so ist zunächst klar, daß die Aufgabe nicht, wie es bei der Ausmessung gerader Linien geschieht, durch bloßes wiederholtes Anlegen des Maßes oder einer Zusammensetzung desselben gelöst werden kann, obwohl dieß wahrscheinlich der erste und volksthümlichste Gedanke zur Lösung der Aufgabe ist,* sondern es muß vorerst ein Gedankengang aufgesucht werden, durch den man, wenn er auch ursprünglich weniger nahe liegt, doch im Stande ist, der Aufgabe vollständig beizukommen.

Dieser Gedankengang kann z. B. folgender sein: Man überzeugt sich, daß das Dreieck die Hälfte eines Rechteckes ist, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Weiß man nun den Flächeninhalt des Rechtecks genau zu finden, so ist dadurch auch derjenige des Dreieckes, als der Hälfte von jenem, gefunden. Dieses Verfahren wird aber durchaus nur durch die Geometrie gelehrt und durch kein anderes Unterrichtsfach und keinen andern Kunstgriff!**

---

* Der erste, natürlichste Einfall ist in der Ausführung gewöhnlich nicht der leichteste, denn es zeigen sich hiebei meist so große Schwierigkeiten, daß man nach einem andern, mehr künstlichen Wege zu suchen genöthigt ist, der, wenn auch schwieriger der Idee nach aufzufinden, doch verhältnißmäßig schnell und leicht zum Ziele führt.

Die Geschichte der Wissenschaften und Künste weist diesen Entwicklungsgang auffallend nach.

** Auch durch den Rechnungsunterricht nicht! Wir sagen dieß ausdrücklich für diejenigen, die stets meinen, das Geometrische sollte beim Rechnungsunterricht flickweise behandelt werden, oder was sie mit dem schönern Ausdrucke bezeichnen: „den geometrischen Unterricht vollständig mit dem Rechnungsunterricht verbinden".

Es ist merkwürdig, wie man da herumfährt: Wegen vorhandener Uebelstände im Volksschulunterricht will man beständig noch neue, größere schaffen. Da findet man in so vielen pädagogischen und unpädagogischen Abhandlungen noch immer die (angebliche) Nothwendigkeit erörtert, den Zeichnungsunterricht mit der geometrischen Formenlehre, oder umgekehrt diese mit jenem, zu verbinden; oder man will, noch eben so häufig, die Geometrie dem Rechnen, mitunter auch ein Stück derselben der Geographie, ja der Naturlehre anhängen, was natürlich alles darauf hinausläuft, bald bei diesem, bald bei jenem Anlaß gewisse Kenntnisse nicht wirklich zu erzielen, sondern eigentlich zu erschleichen und wobei gewöhnlich noch mit großer Selbstgenügsamkeit dieses Pfuscherhandwerk, das den einen wie den andern Unterricht gleich sehr verderbt, „An-

Und bei den meisten Messungen, die nicht gleich unmittelbar vollzogen werden können, die also nicht gerade zu den allereinfachsten gehören, ist es insbesondere die geometrische Konstruktion, die mit in Anwendung kommt, oder die wenigstens als Erkenntnißquelle benutzt werden muß, wie es auch bei dem obigen Beispiel von der Dreiecksmessung der Fall ist. Wer keine Einsicht in die geometrische Konstruktion hat, der wird den bei diesem Beispiel nothwendigen Faktor der Höhe entweder gar nicht, oder dann nur rein mechanisch nach bloßer Imitation bestimmen können, in welch letzterem Falle er aber jeden Augenblick Gefahr läuft, irgend einen wichtigen Umstand zu vergessen, oder sonst einen Irrthum zu begehen, weil er eben den innern Grund von allem dem, was er thut, nicht kennt.

Also nur die wirkliche Einsicht in geometrische Verhältnisse kann hier helfen.

Nur durch diese Einsicht allein werden auch die Schüler der Volksschule die bürgerlichen Raummaße und Gewichte nach ihrem Zusammenhange und ihrer gegenseitigen Verwandtschaft auffassen und zu werthvollen Größenbestimmungen fürs Leben gebrauchen lernen. Wie vielerlei nützliche Uebungen gibt es da nicht, und auf wie manche Verhältnisse können sie nicht aufs vortheilhafteste einwirken!

Es ist nicht schwer einzusehen, daß der einfache Bürger und Landmann aus den Hülfsmitteln der Geometrie einen sehr wesentlichen Vortheil ziehen kann. Ist es z. B. nicht wünschenswerth, daß der künftige Bauer im Stande sei, seine Grundstücke selbst zu vermessen, nach gewissen Verhältnissen zu theilen und zu verwerthen? — daß er es verstehe, einen einfachen aber richtigen Plan von Haus und Hof aufzunehmen und deutlich und genau zu verzeichnen, so wie allfällige Veränderungen auf seinem Gute, wie z. B. Anlegung von Wegen und Stegen, Erd-Abtragung und Anlegung und Vieles dergleichen zum

---

schauungsunterricht" genannt wird. — An einen einfachen, naturgemäß zusammenhängenden geometrischen Unterricht, wobei nichts verfrüht und nichts verspätet, sondern jeder Theil der rechten Alters- und Schulstufe zugewiesen und so von selbst die nöthige Verbindung mit den andern Unterrichtsgebieten und dem praktischen Berufsleben erreicht wird, wollen oder können gar viele nicht denken.

Voraus zu planiren und darüber die richtigen Berechnungen zu machen? — daß er es verstehe, leichtere geometrische Konstruktionen zum Behufe dieser oder jener Vorrichtung, zur Anfertigung dieser oder jener landwirthschaftlichen Geräthe und Werkzeuge ꝛc. auszuführen, um Mangelhaftes zu verbessern, Zweckmäßiges und Gelungenes nachzubilden oder gar selbst zu erfinden, — daß er es insbesondere verstehe, z. B. von einem einfacheren Bau oder irgend einem durch Handwerksleute auszuführenden Gegenstande einen Riß nach eigener Idee zu entwerfen, aus dem sowohl die rechte Form als die wahre Größe des zu Schaffenden entnommen werden kann?

Gereicht es endlich (um noch einige speziellere Beispiele anzuführen) dem Bauersmann nicht zum Nutzen, wenn er alle die mannigfaltigen landökonomischen Kosten-, Betrags- und Ertragsbestimmungen,* die sich auf geometrische Messung und Berechnung gründen, und die bei einem rationellen Betrieb der Landwirthschaft sich ihm so häufig entgegenstellen, mit Leichtigkeit und Sicherheit auszuführen versteht?

Ist es ihm nicht nützlich, wenn er zum Voraus mit leichter Mühe bestimmen kann, wie viele Klafter (Kubikmaß) ihm z. B. sein stehendes Holz (in einer Partie Waldbäume) oder sein Torfgrund (von einer bestimmten Mächtigkeit) u. dgl. abwerfe; wie viele Kubikfuß Erde sich bei Ausfüllung oder Ausgrabung einer gewissen Landstrecke zum Zu- oder Wegführen ergeben werden; wie viele Malter oder Sester Getreide im Kasten; Aepfel, Erdäpfel, Rüben ꝛc. in den Hürden liegen, ohne daß er diese Früchte herauszunehmen und vorerst mit dem Hohlmaße zu messen braucht; oder wie viele Kubikfuße, Maße, Tansen, Saum ꝛc. dieser oder jener Trog, jene Stande, jenes Faß halte, ohne die darin liegende Flüssigkeit, mit der sie angefüllt sein mögen, zuerst herauszuschaffen und dann auf gewöhnliche Weise zu messen? Und so noch viele Beispiele.

Wenn nun schon dem Landbauer die Geometrie so viele der wichtigsten, seinen Beruf fördernden Hülfsmittel darbietet, so ist nicht minder einleuchtend, daß sie von eben so großer, ja noch größerer Wichtigkeit für die formenden und konstruirenden Handwerker und Techniker ꝛc. ist.

---

* Wie will der Bauer ein ordentliches landwirthschaftliches Rechnungswesen, eine ordentliche landwirthschaftliche Buchhaltung führen, wenn er die genannten Bestimmungen nicht recht oder gar nicht versteht.

Daß der Zimmermann einen Zimmerboden oder eine Wand, der Maurer eine Mauer ꝛc. nach dem Inhalte zu messen verstehe, macht lange nicht das Einzige aus, was diese Handwerker aus der Geometrie zu schöpfen haben und namentlich in der Gegenwart schöpfen müssen, wenn sie ihre Arbeiten mit Vortheil, geschickt und den gesteigerten Anforderungen entsprechend ausführen wollen.

Es ist hier neben vielem Andern hauptsächlich die Gewandtheit und Einsicht in der geometrischen Konstruktion, worauf man beim Schulunterricht viel zu wenig Gewicht legt, obwohl gerade dieser Punkt für alle Berufsarten, bei deren Ausübung die Verhältnisse der Form und Größe eine Hauptrolle spielen, von Wichtigkeit ist. Ohne die Kenntniß der geometrischen Konstruktion sind — wie oben schon angedeutet worden — gerade die Messungen, die oft für das Leben am wichtigsten sind, unmöglich. Die Hauptfaktoren des Messens, die Dimensionen oder räumlichen Abmessungen (perpendikuläre Richtungen) ergeben sich nur aus rein geometrischer Betrachtung und werden durch die Konstruktion oder eine verwandte Operation bestimmt.

Die Sprache der graphischen Darstellung, die sich deutlicher über Form- und Größenverhältnisse ausspricht als jede Wortsprache, ist ein Ausfluß dieser Konstruktion und ist bis auf einen gewissen Grad für den Bauer wie für den Handwerker gleich nützlich und nothwendig.

Es ist merkwürdiger Weise die beschränkte Ansicht noch sehr verbreitet, daß die praktische Seite des geometrischen Unterrichts nur im Messen (von Linien, Flächen und Körpern) bestehe, während gerade die geometrische Konstruktion, das geometrische Zeichnen, eine eben so wichtige praktische Seite dieses Unterrichts ausmacht, die zudem die erstere noch vielfach bedingt. Der darstellende Theil der Geometrie wird fürs Berufsleben je länger je wichtiger. Mancher hat sich eine gute Idee sei es für ein Bauwerk, oder für eine Maschine, oder für ein nützliches Geräthe oder eine zweckmäßige Vorrichtung gebildet, aber er kann sich hierüber nicht gehörig verständlich machen, weil er die graphische Darstellung, die geometrische Konstruktion, nicht kennt, durch die er auch vor Allem aus sich selbst die hinreichende Klarheit und Sicherheit über die Ausführung seiner Idee verschaffen könnte.

Man gebe aber dem jungen Knaben Zirkel, Lineal und Stift in die Hand, man lasse ihn auf vernünftig fortschreitendem Wege die geometrischen Größen bilden, in ihren Formen durch Konstruktion darstellen und

nach Einheiten bestimmen oder ausmessen; man veranlasse ihn hiebei, die Konstruktion und Bildung so einzurichten, daß er dadurch mit absoluter Nothwendigkeit zur Erkenntniß der Haupteigenschaften der geometrischen Größen gelangt, die er sich gebildet hat*, wodurch ihm diese Eigenschaften zu wesenhaften werden, deren er sich bewußt ist, so lange er der einzelnen Größen selbst bewußt bleibt. Durch dieses Bewußtsein wird das Aufgefaßte in ihm zu einer wirkenden Kraft, die stets fortarbeitet und das Erlernte in tausend und tausend Fällen des Lebens in neuer Form und auf neue Weise geltend, d. h. wirklich praktisch macht.

Man lasse ihn weiter die geometrischen Maße (so wie sie gesetzlich bestimmt sind) in Wirklichkeit handhaben, so wie er Zirkel und Lineal handhaben und mit denselben einfachere Untersuchungen und Uebungen machen gelernt hat. Diese Uebungen im freien Raume gehen vom Einfachern zum Zusammengesetztern und Schwierigern über, wie diejenigen, die auf der Tafel oder dem Papier angestellt wurden.

Von der Handhabung des Zollstabes, der Meßschnur und des rechtwinkligen Dreiecks im Zimmer gehe man über zu derjenigen der Meßlatte, der Meßkette und des Meßkreuzes (Kreuzscheibe) im Freien, überall vermittle man den Uebergang zwischen dem Idealen und dem Konkreten und lasse dann den Schüler selbst zugreifen und operiren, damit er wirklich messen und Größen bestimmen, konstruiren und darstellen, und nicht bloß darüber schwatzen, Regeln hersagen und einige Beispiele nachahmen lernt, die er sobald wieder sammt dem ganzen angelernten Kram vergißt, als er die Schule nicht mehr besucht.

Was der Schüler auf die oben beschriebene Weise selbst erfahren und erprobet von den einfachsten Versuchen, Uebungen, und Untersuchungen mit Lineal, Zirkel und Stift auf dem Papier bis zu den schwierigern Größenbestimmungen im freien Raume und den entsprechenden Konstruktionen und Zeichnungen, das gibt ihm die wahre Einsicht, Ueberzeugung und Kraft, das war für ihn die rechte Anschauung in der Wirklichkeit, und das macht ihm das Gelernte

---

* Man nennt diesen Weg der Erkenntniß denjenigen durch lebendige Veranschaulichung und Anschauung der entstehenden geometrischen Größen.

zu seinem wahren Eigenthum, das er nicht so leicht verliert wie jene Kenntnisse, welche die Pädagogen der platt praktischen Richtung ihre Schüler ohne weiteres in innerlich unverstandenen Regeln anlernen lassen.

Der Schüler, der Konstruiren und Messen auf dem oben angedeuteten Wege aus wirklichen Verhältnissen und mit eigenem Bewußtsein gelernt hat, der hat eine Kraft erlangt, vermöge welcher er alle seine Verrichtungen, durch die er in Wechselverkehr mit Größenverhältnissen tritt, zweckmäßiger, gewandter und geschickter zum Ziele führt, als jeder, der sich diese Kraft nicht selbst erworben und der auch übrigens noch so viele Regeln gelernt haben möchte.

Von großer praktischer Wichtigkeit sind hiebei die Kenntnisse aus den Naturfächern. Ein geweckter und geübter mathematischer Sinn vermag diese Kenntnisse so vielfach zu benutzen, daß der Schüler hieraus in jeder praktischen Berufsart Vortheil schöpfen kann. Die angewandte Geometrie, wie großentheils auch das angewandte Rechnen, wird in Verbindung mit der Naturkunde zur Mathematik für das technische Geschäfts- und Berufsleben. Ueberhaupt bietet das geometrisch-mathematische Gebiet Hauptanhaltspunkte zur Kenntniß und Erforschung der Natur. Hierauf ist in der Auswahl von passenden Aufgaben und Uebungen für die vorgerücktern Schulstufen besonders zu achten.

Die hier berührte Verbindung mit der Naturkunde ist natürlich nicht in dem Sinne zu nehmen, wie Viele von einer Verbindung der Geometrie mit dem Rechnen oder dann mit dem Zeichnen sprechen, nämlich so, daß das Geometrische bloß als Anhängsel oder als Flickwerk bald beim Rechnen, bald beim Zeichnen, oder bei der Naturkunde auftauche und je nach der Veranlassung, ohne eigenen Zusammenhang, bald so oder so behandelt werde; und eben so wenig soll damit gesagt sein, daß die Naturkunde nur so weit in Berücksichtigung falle, daß einzelne Naturkenntnisse bloß bei den Anwendungen des Rechnens und der Geometrie gelehrt werden sollen.

Gegen eine solche Verbindung kann man sich nicht kräftig genug verwahren, denn Unkenntniß, Bequemlichkeit, oft auch die wirkliche Ueberladung des einzelnen Lehrers durch eine zu große Schule führen darauf längst schon wiederholt zurück. Ueberdieß macht sich immer noch einigermäßen das retrograde Bestreben geltend, die Volksschule durch Be-

schneidung und Verstümmelung des nothwendigen Unterrichtsstoffes wieder auf den Zustand der alten Schule zu reduziren.

Wir haben uns über diesen Punkt im ersten Theil des Handbuches einläßlich ausgesprochen und können hier also einfach darauf hinweisen.

Aus dem Obigen sollte nun hinreichend sich ergeben, daß die Geometrie einen Boden hat, der gewiß praktisch genug ist, ja daß das Messen und Konstruiren, oder das geometrische Zeichnen, das durch die Geometrie gelehrt wird, in manchen Fällen, was das Praktische anbelangt, dem längst als praktisch anerkannten Rechnen vorangeht und dasselbe bedingt.

Denn das Rechnen wird im gewöhnlichen Leben von allen denjenigen, die nicht durch weitern Unterricht über das Alltägliche hinausgeführt sind, nur da angewendet, wo das Zählbare als solches gleich gegeben ist und die zu zählenden Einheiten gewissermaßen auf der Hand liegen. Wo aber die zu zählenden Einheiten noch im kontinuirlichen Ganzen und nicht als diskrete Theile vorliegen, da müssen diese Leute gewöhnlich das Rechnen bleiben lassen; denn da muß die Einsicht in die künstlichere Größenbestimmung, wie die geometrische Messung ꝛc., vorangehen.

Mancher kann nun gerade in denjenigen Fällen, wo das Rechnen am meisten praktischen Vortheil und materiellen Nutzen gewähren würde, eben aus dem Grunde nicht rechnen, weil er die geometrischen Grundlagen nicht kennt, aus denen die Rechnung entspringen würde. Der Weitergeführte rechnet aber in manchem Gebiete, wo Viele nicht begreifen können, daß es da etwas zu rechnen gibt; denn den rechten Sinn und Anlaß zum Rechnen schafft in so vielen Fällen erst die geometrische Thätigkeit, ohne welche bloße Rechnungskenntnisse uns im Berufsleben oft sehr wenig helfen.

Wenn nun nach Obigem nicht weggestritten werden kann, daß die Geometrie zur Unterstützung und zu besserm und einsichtigerm Betrieb der Landwirthschaft, der Handwerke, sowie vieler Gewerbe ꝛc.* Haupthülfsmittel

---

* Der Mangel der nöthigsten geometrischen, überhaupt mathematischen Kenntnisse bei Handwerkern und vielen Gewerbtreibenden hat dazu geführt, daß an manchen Orten, besonders im Winter, Sonntagsschulen für Handwerker ꝛc. oder öffentliche Lehrkurse (eine Art praktischer Vorlesungen) für dasselbe Publikum gehalten werden. Geometrie und zeichnende Fächer, Naturkunde (vornämlich auch Mechanik) ꝛc. bilden einen Hauptlehrgegenstand bei diesem Unterricht. Solche Kurse können in der That großen Vortheil stiften und sind in Berücksichtigung der gegen-

darbietet, die bei den strengen Anforderungen, welche die Gegenwart an alle diese Berufsarten stellt, nur mit unvermeidlichem Nachtheil und Schaden ermangelt werden können; so ist die von Kurzsichtigen oder gar von Gegnern der Volksschule ausgehende Tendenz, die Geometrie wie überhaupt den Bildungsstoff, den sie nicht innerhalb der Gränzen des altbeliebten Unterrichtsgebiets von „Lesen, Schreiben, Rechnen, Singen" aufzufinden vermögen, aus der Volksschule zu weisen, durchaus einerlei mit dem Beginnen, der Zeitentwicklung, dem geistigen Fortschritt entgegenzutreten und die Berufsstände zu ihrem Verderben darniederzuhalten.

Und wenn sogar einzelne Lehrer, die der Ausbildung des Schulwesens nicht genugsam zu folgen vermochten, nur das praktisch finden können, was seit Altem in der Schulstube geduldet war, „indem sie nicht verwegne Neuerung im altgewohnten gleichen Gang des Lebens tragen"; so ist zu hoffen, daß sie bald aus dem Widerspruch gerathen möchten, in welchem sie sich mit der ganzen Zeitrichtung und der Entwicklung der gegenwärtigen Gesellschaft befinden, und daß sie einsehen lernen, daß für das fortgeschrittene Volksleben nicht mehr ausreichend sein kann, was allenfalls für frühere, beschränktere Verhältnisse noch so genügen mochte, sondern daß diesem Volksleben alle diejenigen geistigen und praktischen Hülfsmittel zugewendet werden **müssen**, durch die es seinen gesunden Zustand bewahren und einer glücklichen Zukunft entgegenblühen kann.

Die Uebelstände, die noch an den meisten Orten darin bestehen, daß noch nicht alle Schulstufen gehörig organisirt sind, dürfen nicht darauf führen, das Unerläßliche in der Volksbildung fallen zu lassen, sondern müssen gerade darauf hinleiten, daß das Unerläßliche der lebenskräftigen Herstellung sämmtlicher Schulstufen erreicht werde, durch deren gedeihliche mit dem praktischen Berufsleben im rechten Verhältniß stehende Wirksamkeit die Volksschule erst das werden kann, was sie soll: Eine Hauptquelle der geistigen Erhebung und der ökonomischen Wohlfahrt des Volks.

---

wärtigen Bildungsverhältnisse sehr zu empfehlen. Besser aber wäre immerhin, eine wahre Volksschule hätte bereits alle diese Leute gelehrt, was man bei vorgerücktem Alter und mehr zufälligem Unterricht doch nur schwer, ja oft gar nicht mehr lernt.

Es dürfte endlich auch Solche geben, welche zwar die Nützlichkeit geometrischer Kenntnisse und Fertigkeiten für die praktischen Berufsarten zum Voraus anerkennen, allein darüber noch nicht im Klaren sind, wer diese Kenntnisse lehren soll: ob die Volksschule, ob besondere Anstalten, ob endlich das Berufsleben selbst?

Daß man in dem Berufsleben vollauf zu thun hat mit den speziellen Richtungen und Verrichtungen desselben, das lehrt die fortwährende Erfahrung. Ueberdieß müssen erst die wichtigsten wissenschaftlichen Erkenntnisse ins Berufsleben selbst eingedrungen sein, bevor von denselben aus für die Mittheilung und Verbreitung wissenschaftlich praktischer Hülfsmittel etwas zu erwarten ist.

Und auch dann noch könnten die Mittheilungen von dieser Seite nur zu unzusammenhängenden und zerstückelten Resultaten führen, wenn nicht ein wirklicher planmäßiger Unterricht neben der Anleitung zu den speziellen Berufsgeschäften Statt fände. — Diesen Unterricht kann aber unter allen Umständen keine besondere Anstalt besser ertheilen und zweckmäßiger pflegen als die Volksschule.

Sie umfaßt die Kinder aller Stände und Berufsarten, durch sie wird dafür gesorgt, daß keines leer ausgehe, sie hat eben hauptsächlich zur Aufgabe, einen allgemein bildenden und allgemein vorbereitenden Unterricht zu geben, indem sie weder speziell ausschließlich diesen oder jenen oder irgend einen Beruf ins Auge fassen, sondern das lehren und darin anregen will, was Allen nützlich sein kann. Und hier sollte sich auch aus Obigem ziemlich deutlich ergeben haben, daß die „Geometrie der Volksschule" kein bloßes Spezialgebiet für einzelne Individualiäten, sondern einen nothwendigen Bildungs- und Vorbereitungsstoff für Alle bildet, indem sie sogar gewöhnlichere Arbeiten des Lebens zu erhellen vermag.

Allein wird die Volksschule diesen Unterrichtsgegenstand auch in der rechten gedeihlichen Weise lehren, wird sie — vom Leben etwas abgezogen — denselben nicht in zu abstrakter und unverdaulicher Weise behandeln, so dürfte man noch fragen?

Es ist wahr, daß früher Manche darin fehlten, daß sie die Anfänge der wissenschaftlichen Elementarmathematik als denjenigen mathematischen Unterrichtsstoff betrachteten, der ohne Weiteres in das Volksschulgebiet passe und der nur nach den verschiedenen Partieen dieser Elemente auf die einzelnen Schulstufen vertheilt zu werden brauche, um da als ganz geeigneter

Lehrstoff zu dienen. Allein hievon kam man längst schon zurück und es hat sich seit dieser Zeit allmälig durch viele Bearbeitungen und mannigfache praktische Versuche ein formell und materiell eigenthümliches Lehrgebiet herausgebildet, das als die Mathematik der Volksschule auftritt.* Es schließt dasselbe schon in seinem Wesen den Charakter seiner Methode und der Ausdehnung und Zweckbestimmung seines Stoffes in sich, und mag sich hiegegen auch noch so manche Privatansicht stemmen, sei es aus Unkenntniß oder aus Eitelkeit, sei es aus besonderen Liebhabereien oder falsch verstandenen Selbstständigkeitsrücksichten: **Methode und Stoff werden diesem Wesen und diesem Zwecke gemäß in der Hauptsache so lange als bestimmt gesichert angesehen werden können, als die Volksschule die allgemeine Bildungsanstalt der Jugend des ganzen Volks sein wird.**

Da nun nach Allem, abgesehen von der Wichtigkeit des geometrisch-mathematischen Unterrichts in Hinsicht auf die Verstandes-, Gemüths- und Willensfakultät des Menschen (welche Gesichtspunkte wir schon im I. Theil unsers Handbuches einläßlich erörterten) die Nothwendigkeit, ja Unerläßlichkeit geometrischer Kenntnisse und Fertigkeiten fürs praktische Berufsleben je länger um so weniger bestritten werden kann, als die fortschreitende industrielle Gesellschaft unserer Tage von dem Einzelnen immer mehr Einsicht und Tüchtigkeit im Gebiete der Form und Größenverhältnisse verlangt, und da ferner von keiner andern Seite und keiner andern Anstalt her eher eine allgemeinere Verbreitung dieser Kenntnisse möglich ist, als durch die Volksschule, so ergibt sich jetzt die Aufgabe, darzustellen, in welchem Sinne und in welcher Weise der Zweck des geometrischen Unterrichts in der Volksschule am naturgemäßesten und erfolgreichsten erreicht werden dürfte.

§ 3.

Umfang und Inhalt der Geometrie der Volksschule.

Wie die Mathematik der Volksschule nicht als gleichbedeutend angesehen werden darf mit der Elementarmathematik im Allgemeinen, so ist auch insbesondere die Geometrie der Volksschule weder als eine Planimetrie noch als eine Stereometrie im üblichen Sinne dieser Ausdrücke, noch als beides zugleich zu betrachten. Jeder Theil der Elementarmathematik bildet

---

* Siehe die Charakteristik dieses Gebiets, Seite 4 bis 6 unserer Anleitung zum Rechnungsunterricht der Volksschule.

nämlich für sich einen bestimmten Abschluß, d. h. einen Zusammenhang von Resultaten, die alle auf gleich hoher Stufe der Erkenntniß stehen, alle die Früchte des ausgebildeten Verstandes sind und immer nur sein können. Die Geometrie der Volksschule dagegen ist ein fließender Entwicklungsgang von den einfachsten kindlichen Anschauungen der Raumgegenstände und der Bildung der ersten und einfachsten Begriffe von Raumgrößen und ihren Formen an bis zu den kombinirtern geometrischen Operationen, Uebungen und deren Anwendungen aufs gemeine Leben. Sie ist daher etwas Anderes als irgend ein Lehrbuch der reinen oder angewandten Geometrie oder eines Theils derselben, ist also weder eine Euklid'sche, noch eine Legendre'sche, noch eine Steiner'sche, weder eine synthetische, noch eine anlytische, weder eine ältere noch eine neuere Geometrie; weil sie nicht einen Abschluß der Vernunfterkenntnisse des ausgebildeten Menschen, sondern den Prozeß der erwachenden und sich fortwährend erweiternden Einsicht und Thätigkeit des in der Entwicklung begriffenen Menschen im geometrischen Größengebiete darstellt.*

Die Geometrie der Volksschule umfaßt natürlich in mancher Hinsicht weit weniger Stoff als der geometrische Unterricht mancher wissenschaftlicher oder gar gelehrter Schulklassen, und doch hat sie in anderer Beziehung wieder einen größeren Umfang und eine größere Vollständigkeit als jener Unterricht oft nicht hat. Wenn z. B. in der Maturitätsprüfung an einer Hochschule, was die Geometrie anbetrifft, nur verlangt wird, daß der Uebertretende die Planimetrie verstehe (wobei er dann auch in vielen Fällen für immer stehen bleibt), so erhält dagegen der Schüler der Volksschule bis zu seinem Austritt aus den obersten Klassen in so weit einen umfangsreichern Unterricht, als er auch mit den wichtigern Sätzen der Stereometrie und deren Anwendungen bekannt gemacht wird, — wiewohl hinwiederum dieser Unterricht keineswegs auf wissenschaftliche Strenge und Lückenlosigkeit in irgend einem Gebiete Anspruch macht. Oder wenn an manchen Lehranstalten zwar das System der Elementargeometrie vollständig und lückenlos gelehrt wird, so hat dagegen der austretende Volksschüler dieses wissenschaftliche Gebäude we-

---

* Eben hat man bis jetzt fast immer, wo man es strenger nehmen wollte, dem Volksschüler von Anfang an nur die geometrischen Vernunftschlüsse des reifern Verstandes vorgelegt und daher auch eben so oft mit dieser Geometrie in der Volksschule Fiasco gemacht.

nigstens in der Form und in dem Zusammenhang aller einzelnen abstrakten Sätze nicht; aber er hat dagegen auch wieder, was dort zu wenig berücksichtigt ward: die mannigfaltige praktische Hinwendung und Anwendung dieses Größengebiets aufs Leben, namentlich auch mit Beziehung auf die praktische Darstellung des Räumlichen durch entsprechende geometrische Zeichnung.

Wenn nun der Inhalt der Geometrie im Allgemeinen in dem Gebiete der Linien, Winkel, Flächen und Körper liegt, so ist auch derjenige der Volksschulgeometrie zwar in eben diesem Gebiete zu suchen; allein während jener für die Wissenschaft und ihre Untersuchungen ein unbedingt offener und freier ist, so wird dieser dagegen beschränkt theils durch das praktische Bedürfniß, theils durch die sehr einfachen wissenschaftlichen Hülfsmittel, auf welche die Volksschule fußen muß.

Mit Rücksicht auf das praktische Bedürfniß muß aus der Volksschulgeometrie manches wegbleiben, was sonst in der reinen Geometrie als werthvolle wissenschaftliche Wahrheit auftritt, in der haushälterischen Volksschule aber nur als Luxusartikel gelten könnte. Es ist unnöthig, die zu dieser Kategorie gehörenden planimetrischen und stereometrischen Lehren besonders aufzuführen; dagegen ist darauf aufmerksam zu machen, daß diejenigen einfachen geometrischen Wahrheiten, die entweder von unmittelbarer praktischer Wichtigkeit sind, oder die man durchaus nöthig hat, um andere praktisch wichtige Wahrheiten festzustellen, die Grundsteine für die Volksschulgeometrie bilden müssen. Dieselben werden bei der Entwicklung der Methode besonders berührt werden.

Mit Rücksicht auf die einfachen geistigen Hülfsmittel, welche die Volksschule beanspruchen darf, muß sie sogar auf manche geometrische Disziplinen verzichten, deren hohe praktische Bedeutung sonst außer allem Zweifel steht, deren Verständniß aber schon mehr wissenschaftliche Bildung voraussetzt. Zu diesen gehören insbesondere alle diejenigen, die Rechnungshülfsmittel erheischen *, welche die Kräfte der Volksschule übersteigen (also über die vier arithmetischen Operationen hinausgehen, wie z. B. diejenigen Sätze, zu denen durchaus die Kenntniß der algebraischen Gleichungen (Proportionslehre ** inbegriffen), ferner die der Operationen mit

* Siehe die Anleitung zum Rechnungsunterrichte § 7 der ersten Abtheilung, S. 23 bis 26.

** Die sogenannte Aehnlichkeitstheorie kann als solche, nämlich nach ihrer wissenschaftlichen Bedeutung, in der Volksschule nicht behandelt werden,

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ꝛc. erforderlich ist. Endlich sind auch noch alle diejenigen geometrischen Partieen unter den auszuschließenden zu nennen, die, wenn auch nicht zu schwierige Rechnungshülfsmittel, doch zu schwierige geometrische Kombinationen und Konstruktionen erheischen, wie z. B. viele Theile der Stereometrie und der zeichnenden oder darstellenden Geometrie.

Es fallen also in die Geometrie der Volksschule (bloß mit Rücksicht auf das objektive Ziel, also noch abgesehen von aller pädagogisch methodischen Anordnung und Behandlung) folgende Abtheilungen:

1. Auffassung der räumlichen Gestalten im Allgemeinen.
2. Auffassung der Raumelemente aus der Betrachtung räumlicher Gestalten. Abbildliche Darstellung dieser Elemente. Zeichnung.
3. Konstruktion und Größenbestimmung von Linien. Längenmaße.
4. Konstruktion und Größenbestimmung von Winkeln. Winkelmaße. Richtung der Linien.
5. Konstruktion geschlossener Figuren (Drei-, Vier-, ... Vieleck, Kreis ꝛc.).
6. Größenbestimmung oder Ausmessung dieser Figuren. Flächenmaße.
7. Vermessung zusammenhängender Flächenstücke im Freien und Aufnahme der entsprechenden Grundpläne. (Einfacher Meßapparat.)
8. Geometrische Zeichnung einfacher Pläne.
9. Auffassung der Bildung geometrischer Körper aus gegebenen Bestimmungen.
10. Größenbestimmung der Oberfläche einfacher geometrischer Körper. Darstellung oder Entwicklung ihrer Oberflächen. (Konstruktion der Netze.)

---

dagegen wird die Proportionalität einfacher geometrischer Größen nicht ganz ausgeschlossen bleiben, sondern nur ohne das wissenschaftliche Kleid der Proportionen in Berücksichtigung fallen, gerade wie beim Rechnungsunterricht die Proportionalität der Größen auch ohne die Proportionen behandelt wurde. Das wissenschaftliche Mittel der Proportion taugt eben nicht in der Volksschule und die Anwendung desselben wäre weniger als ohne Erfolg: sie würde schaden.

11. Ausmessung einfacher geometrischer Körper. Körpermaße.
12. Annähernde Bestimmung beliebiger Volumina, ebenso der Gewichte (absolute und spezifische) 2c.
13. Einfache Grund- und Aufrisse, Durchschnitte.
14. Darstellung baulicher und gewerblicher Gegenstände überhaupt, vermittelst einer einfachen geometrischen Darstellungsweise.

Hier sind also hauptsächlich die objektiven Grundlagen für die Geometrie der Volksschule gegeben. Die Methode hat dieselben gemäß den pädagogischen Gesetzen so zu ordnen, zu verarbeiten und mit dem praktisch materialen Stoffe zu durchdringen, daß sich hieraus dasjenige Ganze gestaltet, das die Geometrie der Volksschule genannt werden darf.

Was diesen praktisch materialen Stoff insbesondere anbelangt, so ist derselbe aus der Naturkunde, der Landwirthschaft, den Künsten, Handwerken, Gewerben 2c zu ziehen, denn die Geometrie soll für diese Gebiete, wie das Rechnen, ein Hauptunterstützungsmittel sein, so weit dieß nämlich im Einklange steht mit den Anforderungen der Gemeinnützlichkeit und Gemeinfaßlichkeit, sowie mit der ganzen Stellung und verhältnißmäßigen Bedeutung unsers Schulfachs im gesammten Organismus des Volksschulunterrichts.

§ 4.

Ueber die Methode und die methodische Ausführung des geometrischen Unterrichts in der Volksschule.

Wir haben die „Methode des Ursprungs und der Entstehung gemäß psychologischer Entwicklung" als diejenige der Mathematik der Volksschule im Allgemeinen erklärt.* Hier wollen wir sie in geometrischer Richtung im Besonderen verfolgen.

Die genetische Methode, von der man in Hinsicht auf Mathematik sehr häufig spricht und die auch als wissenschaftliche Methode Geltung hat, darf nicht verwechselt werden mit der Methode der Volksschulgeometrie als solchen. Jene bezeichnet bloß ihrem Grundzuge nach den Charakter der letztern, da sie eben auf den Ursprung und die Entstehung der mathematischen Größen zurückgeht, im Uebrigen aber, was Eintheilung, Verarbeitung und Vorführung des Stoffes anbelangt, gar nicht an eine fortschreitende psychologische Entwicklung gebunden ist, sondern den Stoff auch rein nach objektiv wissenschaftlichen Gründen

* Siehe § 8, Seite 27 bis 32 im ersten Theile unsers Handbuches.

entwickeln und verfolgen kann. Der Methode der Volksschulgeometrie kommt aber das Spezifische der Entwicklung des Stoffes nach Maßgabe der Entwicklung der Seelenkräfte des Kindes zu, wobei die Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse des Lebens fortwährend diesem nämlichen Gesetze unterthan bleiben muß.

Um die Grundzüge der psychologisch- oder pädagogisch-genetischen Methode (als derjenigen der Volksschulgeometrie) etwas schärfer zu bezeichnen, wollen wir zunächst den Gang anzugeben versuchen, den der Mensch ungefähr befolgen mußte, um sich den geometrischen Stoff und die Gesetze der Bildung desselben zu abstrahiren.

Wie der Mensch offenbar durch die Zusammenordnung gleichartiger Dinge in der Natur zur Unterscheidung und Auffassung der Zahl geführt wurde, so auch durch die verschiedenartigen Formen und Gestalten in der Natur auf die Unterscheidung und Auffassung der geometrischen Größen und Gebilde. Da aber jene Formen und Gestalten in der Natur nicht rein geometrisch ausgeprägt sind, sondern höchstens Annäherungen oder Analogieen zu den idealen Formen und Größen der Geometrie bilden, so hat sich der menschliche Geist die letztern erst schaffen müssen.

Beispiele für Annäherungen von einzelnen geometrischen Gebilden lassen sich in der Natur leicht finden, wie z. B. für den Kreis: die Scheibe der Sonne und des Vollmonds ꝛc.; für gerade Linien, Winkel, ebene Flächen und die einfachern von ebenen Flächen begränzten geometrischen Körper: die Kanten, Winkel, Flächen und Körperformen mancher regelmäßiger Naturkörper, z. B. der Krystalle, so wie mancher analoger Naturgebilde größeren Maßstabes; für die Kugel: manche Früchte, runde Steine ꝛc.; für Walze und Kegel: einzelne Abschnitte von Baumstämmen ꝛc.

Solche Annäherungen von geometrischen Gebilden boten wahrscheinlich die Grundlage zu den Untersuchungen dar, durch die man die Bildungsgesetze der einfachsten räumlichen Gestalten aufzufinden sich bemühte. Bei den Annäherungen für Kreis und Kugel mußte sich z. B. dem Schärferblickenden bald die Idee von Gebilden herausstellen, in denen sich das Gesetz offenbart, daß alle Theile ihrer Begränzung gleich weit von einem und demselben Orte (dem gemeinsamen Mittelpunkte) abstehen. Die Begriffe von Punkt, Linie, Fläche ꝛc. mußten bald bei der, bald bei jener Ver-

anlassung, bald mehr einzeln, bald mehr im Zusammenhange von Erscheinungen in der Außenwelt* abstrahirt worden sein. Daß diese Begriffe auch unabhängig von jeder Wortdefinition bestehen konnten, wird leicht zugegeben werden können. Wie aber diese Begriffe aufgefaßt waren, mußte der menschliche Geist weiter schaffend und kombinirend verfahren, wodurch er sich der ersten geometrischen Beziehungen und einfachsten geometrischen Sätze bewußt wurde, die dann auch sofort ihre Geltung und mannigfache Anwendung im realen Leben erlangen sollten. So durch Zerlegung und Zusammensetzung, durch geistige Kombination und Konstruktion, sowie durch Benutzung der Resultate der Erfahrungen, gelangte man allmälig zu demjenigen Stoffe, der in dem Lehrgebäude der Elementargeometrie systematisch geordnet und aufgeführt ist. Es bestätigt sich der Satz:

Die Geometrie hat ihren Ausgangspunkt in der empirischen Beobachtung und Anschauung, ihren Schwerpunkt und Stützpunkt in der geistigen Verarbeitung und Umbildung und ihren Ziel- und Endpunkt in der praktischen Anwendung.

Es ist ein großartig erfolgreicher Gang, den der menschliche Geist einschlägt, indem er von der forschenden Betrachtung und Auffassung der Dinge und Erscheinungen in der Natur in seine eigene Werkstätte einkehrt, wo er abgezogen von der realen und konkreten Welt in selbstständiger Thätigkeit die aufgefaßten Begriffe kombinirt und auf gesetzmäßige Weise zu rein idealen Gebilden umwandelt, die er alsdann verkörpert wieder in der realen Welt zur Erscheinung treten läßt. Das Großartige, das in diesem fortschreitenden Prozesse der Vergeistigung der Außenwelt und der hierauf folgenden Verkörperlichung des geistig Geschaffenen liegt, tritt schon in unserer Gegenwart so mächtig hervor, daß man nicht mehr wie im Alterthume bloß von einer beschränkten Anzahl von Wunderwerken zu sprechen hat, die dem Menschengeiste zur Zierde gereichen, sondern daß bald unser ganzer irdischer Wohnsitz nur ein sprechender Zeuge von diesem mächtigen Umwandlungsprozesse ist.

---

* Von den Erscheinungen auf der Erdoberfläche hat der gestirnte Himmel wohl sehr frühe die staunende Betrachtung ab- und auf sich gezogen, wodurch er eines der ersten Felder für die formende, die leuchtenden Punkte durch Linien zu allerlei Figuren verbindende Phantasie, sowie hauptsächlich auch für die geometrisch schaffende Geisteskraft wurde; Beweis die frühzeitig beginnende astronomische Forschung, verhältnißmäßig frühe Fortschritte in der hierauf angewandten Trigonometrie ꝛc.

Wenn sich nun im Allgemeinen der geschichtliche Entwicklungsgang der Elementargeometrie aus ihren ersten Anfängen, wie derjenige des Elementarrechnens, nicht genau angeben läßt*, so kann man doch über so viel im Klaren sein, daß zuerst die Raumelemente (Punkt, Linie, Fläche, Körper) durch Abstraktion erfaßt sein mußten, bevor hierauf bezügliche geometrische Sätze mit Bewußtsein festgestellt werden konnten und daß von diesen letztern zunächst die leichtern und einfachern durch Beziehung der Raumelemente auf räumliche Größen aufgefunden und angewendet wurden. Viel mehr läßt sich hier nicht mit Sicherheit behaupten. Wenn daher verlangt wird, beim geometrischen Unterricht den geschichtlichen Gang oder denjenigen der Natur der Sache zu verfolgen, so kann sich dieß nur im Allgemeinen auf die Hauptstadien dieses Entwicklungsganges beziehen, welche unzweifelhaft für das Elementargebiet folgende sind:

1. Anschauung und geistige Auffassung räumlicher Größen in der Natur.
2. Bewußte Bildung der Begriffe der Raumelemente.
3. Verbindung und Verarbeitung dieser Begriffe zur Erkenntniß der einfachern geometrischen Wahrheiten und Rückbeziehung derselben auf die konkrete Wirklichkeit durch praktische Anwendung.

Es ist natürlich, daß jede dieser Stufen allmälig die folgende vorbereitet, daß keine plötzlich beginnen und ausschließlich verfolgt werden darf, sondern daß jede zugleich noch in die folgende hinüberdauert, und daß das, was die Pädagogik aus dem Fortschritte der Zeit und der Kunstthätigkeit zur Benutzung für einen fördernden Unterricht herbeiziehen kann, nicht unberücksichtigt bleiben soll. So wird man sich zum Behufe der Auffassung räumlicher Gestalten nicht bloß auf Naturkörper beziehen, sondern auch auf Gegenstände der Kunst; man wird zur Bildung der geometrischen Begriffe hauptsächlich künstliche Formen benutzen, oder

---

* Denn diejenigen Werke, die uns das Alterthum über dieses Gebiet hinterlassen hat, ertheilen nur wenigen Aufschluß über die allmälige Entstehung der Elemente der Mathematik, indem sie meistens bloß die fertige Zusammenstellung der geometrischen Resultate bilden, die wohl durch viele Jahrhunderte hindurch erst nach und nach gewonnen und dann von Meisterhänden vermehrt, vervollständigt und systematisch geordnet worden waren.

wenigstens sich jedenfalls nicht bloß auf geometrische Analogien aus der Natur beschränken; so wie man zur Herleitung geometrischer Thatsachen und der damit verbundenen Wahrheiten künstliche Veranschaulichungsmittel um so lieber in Anwendung bringen wird, je einfacher und zweckfördernder sie zugleich sind.

Die oben genannten drei Hauptstufen der geometrischen Stoffentwicklung, die wohl ebensowenig unberücksichtigt gelassen werden dürfen, so wenig es anderseits möglich oder angemessen sein wird, sich noch strenger an die geschichtliche Entwicklung der Elementargeometrie anzuschließen, sind auf den verschiedenen Stufen der Volksschule in folgender Weise ins Auge zu fassen.

A. Elementarschule.

Die Elementarschule hat es, gemäß ihrer Bedeutung und Stellung lediglich mit der Anschauung und Auffassung der räumlichen Gestalten im Allgemeinen zu thun. Das Kind bildet sich hieraus allerdings schon die ersten Vorstellungen von den Elementen des Raumes; es abstrahirt sich durch bloße Unmittelbarkeit die Vorstellungen des Ortes (Punkt), der Richtung (Strich, Linie), der Ausdehnung nach der Fläche und nach dem körperlichen Raume. Allein diese Vorstellungen erwirbt es und sie existiren in seinem Geiste ohne das Bewußtsein einer bestimmten Definition dieser Elemente. Wiederholte Anschauungen und unterhaltende Besprechungen über Dinge, bei denen diese Elementarverhältnisse in Frage kommen, leisten hier genug. Dagegen ist es unerläßlich, den bei Kindern schon sehr frühzeitig sich regenden Trieb zur abbildlichen Darstellung in der Elementarschule auch im Interesse der geometrischen Anregung zu pflegen. Hier bleiben aber die Richtungen vereinigt, es darf nicht eine speziell geometrische Tendenz hervortreten.

Die Uebungen des Auges und der Hand in Auffassung und Darstellung einfacher Formen bereiten für den Schreibunterricht, den Zeichnungsunterricht wie für die Geometrie zugleich vor.

Diese Vorbereitung ist um so besser, je mehr man hier bei der Sache bleibt und nicht schon eine Terminologie herbeizieht, die selbst auch erst zum eigentlichen geometrischen Unterricht gehört. Das Kind kann ganz gleich eine einfache Figur als Bild von einem

leicht darstellbaren Gegenstande seiner Umgebung zeichnen, ohne daß man ihm von rechten, spitzen, stumpfen Winkeln, von Parallellinien, Parallelogrammen, Kreislinien, Halbmessern, Sehnen ꝛc. spricht.

Man hat schon oft in der Absicht, den spätern geometrischen Unterricht vorzubereiten und zu erleichtern, in der Elementarschule die sogenannte geometrische Formenlehre behandeln wollen; allein diese inhaltlose Formen- und Namenlehre bereitet einen gedeihlichen Unterricht in der Geometrie nicht vor, sie greift ihm bloß vor und zwar auf eine sehr unstatthafte und schädliche Weise, indem man dadurch dem Schüler Namen und Zeichen gibt für Begriffe, die er noch nicht hat und nicht haben kann, da deren Erwerbung erst durch den wirklich geometrischen Unterricht möglich ist.

Man könnte mit ganz dem gleichen Rechte, um vermeintlich den spätern Rechnungsunterricht vorzubereiten, in der Elementarschule eine arithmetische Formenlehre* ertheilen, durch welche man die Schüler, bevor sie die verschiedenen Zahlen und Operationen mit denselben aufgefaßt haben, lehren würde: die Zahlnamen sprechen, alle Ziffern schreiben, dieselben nach der Regel des Zehnersystems ansetzen und aussprechen, Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen ansetzen und die einzelnen Operationsglieder benennen, Bruchformen schreiben und lesen, wobei die Ziffer über dem Strich Zähler, die unter dem Strich Renner genannt würde u. s. f., mit Dezimalbrüchen ꝛc.

Allein durch das Eine wie durch das Andere stumpft man den Schüler gleich sehr ab und raubt ihm für eine spätere auf den Geist gebaute, ersprießliche Behandlung des Faches die nöthige Frische, der Schüler glaubt die Sachen zu wissen und hat bloße Namen und Formen; ein späterer Unterricht, der nun in der That auf die Sache eingehen will, scheint ihm das Gleiche

---

* So könnte man sich auch beim Elementarsprachunterricht nicht bloß mit der unmittelbaren Einübung der grammatischen Verhältnisse begnügen, sondern dem Schüler zugleich die Terminologie von den Wortarten, Beziehungsverhältnissen, Satzgliedern, Satzarten ꝛc. mittheilen. Allein man ist im Elementarsprachunterricht doch weiter als im geometrischen, und man läßt den Schüler unmittelbar die Sache ergreifen und kümmert sich weder um Terminologie noch Sprachregeln, die hier dem Schüler die Sache nur verleiden würden.

wieder zu bringen, das macht ihm den Unterricht langweilig, das Tiefere erfaßt er nicht, denn sein geistiger Blick hat bereits an Frische und Schärfe eingebüßt, und dadurch wird ihm der Unterricht zum Ueberdruß. Es ist fast unglaublich, wie viel man durch den ersten Unterricht, wenn er unpassend ertheilt wird, verderben kann.

Die Trennung des geometrischen Unterrichts in eine Formen- und Größenlehre ist indessen auch an sich ein Unding. Form und Größe treten in der Wirklichkeit nie von einander getrennt, sondern mit einander verbunden auf; eins gehört zum andern, Gestalt ohne Ausdehnung ist nichts, ein Name ohne Bedeutung. Die wirklich geometrische Betrachtung und Untersuchung ist es aber wieder, die beides, Form und Größe, ins rechte Licht setzt und zur rechten Auffassung bringt, und dann ist auch die nöthige Terminologie am Platze. Die Formenlehre kann also auch erst in ihrer natürlichen Verbindung mit der geometrischen Größenlehre auf der nächsten Schulstufe in geeignete Betrachtung fallen.

B. Realschule

Die Realschule hat zunächst damit zu beginnen, diejenigen Vorstellungen, welche der Schüler bis jetzt auf dem Wege der Unmittelbarkeit im Gebiete der räumlichen Größen erlangt hat, zu bestimmten Begriffen umzuwandeln und hiebei insbesondere die Begriffe von den Raumelementen dem Schüler zum Bewußtsein zu bringen.

Sie schreitet darauf allmälig in der Verbindung und Verarbeitung dieser Begriffe in der Weise fort, daß hiedurch der Schüler stufenweise zur Erkenntniß und Anwendung der einfachern geometrischen Wahrheiten gelangt.

Auf dieser Schulstufe beginnt also erst der eigentlich geometrische Unterricht der Volksschule, während auf der vorigen Schulstufe ein bloßer Vorbereitungsunterricht am Platze war.

Wir müssen wiederholen, daß mit dem Bestreben, dem Schüler geometrische Begriffe und Beziehungen zum bestimmten Bewußtsein zu bringen, durchaus nicht die höchst irrthümliche Meinung verwechselt werden darf, als könnte oder sollte der dießfällige Unter-

richt in irgend welcher Art nach dem Muster eines wissenschaftlichen Unterrichts in den geometrischen Elementen ertheilt werden; er muß im Gegentheil ein durch und durch anderer sein.

Allein eben so irrthümlich wäre es, wenn von irgend einer Seite vorausgesetzt würde, die methodische Durchführung des geometrischen Unterrichts der Volksschule könnte oder sollte daher eine ganz unwissenschaftliche sein. Es darf nämlich weder das Einzelne mit den Resultaten der Wissenschaft im Widerspruch stehen, noch dürfen die verschiedenen Wahrheiten aufs Gerathewohl bald so bald anders vorgeführt und zu einem Ganzen ohne innern Zusammenhang und einheitliche Entwicklung vereinigt werden, noch viel weniger darf man den Schüler in eine Anschauungsweise einführen, die einem höhern Unterricht hindernd in den Weg träte, und die er sich hier extra wieder ablernen müßte, bevor er mit Erfolg weiter fortschreiten könnte.

Hier tritt nun eben das methodisch-geometrische Prinzip des Ursprungs und der Entstehung gemäß psychologischer Entwicklung an die Spitze.

Der geometrische Unterricht muß ein schaffender sein; in der Art und Weise wie er schafft, soll zugleich die Begründung liegen, aus welcher Einsicht und Kenntnisse fließen, die in Verbindung mit der nöthigen Uebung die rechte Fertigkeit und Tüchtigkeit fürs Leben hervorbringen. Nun sind die geometrischen Gebilde, die hier in Betrachtung fallen, der Art, daß sämmtliche so erzeugt werden können, daß schon aus ihrer Entstehung die wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen hervortreten, die mit dem Wesen dieser Gebilde verknüpft sind und die als geometrische Wahrheiten auch für die Anwendung von entscheidender Bedeutung sind.

Der Lehrer hat nun die Entstehungsart dieser Gebilde so zu wählen und so vorzuführen, daß dem Schüler jene geometrischen Eigenschaften und Beziehungen nothwendig in die Augen springen müssen. Es gilt also hier der Grundsatz:

Von den einfachsten geometrischen Gebilden an wird die Entstehung eines jeden derselben vor den Augen des Schülers (am besten durch bewegliche Gegenstände) in der Weise veranschaulicht, daß sich aus dem Werden des geometrischen

Objekts diejenigen Eigenschaften und Beziehungen offenbaren, die an das gewordene, fertige Objekt gebunden sind.*

Die Befolgung dieses methodischen Grundsatzes bildet eine naturgemäße Erleichterung oder Vermittlung der geometrischen Begriffsbildung beim Schüler. Wie derselbe beim Rechnen sich die Zahlbegriffe und Zahlgesetze selbst bilden und aneignen muß, wenn er sie wirklich haben soll, so auch hier; der Lehrer sucht in beiden Gebieten nur die günstigsten äußern Umstände herbeizuziehen, unter denen diese innere, bildende, umbildende und verarbeitende Thätigkeit am besten gedeihen kann.

Es ist hier die Wichtigkeit einer lebendigen Anschauung besonders hervorzuheben. Man nennt oft einen Unterricht, der die geometrischen Größen ohne weitere Entwicklung den Schülern vorführt und dieselben geometrische Verrichtungen nachmachen lehrt, um sie durchs viele Nachmachen zum Verständniß der Sache

---

* Wir haben schon im Jahr 1845 dieses methodische Prinzip in unserer Bearbeitung der Geometrie in Dr. Scherrs pädagogischem Handbuche entwickelt und uns darüber in der Vorbemerkung folgendermaßen ausgesprochen:

„Je natürlicher die Methode eines Lehrgegenstandes ist, desto mehr kann durch sie auf das Verständniß des Schülers eingewirkt werden. Wir halten nun hier diejenige Methode für die natürlichste, welche gerade aus dem Gegenstande und dessen Bildung und nicht aus seiner Umgebung heraus, von welcher er abhängig gemacht oder gedacht wird, diejenigen Beziehungen entwickelt, die wir in ihm finden. So wird nicht nur die Sache, sondern auch ihr Entstehungsgrund erklärt.

Deßwegen erscheint uns für diese Stufe des geometrischen Unterrichts diejenige Methode als die zweckmäßigste, welche dem Schüler die Entstehung geometrischer Gebilde (zuerst immer durch bewegliche Gegenstände) lebendig vor die Augen führt, ihn dadurch gleichsam in die Konstruktion hinein versetzt und so durch bloße Anschauung das heraussehen läßt, was man ihn zu lehren beabsichtigt.

Was hier also der Darstellung an wissenschaftlicher Gründlichkeit nothwendig fehlen muß, soll sie dagegen durch eine lebendige Veranschaulichung des Gegenstandes ersetzen."

Diese Bearbeitung so wie ein später bei Orell Füßli u. Comp. in Zürich von uns herausgegebenes Lehrmittel für den Schüler haben mehrfach günstige Beurtheilungen gefunden. Seither sind die Grundsätze, auf die sich diese Arbeiten stützen, auch in größern Kreisen adoptirt und in einzelnen Schriften weiter ausgeführt worden.

zu führen, einen auf Anschauung gegründeten Unterricht. Die Anschauung wirkt nun hier allerdings mit, allein sie ist nicht eine lebendig angeregte. Der Blick des Schülers dringt im Anschauen des fertigen, todten Gebildes nicht, oder nur in den seltensten Fällen, in dessen inneres Wesen.* Das gilt besonders von allen denjenigen Konstruktionen und Messungen, deren innern Grund der Schüler nicht erkannt hat.

Kann aber die Entstehung des geometrischen Gebildes angeschaut werden, so ist ein Blick in dessen Natur und Eigenschaften um so leichter, je zweckmäßiger diese Entstehungsart gewählt und je auffallender diese Eigenschaften gemacht werden. Was durch solche lebendige Einsicht erworben wird, das hat wahren geistigen Werth und Halt, während das durch mechanische Nachahmung und Wiederholung Angelernte der nöthigen Sicherheit sowie der produktiven geistigen Kraft ermangelt.

Die Durchführung obigen Grundsatzes sichert nun vorzüglich folgende höchst wichtige pädagogische Vortheile:

1. Der Schüler muß auf diesem Wege die Richtigkeit einer geometrischen Thatsache nicht bloß anerkennen oder zugeben oder gar auf Treu und Glauben annehmen, denn der Entstehungsgrund dieser Sache wird ihm klar, und so erscheint sie ihm nicht bloß als richtig, sondern als durchaus natürlich und nothwendig. Dieß gibt ihm aber eine geistige Befriedigung, die an sich schon sehr wichtig und für einen gedeihlichen Fortgang des Unterrichts überdieß höchst förderlich ist.**

---

* An einem Examen, dem wir beiwohnten, ließ ein Lehrer zum Nachweise, daß die Summe der Winkel im Dreieck 180 Grade betrage, die Schüler diese Winkel mit dem Transporteur messen. Einer der aufgeweckteren Schulknaben nahm diese Messung auch an der Wandtafel vor, fand aber zufällig (weil die Seiten fast unmerklich ausgebogen waren) 185 Grade. Der Lehrer bemerkte, es müsse 180 Grade geben, allein der Schüler fand bei nachmaliger Messung wieder 185 Grade und bestand also darauf. Worin konnte nun die überzeugende Kraft für den Schüler liegen, daß der Lehrer doch recht habe und daß jene Winkelsumme wirklich gerade 180 Grade ausmache?

** Die einfache Erkenntniß, die sich auf die anschauliche Entstehung eines geometrischen Gebildes bezieht, gewährt oft mehr Befriedigung als mancher von den streng mathematischen Beweisen, die uns auf künstlichem Wege und durch großen Aufwand von Logik darthun, daß eine Sache so und nicht anders sei.

2. Da durch diesen Unterricht die geometrischen Erkenntnisse des Schülers sich an die aufgefaßten geometrischen Gebilde selber heften, so müssen jene nicht mühsam durch das bloße Gedächtniß festgehalten werden, denn mit der Reproduktion des Gebildes reproduzirt sich der Schüler zugleich jedesmal die damit verbundenen Eigenschaften, aus denen jene Erkenntnisse fließen. * Er bedarf also nur die Kraft, geometrische Gebilde stets wiedererzeugen zu können, und seine auf diesem Wege erworbenen Kenntnisse können als gesicherte betrachtet werden, die er sich selbstständig aus jener Bildung heraus abzuleiten vermag. Die Kraft der Erzeugung (Konstruktion) geometrischer Gebilde steht so neben der Zählkraft; beide stärken sich durch den Unterricht wie durch das Leben, beide bilden die Grundvermögen, durch die wir mathematische Kenntnisse zu unserm bleibenden Eigenthum machen können.

3. Die Resultate werden, da sie aus einer gemeinschaftlichen Quelle fließen, verhältnißmäßig schnell erreicht und schließen sich enge

---

Sogar reifern Schülern kommt oft Manches, wofür sie zwar Schritt für Schritt die wissenschaftlichen Gründe angeben, am Ende wieder etwas räthselhaft vor und sie greifen gewöhnlich dann noch zu einer anschaulich genetischen Darstellung und Erprobung der Sache, bis ihnen dieselbe vollständig klar und naturgemäß erscheint.

Zeigen wir z. B. einem Schüler durch einen der streng-synthetischen Beweise, daß die Summe der Winkel im Dreieck $= 2R$ sei, so kann ihm die Sache doch noch sehr unbefriedigend vorkommen, denn er möchte wissen, woher es auch kommt, daß es so ist. Können wir ihm aber begreiflich machen, daß bei der Entstehung eines Dreiecks durch Umdrehung der geraden Linien die Dreieckswinkel eben wirklich eine halbe Umdrehung ausmachen, so ist ihm dadurch nicht bloß die Sache, sondern auch der Grund ihrer Entstehung erklärt.

* Es bindet sich auf diesem Wege die geometrische Erkenntniß sogar ans äußere Gebilde selbst, wie wir beim Betrachten gewisser Bilder stets uns die nämliche Vorstellung erneuern, die wir einmal lebendig mit ihnen in Verbindung gebracht hatten.

Es ist zwar ein triviales Beispiel, aber dennoch ein gutes: Wer auf jener bekannten Zeichnung, die für den Nichteingeweihten gar kein Personenbild darzustellen scheint, einmal den „Kaiser Napoleon" herausgesehen hat, der sieht ihn immer wieder, er mag sogar wollen oder nicht. Ganz ähnlich: Wem einmal aus der Entstehung eines geometrischen Gebildes eine mit demselben verbundene Eigenschaft oder Beziehung lebendig in die Augen gesprungen, der findet sie bei Vornahme dieses Gebildes immer wieder heraus.

an die Selbstthätigkeit der Schüler an, die eine sichere Folge der Durchführung des in Rede stehenden methodischen Grundsatzes ist.

4. An diese geistigen Erwerbnisse reihen sich nun sicher und leicht die mehr äußerlichen praktischen Kenntnisse an, die durch jene einen bessern Halt und eine erfolgreichere Anwendung finden.

Auf diesem methodischen Wege wird zunächst der geometrische Blick der Schüler erschlossen, der nun durch ihre Selbstthätigkeit weiter ausgebildet werden soll. Diese Selbstthätigkeit bezieht sich vornämlich auf Konstruktionen (Zeichnungen) und Messungen. Wenn zu diesen mehr praktischen Thätigkeiten die Entwicklung des Stoffs (durch Veranschaulichung der Entstehung der geometrischen Gebilde und Ableitung ihrer Haupteigenschaften) eine vorzugsweise begründende Stellung einnimmt, so sind die Uebungen im Konstruiren, Messen und Berechnen hauptsächlich von praktischer Wichtigkeit, üben aber hinwiederum auch einen bedeutenden Einfluß auf die geistige Auffassung aus.

Denn wie der Schüler nach der naturgemäßen Entwicklung einer arithmetischen Operationsstufe durch viele Uebungen im Rechnen nicht bloß seine Fertigkeit, sondern zugleich auch seine Einsicht im Operiren vermehrt, so vermehrt er auch durch die Konstruktionen und Messungen seine Einsicht und Fertigkeit in der Geometrie.

Den zweckmäßigen Stoff soll hier hauptsächlich eine methodische Sammlung von Uebungen und Aufgaben (siehe den betreffenden nachfolgenden Paragraphen) bieten.

Hieran hauptsächlich hat der Schüler seine Kraft durch Selbstschaffen und Selbstfinden zu üben und zu stärken. Es ist dieß nicht bloß ein Ueben der geistigen Kraft; das leibliche Auge und die Hand wollen gleichzeitig mitgeübt und zur Fertigkeit tauglich und geschickt gemacht werden. Wer bloß im geistigen Auffassen, im innern Verständniß der Sache geübt ist, der ist fürs Leben noch nicht geschickt, er gleicht dem einseitigen Theoretiker, der mit den praktischen Verhältnissen zu wenig bekannt ist und im wirklichen Angriff des Materials sich sehr unbeholfen und ungeschickt benimmt.

Es ist wahr, die bloße Lehre für sich macht bleichsüchtig, schafft Naturen, die sich der vollen Kraft gegenüber ausnehmen,

wie die Brut der Stubensitzer verglichen mit dem muskulösen, im sichern Blick und Tritt und Handangriff geübten Turnergeschlecht.

In der Geometrie liegt die praktische Thätigkeit nicht bloß in der Hinweisung auf die Anwendbarkeit rein geometrischer Erkenntnisse aufs Leben. Mit Zirkel, Stift und Maßstab muß der Schüler wirklich operiren, das sind Werkzeuge, die er so gut handhaben lernen muß wie später diejenigen des Berufs, dem er sich widmen will. Suchen und Untersuchen, Konstruiren und Messen und Berechnen, das sind Uebungen, in die der Schüler methodisch einzuführen und in denen er methodisch auszubilden ist.

Von den Uebungen auf dem Papier und an der Wandtafel geht es stufenweise zu den geometrischen Uebungen im Raume (im Schulzimmer so wie im Freien), und hier werde besonders auf das Naheliegende und im Leben Nützliche Rücksicht genommen, so wie hier insbesondere auch darauf zu achten ist, daß die Meßwerkzeuge einfach und wo möglich durch den reifern Schüler selbst herstellbar seien.

Wenn so der ganze Unterricht dieses Schulfachs* sowohl auf die geistige Entwicklung und innere Einsicht als auf die Selbstthätigkeit und praktische Befähigung des Schülers abzielt, indem der pädagogische Spruch beherzigt wird:

„Der werde tüchtig nie genannt,
Wer nicht den geist'gen Grund erkannt!
Wer nur den geist'gen Grund erkannt,
Der werde tüchtig nicht genannt!"

so muß der Erfolg ein den Anforderungen an die Volksschule vollständig entsprechender sein, und es steht nicht mehr zu befürchten, was bisher so oft geschehen ist: daß nämlich dieser Unterricht in der Volksschule nicht einheimisch werden wollte, weil sie es nicht verstand, ihn der geistigen Entwicklung und Selbstthätigkeit

---

* Gegen eine schiefe Auslegung dieses Wortes im Sinne der Zersplitterung der Unterrichtskraft werden wir uns wohl nicht zu verwahren brauchen, wenn wir einfach auf unsere Darlegung der verhältnißmäßigen Stellung dieses Schulfachs im gesammten Unterrichtsorganismus der Volksschule verweisen. Siehe den ersten Theil unsers Handbuches sowie die spezielle Ausführung des Unterrichts im vorliegenden zweiten Theile.

des Schülers sowohl als den Anforderungen des Lebens gemäß zu entfalten.

Nach dieser Besprechung der allgemeinen methodischen Grundsätze fällt es nicht gar schwer, einen entsprechenden Lehrgang aufzustellen, der für die zweite Schulstufe, nämlich die Realschule, passend sein dürfte.

1. In Befolgung des Grundsatzes, daß die Raumgebilde dem Schüler auf dem Wege ihrer Entstehung vorgeführt werden sollen, sind nach der einfachen Anschauung konkreter Gegenstände und der elementaren Unterscheidung räumlicher Gestalten im Allgemeinen, die Raumbegriffe: Körper, Fläche, Linie, Punkt im Schüler in analytischer Stufenfolge zu erzeugen, wobei also mit dem Körper (d. h. hier noch mit dem materiellen), und nicht mit dem Punkte begonnen werden soll, weil der erstere und nicht der letztere für den Schüler unmittelbar gegeben ist.

Die Veränderlichkeit der Form eines Körpers (Stücke abschneiden, zusetzen, bearbeiten) führt den Schüler auf die sichere Vorstellung von der Begränzung, Oberfläche des Körpers. Die Theile der Oberfläche, die einzelnen Flächen, sind von Linien begränzt, diese von Punkten.

Hiebei ist in Berücksichtigung des Grundsatzes, daß die Stoffentwicklung mit der geistigen Entwicklung des Schülers übereinstimmen, also seiner Fassungskraft angemessen sein muß, nie außer Acht zu lassen, daß der Schüler nur das auffassen und sich vergeistigen soll, was er wirklich sehen kann.

Man bleibe hier also mit allen zu feinen Unterscheidungen weg und beschränke sich einzig auf das lebendig Anschauliche. Auch werden sich die zu abstrahirenden Begriffe im Verlaufe des Unterrichtes und bei der fortgeführten Thätigkeit des Schülers immer reiner gestalten, wie es bei jedem andern Unterricht auch geschieht. Es ist eine ganz verkehrte Ansicht, daß die genannten Raumelemente (Körper, Fläche, Linie, Punkt) schon nach ihrer ersten Entwicklung in ihrer vollsten Ausdehnung und Schärfe aufgefaßt werden sollen oder auch nur können. Der Mathematiker faßt diese Begriffe auch schärfer auf als der Nichtfachmann, darum wähne man nicht, das Kind müsse sich dieselben auf einmal so scharf und vollkommen bilden, daß daran später nichts mehr zu vervollkommnen bleibe. Man begnüge sich mit dem, was durch die kindliche Anschauung aufzu-

fassen möglich ist und sich sodann naturgemäß und gesund mit dem kindlichen Geiste weiter zu entwickeln und zu kräftigen vermag. Wir werden hierüber im speziellen Theile einläßlicher eintreten.

Von eigentlicher Messung kann bei der Betrachtung und Auffassung der Raumelemente noch keine Rede sein. Dagegen sind hier einfache Aufgaben zur Unterscheidung von Zahl und Art ꝛc. der einen Körper begränzenden Flächen, sowie der eine Fläche begränzenden Linien mit Rücksicht auf praktische Beispiele, die wohl im Erfahrungskreise der Kinder liegen, ganz am Platze, sowie etwa auch leichtere abbildliche Darstellungen einfacher Körper und verschiedenartig begränzter Flächen nach bloßer Auffassung durchs Auge und mit Gebrauch des Lineals angereiht werden können.

2. Nun muß mit der weitern Verarbeitung und der Verbindung der elementaren Raumbegriffe begonnen werden.

Das Einfachste ist, daß man Linien mit einander verbindet (denn die Linie ist die einfachste geometrische Größe, der Punkt ist keine Größe), und der leichteste Fall ist der, daß eine gerade Linie mit einer andern geraden so verbunden wird, daß man die eine an die andere in deren Verlängerung abträgt. Man gelangt hienach an die Ausführung der vier Verbindungs- und Vergleichungsformen, das sind die vier Operationen mit der Linie, wobei das Wichtigste die Theilung und Messung derselben ausmacht. Dieß bildet die Einleitung zu dem Unterricht über das geometrische Längenmessen und die Kenntniß und den Gebrauch der bürgerlichen Längenmaße.

Zu bemerken ist, daß jene vier Operationen, von denen die Addition und Multiplikation in der Zusammenfügung von Linien, die Subtraktion und Division in der Abtragung, Eintheilung und Wegnahme von Linien ihre geometrische Erledigung finden, in diesen Uebungen nicht weit ausgesponnen werden dürfen, sonst arten diese gerne in Spielerei aus. Dagegen ist den gesetzlichen Längenmaßen und den Meßübungen mit denselben besonders sorgfältige Aufmerksamkeit zu widmen; der Schüler hat sich hier die Grundanschauung von dem zu bilden, was Messungen oder Größenbestimmungen auch im Allgemeinen zu bedeuten haben. Die Schlußübungen dürfen hier schon eine ziemlich praktische Bedeutung annehmen, indem man von den Meßübungen im Schulzimmer zur Messung verschiedenartiger Längenausdehnungen im Freien übergeht.

Daß das graphische Element hier von Anfang an am schicklichsten mit demjenigen der Messung verbunden wird, oder daß vielmehr dieses von jenem auszugehen hat, leuchtet von selbst ein.

3. Wenn im Vorigen die Verbindung der geraden Linie mit der Geraden in deren Verlängerung oder in der gleichen Richtung betrachtet wurde, so wird jetzt die Verbindung der Geraden mit der Geraden **nicht** in deren Verlängerung sondern in einer **andern** Richtung folgen. Man wird hiedurch auf den Begriff der **Abweichung** von der Verlängerung oder von derselben Richtung, d. i. auf den Begriff des **Winkels** geführt.

Die elementare Vorstellung vom Winkel als einer Raumgröße, die sich wie die Linie um gewisse Einheiten vermehren und vermindern kann, wird offenbar mittelst der Drehung um einen Punkt, wobei die ganze Umdrehung eine bestimmte Einheit bildet, am leichtesten und sachgemäßesten erfaßt.

Die Drehung ist für den Schüler etwas konkret Faßbares, während alle andern feinen Distinktionen über das, was der Winkel ist, für den Anfänger dunkel und unfaßbar sind. Denn was bedeutet z. B. für den jungen Schüler die Größe der Neigung zweier Linien zu einander? Der Talentvolle ahnt wohl etwas, allein er kommt mit sich selbst in Widerspruch, denn wie kann er sich mit dieser Neigung, z. B. bei einem Winkel von 2 Rechten zurechtfinden? Oder bei einem Winkel von 4 Rechten, wo ihm von einer Neigung gar nichts mehr in die Augen fällt? Und was soll ihm endlich gar ein Winkel von mehr als 4 Rechten für eine Neigung sein, wenn er nicht die leichtfaßliche Vorstellung von der Umdrehung zu Hülfe ziehen kann?

Mit dieser Vorstellung aber vermag er sich in allen Fällen zu helfen, er weiß z. B. genau das kontinuirliche Ganze sich zu denken und dasselbe sogar darzustellen, das er erhält, wenn er eine Reihe von Winkeln in den sie repräsentirenden Zahlen zu addiren hat. Ohne den Begriff der Umdrehung hat er aber keine Idee von dem fortlaufenden Ganzen dieser Summe, sobald sie über 4 Rechte steigt. Endlich hat ein späterer Unterricht diesen Begriff durchaus nicht wieder umzustoßen, derselbe schließt sich ganz gut ans Allgemeinere, Abstraktere an und bildet eine feste elementare Grundlage.

Ganz das Gleiche, das über den Begriff der „Neigung" zur Erklärung des Winkels ausgesprochen wurde, gilt auch von dem Begriff des „größern oder geringern Abstandes" oder des „Richtungsunterschiedes" zweier sich durchschneidenden Linien, wodurch man bisweilen auch den Winkel aufzufassen pflegt.

Es leuchtet ein, wie leicht sich an die Betrachtung der „Umdrehung" die Bildung des Kreises und die einfachsten Beziehungen der Linien im Kreise anschaulich anschließen und wie ungezwungen das Verhältniß des Kreisbogens zum zugehörigen Winkel hervortritt. Eine Hauptsache ist die Auffassung des rechten Winkels oder was ganz dasselbe ist, die Beziehung senkrechter Linien zu einander. Für die gesammte weitere Entwicklung, sowie für die ganze praktische Anwendung des geometrischen Unterrichts ist dieß der wichtigste Fundamentalbegriff; daher ist dessen festere Begründung, die sich indessen auf dem angedeuteten Wege ungemein leicht gibt, die volle Aufmerksamkeit widmen. Gerade Linien sind auf einander senkrecht, wenn sie eine Viertelsumdrehung von einander abstehen, und in dieser Lage bilden sie auch **rechte Winkel** mit einander. Beides gehört zusammen. Daran schließt sich sehr leicht das Verfahren durch gleiche Kreisbogen gleiche Winkel anzudeuten oder zu verzeichnen, also auch dadurch den rechten Winkel auf eine ganz genaue Weise zu konstruiren. Für das Auge und für die Zeichnungsfertigkeit ist dieß von sehr großer Bedeutung.

Das Uebrige von der Messung der Winkel nach Graden, von den Nebenwinkel und Scheitelwinkeln hat nach dem Vorangegangenen keine Schwierigkeit. Daß bei den Uebungen über den Winkel, sowie bei den in vorangehender Nummer 2 besprochenen Messungen von den Schülern bereits mit Hülfe des Zirkels operirt werden soll, ist unumgänglich nothwendig.

Hieran haben sich wieder mehrere Vorkenntnisse von speziell praktischer Bedeutung zu reihen. Während früher die Begriffe von „lang", „breit" (dick), „hoch" (tief) bloß so gebraucht wurden, wie sie der sprachliche Elementar-Anschauungsunterricht erklärt haben mußte, so werden sie jetzt nach ihrer bestimmten geometrischen Bedeutung in Verbindung mit dem Begriffe von senkrechten Linien aufgefaßt und an die nämliche Verbindung werden die aus der Naturbetrachtung zu ziehenden Begriffe vom Loth und von der

wasserrechten oder wagrechten Lage geknüpft, sowie einzelne hierauf bezügliche Uebungen, die ins gewöhnliche Leben eingreifen, dem Ganzen eine konkret praktische Unterlage zu geben haben.

4. In der vorangehenden Nummer haben wir die Verbindung der geraden Linie mit der geraden Linie zur Bildung des Winkels betrachtet.

Es folgt nun die Verbindung gerader Linien zur Bildung der geschlossenen (von allen Seiten begränzten) ebenen Fläche.

Die einfachste geschlossene Figur ist das Dreieck. Wie entsteht dasselbe und wie ist es auf genaue, (d. h. geometrische) Weise zu zeichnen, d. i. zu konstruiren? In diese Entstehungsweise und Konstruktion des Dreiecks ist der Schüler zuerst einzuführen. Der Schüler soll erkennen, daß Seiten und Winkel Bestimmungsstücke des Dreiecks sind; er soll diese Bestimmungsstücke selber aufsuchen.

Nimmt er 3 Seiten, so findet er, daß keiner der Dreiecks-winkel mehr beliebig angenommen werden kann, sondern daß jeder eine bestimmte Größe erhält, indem sich stets dasselbe Dreieck aus der Konstruktion ergibt. Also das Dreieck ist durch seine 3 Seiten bestimmt; 2 derselben müssen aber stets zusammen größer sein als die dritte.

Nimmt er eine Seite weniger, dafür aber einen Winkel, etwa den von den zwei gegebenen einzuschließenden, so ergibt sich hieraus stets nur ein und dasselbe Dreieck. Also 2 Seiten und der von ihnen einzuschließende Winkel bestimmen ein Dreieck vollständig. (Wenn der Schüler versucht, aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu verzeichnen, so findet er nur stets ein gleiches Dreieck, wenn der Winkel nicht der kleinern der beiden Seiten gegenüber zu liegen kommt.)

Nimmt er wieder eine Seite weniger, dafür aber einen Winkel mehr, z. B. also eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, so gibt die Konstruktion stets dasselbe Dreieck, weßhalb die vorausgesetzten Stücke Bestimmungsstücke des Dreiecks bilden. (Die 3 Winkel eines Dreiecks endlich als gegeben betrachtet, würden dem Schüler bei der Konstruktion nicht ein bestimmtes Dreieck hervorbringen, weßhalb dieselben nicht als Bestimmungsstücke des

Dreiecks gelten können. Weniger als 3 Stücke gäben hier ebenfalls Unbestimmtheit, mehr als 3 Ueberbestimmtheit.)

An die Konstruktion des Dreiecks schließt sich leicht die Erkenntniß der Eigenthümlichkeit, daß in einem Dreieck gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten; ferner verschiedenen Seiten verschiedene Winkel und umgekehrt. (Gleichschenkliges, gleichseitiges und ungleichseitiges Dreieck.)

Als ein Gränzfall des Dreiecks kann die Bildung und Konstruktion von **Parallellinien** betrachtet werden. Die Rücksicht auf die psychologische Entwicklung des Schülers gebietet, die Parallellinien nicht schon bei den ersten Uebungen über die Drehung und den Winkel zu behandeln, denn es sind hier schon Beziehungen ins Auge zu fassen, die schwieriger sind als jene einfachen Betrachtungen. Ueberdieß stehen die Parallellinien als Gränzfall bei der Dreiecksbildung und zur Bestimmung der Summe der Dreieckswinkel am rechten Platze.

Die Thatsache, daß eine gerade Linie, um einen Punkt gedreht und alsdann um eben so viel (in der nämlichen Ebene) wieder zurückgedreht, die anfängliche Richtung beibehalte, ist hier von dem Schüler zunächst aufzufassen. — Wenn so zwei gerade Linien mit einer dritten nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel bilden, so sind sie parallel. Daran schließen sich die bekannten Eigenschaften der Winkel an Parallellinien; ferner knüpft sich hieran die Haupteigenschaft, daß parallele Linien sich nirgends durchschneiden, also mit jener dritten kein Dreieck mehr bilden können.

Am einfachsten läßt sich bei der Parallelenbildung die Summe der Winkel im rechtwinkligen Dreieck erkennen, diejenige bei einem beliebigen Dreieck ergibt sich dann durch Zerlegung in 2 rechtwinklige Dreiecke leicht u. s. f.

Hierauf folgt ohne alle Schwierigkeit vermittelst der Dreieckskonstruktion die Bildung der Vierecke (dabei die Parallelogramme), der Fünfecke, Sechsecke ꝛc. (unregelmäßige und regelmäßige) und damit verbunden die Kenntniß der nächsten Eigenschaften dieser Gebilde.

Der Stoff, der in dieser Nummer behandelt wird, ist hauptsächlich Gegenstand der geometrischen Konstruktion, obwohl alle vorausbetrachteten Maße hier auch wieder in Anwendung kommen;

dagegen ist die eigentliche Messung des hier ins Auge gefaßten geometrischen Gebildes (nämlich der geradlinig begränzten ebenen Fläche) erst Gegenstand der nächsten Betrachtung.

Praktische Anhaltspunkte bieten sich da besonders in der Richtung, daß der Schüler in der geometrischen Bildung und Eintheilung der verschiedenartigen gradlinigen Figuren eine bedeutende Fertigkeit zur Anwendung im beruflichen Leben erlangt.

5. Die Konstruktionen des Dreiecks und der Vielecke führen zur Flächentheilung und Flächenmessung. Das Flächenmaß kann eine beliebige Form haben. Die einfachste, namentlich mit Hinsicht auf die Rechnung, welche eben auch von der Form des Maßes abhängig ist, ist die des Quadrats. Das Flächenmessen kann aber nicht mehr wie das Messen der geraden Linie durch bloße Abtragung oder Anlegung des Maßes vollzogen werden. Eine zweckmäßige Theilung und Vergleichung der Flächen führt auf das einfachste Verfahren.

Die Hauptübungen für den Schüler sind zunächst folgende, nämlich erstens: zu den einfachern Längenmaßen die entsprechenden Quadratmaße zu bilden, zweitens: dieselben unter einander nach ihren Größenverhältnissen zu vergleichen. Der Schüler hat so zu finden:

$$1\,\square'' = 100\,\square''',\quad 1\,\square' = 100\,\square''$$

$$1\,\square\text{Elle} = 4\,\square',\quad 1\,\square\text{Klftr.} = 36\,\square'\text{ u. s. f.}$$

mit Hinweisung auf die größern Flächenmaße, die nicht mehr in dem Raume des Schulzimmers dargestellt werden können.

Hierauf hat er durch verschiedene Rechnungsbeispiele sich die nöthige Fertigkeit in der Verwandlung dieser Maße anzueignen und erst nach diesen elementaren Uebungen beginnt stufenweise das Messen verschieden geformter Flächen.

Da das Flächenmaß quadratförmig angenommen wurde, so sind am leichtesten zu messen die Rechtecke, dann die rechtwinkligen Dreiecke, dann die schiefwinkligen Dreiecke mit den Parallelogrammen. Zu den zusammengesetzten Messungen gehören schon die der unregelmäßigen Vierecke, der Fünf- und Mehrecke.

Am einfachsten ist die Messung desjenigen Rechtecks, in dessen Länge und Breite (Grundlinie und Höhe) ein bestimmtes Längenmaß ohne Rest enthalten ist. Hier könnte, obwohl mit bedeutender Mühe und ziemlicher Ungenauigkeit der Flächeninhalt am Ende

noch durch bloße wiederholte Anlegung des Quadratmaßes gefunden werden. Eine entsprechende Eintheilung durch Längen- und Querlinien läßt aber schon etwas leichter die einzelnen Quadrate zählen; allein statt des stückweisen Zählens der einzelnen Quadrate gelangt man durch die Multiplikation der Zahl, welche die Länge repräsentirt, mit derjenigen der Breite am schnellsten zum Ziele. Man sieht hieraus wieder, wie die Multiplikation ein Abkürzungs- und Erleichterungsmittel des einfachen Zählens bildet.

Für den jungen Schüler eignet sich am besten die Anschauungsweise, durch welche er zu dem Schlusse gelangt: Das zu messende Rechteck besteht aus so und so vielen Reihen und jede Reihe aus so und so vielen Quadrattheilen, woraus er dann bei vorliegenden ganzen Zahlen durch einfache Multiplikation, bei Bruchzahlen anfänglich mittelst des Dreisatzes und später nach erlangter größerer Einsicht und Fertigkeit durch die abgekürzte Multiplikation gemischter Zahlen das Messungsergebniß ableiten kann.

Zu diesen Reihen gelangt aber der Schüler, wenn er Länge und Breite des Rechtecks durch dasselbe Maß mißt und sich alsdann durch Ziehung der entsprechenden Querlinien die Anschauungsweise vermittelt: das Rechteck besteht aus so vielen Längenreihen oder -Streifen, als die Messungszahl der Breite angibt und jede Reihe hat so viele Quadrateinheiten als die Messungszahl der Länge ausdrückt; oder umgekehrt nach Breiten- statt Längenstreifen. Hiedurch hat sich der Schüler die Grundlage der Rechnung hergestellt, d. h. er hat die Messung in eine gewöhnliche Rechnungsaufgabe umgearbeitet und es ist nicht mehr zu fürchten, daß er z. B. Fuße mit Fußen, oder Fuße und Zolle mit Fußen und Zollen ꝛc. zu multipliziren versuche, wie dieß bisweilen noch bei ältern Schülern geschieht, die einem mehr wissenschaftlichen Unterrichte gemäß die Messungsergebnisse noch algebraisch abgeleiteten Formeln bestimmen gelernt haben.

Jenes ist also ein Messungs- und Berechnungsverfahren, das der Schüler vollständig zu überblicken und strenge einzusehen vermag, indem es sich genau an den Gang im Rechnungsunterricht anschließt; es muß deßhalb jeder bloß praktischen Regel vorgezogen werden, deren innere Begründung dem Schüler entweder gar nicht bekannt ist oder

nur dunkel und unsicher vorschwebt, oder die etwa Rechnungshülfsmittel erfordert, deren der Schüler noch nicht Meister ist und vermöge seiner Altersstufe nicht Meister sein kann.

Die Ausmessung des rechtwinkligen Dreiecks, bei welchem die beiden Kathetenseiten die Grundlinie und die Höhe vorstellen sollen und das gemäß Früherem als die Hälfte eines Rechtecks von der nämlichen Grundlinie und Höhe angesehen werden kann, bietet nunmehr keine neue Schwierigkeiten. Der Schüler messe vorerst das ganze Rechteck, das er sich wohl in Gedanken herstellen kann und nehme vom Ergebniß die Hälfte! Es ist dieß vorzuziehen dem Gange, nach welchem man auf das Rechteck das Parallelogramm folgen läßt, weil auf die erste Art sich die Sache unmittelbar und ohne weitere Verwandlung ergibt. Zudem müßte nach der zweiten Art eine Kongruenz nachgewiesen werden, während nach der vorgeschlagenen Weise bloß die Thatsache einer frühern Konstruktion benutzt wird, nach der das Rechteck aus zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken besteht.

Zur Ausmessung eines beliebigen Dreiecks ist die Konstruktion seiner Höhe nothwendig, d. h. des Perpendikels auf eine Seite, die als Grundlinie angenommen wird, von dem gegenüberliegenden Eckpunkte aus gezogen. Auf Papier oder kleinern ähnlichen Grundlagen ist diese Sache mit Hülfe des Zirkels (sowie mittelst der Equerre) bereits abgethan worden. Zu Messungen im Freien, die hier als solche noch nicht zu berücksichtigen sind, wird später ein anderes angemessenes Verfahren gelehrt werden müssen. Hat aber der Schüler die Höhe des Dreiecks wirklich ermittelt, dann liegen ihm 2 rechtwinklige Dreiecke vor, die er nach der eben vorangegangenen Weise ausmessen kann. Es ist gar nicht unzweckmäßig, wenn er im Anfange diese beiden Stücke wirklich einzeln berechnet, um den Inhalt des ganzen schiefwinkligen Dreiecks zu finden. Alsdann ist er leicht zu der Anschauungsweise überzuführen, daß das ganze schiefwinklige Dreieck die Hälfte eines Rechtecks von der nämlichen Grundlinie und Höhe ausmacht, da jedes der beiden rechtwinkligen Dreiecke die Hälfte eines Rechteckes von der gleichen Höhe, über dem zugehörigen Stück der Grundlinie errichtet, ist. Der Schüler berechne also dann zunächst den Flächeninhalt des Rechtecks, das er sich in Gedanken über der Grundlinie des schiefwinkligen

Dreiecks und mit der Höhe von diesem errichtet, und nehme vom Ergebniß die Hälfte, so hat er den Inhalt des schiefwinkligen Dreiecks.

Hiemit ist der Hauptsache nach auch der Inhalt eines beliebigen Parallelogramms als das Doppelte des durch die Diagonale abgeschnittenen Dreiecks bestimmt.

Die Ausmessung eines beliebigen Vierecks wird nun dem Schüler nicht mehr schwer fallen, da er jedes der beiden Dreiecke berechnen kann, in welche das Viereck durch eine Diagonale getheilt wird. Es ist zweckmäßig, wenn er anfänglich diese Rechnungen einzeln macht, er lernt später nur um so eher das abkürzende Verfahren einsehen und gehörig würdigen, wornach:

a. der Flächeninhalt eines Trapezes durch denjenigen eines Rechtecks gefunden wird, dessen Höhe gleich derjenigen des Trapezes (d. h. gleich der Entfernung seiner parallelen Seiten) und dessen Grundlinie gleich dem (arithmetischen) Mittel aus den beiden parallelen Seiten ist.

b. Der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks durch denjenigen eines Rechtecks erhalten wird, dessen Grundlinie gleich einer Diagonale des Vierecks und dessen Höhe gleich der Summe der auf die Diagonale gezogenen Höhen der beiden Dreiecke ist, in welche das Viereck durch die Diagonale zerfällt.

Bei der Ausmessung beliebiger Vielecke wird der Schüler anfänglich auch etwa nach einzelnen Dreiecken, in die er die Vielecke zerlegt, rechnen können; dann aber ist es natürlich eine bedeutende Abkürzung, wenn er, das Vorige benutzend, entweder je zwei und zwei Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Grundlinie zusammennimmt, so oft dieß nämlich angeht, oder dann auch die Eintheilung und Rechnung nach Trapezen (am liebsten mit je zwei rechten Winkeln) macht.

Das ist nun ungefähr der Stoff fürs Messen von denjenigen Flächen, die in der vorangehenden Nummer in Beziehung auf Konstruktion und mit Rücksicht auf ihre nähern Eigenthümlichkeiten behandelt worden sind.

Nun folgt die Besprechung des rein praktischen Bodens, auf welchem diese Messungen anzuwenden sind. Es ist schon bemerkt worden, daß von eigentlichen Messungen im Freien hier, d. h. bei dieser ersten Stufe der Entwicklung des Flächenmessens, noch keine Rede

sein soll; der Sprung in räumlicher und geistiger Beziehung wäre auf einmal zu groß. Diejenigen Flächenmessungen sind dem Schüler am übersichtlichsten und verständlichsten, die man zuerst an der Wandtafel und dann auf dem Papier vornimmt; hier kann die Konstruktion und Eintheilung mit Lineal, Zirkel oder Equerre für den Schüler auf genau verständliche und der frühern Entwicklung der geometrischen Gebilde angepaßte Weise vollzogen werden. Alsdann können sich natürlich daran anreihen die Uebungen im Messen von Figuren im Schulzimmer (es mögen auch auf dem Boden beliebig welche bezeichnet oder abgesteckt werden) oder auf dem Hausgange, oder vor dem Schulhause ꝛc., zunächst alles noch in der Weise, daß die Konstruktionen, namentlich diejenigen der Höhenperpendikel, auf eine ganz analoge Weise, wie auf dem Papiere ausgeführt werden. Hierauf folgen diejenigen Rechnungsaufgaben, die sich auf die Ausmessung von Flächen beziehen, welche der Schüler sich bloß vorzustellen hat und die, wenn auch von größerer Ausdehnung, doch ganz von der nämlichen Art sind, wie diejenigen, die er in kleinerer Ausdehnung gemessen hat. Die den Flächeninhalt bestimmenden Längen werden in der Rechnungsaufgabe natürlich in Zahlen mitgetheilt, so daß dem Schüler bloß die Ausführung einer Rechnung übrig bleibt, wie er sie schon bei der Messung von Figuren der ganz gleichen Art aber kleinern Umfangs wiederholt gemacht hat. Es wird ihm z. B. angegeben: Ein Ackerstück, das genau die Form eines Rechtecks hat, sei so und so lang und so und so breit, wie groß sei sein Flächeninhalt? Oder ein Stück Wiese bilde ein unregelmäßiges Dreieck von der und der Grundlinie und der und der Höhe (in Zahlen), wie groß demnach die Flächenausdehnung dieses Landstückes sei? u. s. f. Mit diesen Aufgaben, durch die man einen hervorragend praktischen Zweck erreichen will, werden noch verwandte Aufgaben verbunden, bei denen mit der Bestimmung der Flächengröße oder überhaupt mit der Messung, die sich auf eine bestimmte Fläche bezieht, eine gewisse Werthbestimmung verknüpft ist; so z. B. wenn auf den Quadratfuß ein gewisser Werth oder Preis fällt, oder eine gewisse Quantität Stoff oder Material oder Arbeit ꝛc. verwendet werden soll, wie viel ist dann auf eine gewisse Flächenausdehnung zu rechnen? (siehe die Aufgabensammlung, Abtheilung für die Realschule).

6. Auf den vorangegangenen Abschnitt können die Anfänge in einfachen, namentlich auf Flächen sich beziehenden Vermessungen im Freien folgen. Es soll hier durchaus nicht gesagt sein, daß der ganze Abschnitt des praktischen Vermessens im Freien, soweit dasselbe überhaupt in der Volksschule zu berücksichtigen ist, noch auf der zweiten Schulstufe (Realschule) erledigt werden solle oder auch nur könne; im Gegentheil ist, sobald die Volksschule einmal eine innerlich und äußerlich organisirte dritte Schulstufe (Realergänzungsschule) in sich faßt, der Hauptstoff dieses Abschnitts auf dieser dritten Stufe durchzuführen. Es spricht hier der genannte spezielle Lehrstoff, sowie das Alter der Schüler für diese Auffassungsweise. Einmal liegt derselbe dem ernsten beruflichen Leben weit näher und erfordert auch an sich schon eine gewisse Erfahrung, dann ist der 12jährige Schüler in körperlicher wie in geistiger Beziehung noch nicht in dem Maße entwickelt, wie dieß für Manches, was in diesem Abschnitte aufzufassen und auszuführen folgt, erforderlich ist. Es kann sich hier also bloß um Anfänge handeln, und überdieß wird auch hier, wie allenthalben ins Auge zu fassen sein, daß die Volksschule nicht für eine bestimmte Berufsart, wie z. B. diejenige eines Feldmessers, Straßenbauers oder Ingenieurs vorzubereiten, sondern einfach das zu lehren hat, was in höherm oder geringerm Grade Allen nützlich und fürs praktische Leben nothwendig ist. Indessen kann hier nicht mit minutiöser Aengstlichkeit unterschieden und ausgeschieden werden, so wenig als dieß auch beim Rechnungsunterrichte zulässig oder nur möglich ist, wo man, wenn z. B. ein Kind Aufgaben aus dem kaufmännischen Rechnen zu lösen bekommt, auch nicht frägt: Wird es jemals im praktischen Leben eine kaufmännische Thätigkeit verfolgen oder nicht?

Die Erläuterungen, die hier der Lehrer über geometrische Verrichtungen im Freien in möglichst einfacher Weise und unter bestimmter Anlehnung an die Wirklichkeit zu geben hat, mögen sich etwa auf folgende Punkte beziehen:

α. Unterschied in der Ausführung geometrischer Verrichtungen auf dem Felde und eben solcher auf Papier oder auf der Tafel.

Worin kommen beide überein?

β. Ueber die Gränzen von Grundstücken (Wiesen, Aecker, Wälder, Rieter ꝛc.) im Allgemeinen.

Gränzen der Grundstücke, die durch Marksteine, Pfähle ꝛc. von einander geschieden sind.

γ. Ueber das Aus- und Abstecken von Linien.

Bedeutung einer abgesteckten geraden Linie auf unebenem Boden.

δ. Unterschied zwischen der Oberfläche eines Grundstücks und dessen wagrechter Durchschnittsfläche, die man sich bei der Ausmessung desselben zu denken hat. (Z. B. Oberfläche eines Platzes, wenn Hügel von Erde, Sand ꝛc. darauf angehäuft sind und Oberfläche desselben Platzes, wenn er von diesen Erhöhungen frei und eben und wagrecht ist. — Tischfläche und die Oberfläche einer darauf angehäuften Masse Erde. — Der Grund des Teiches, See's, das Becken — und der Wasserspiegel. — Land und Landkarte u. s. f.)

ε. Nothwendigkeit der wagrechten Ausmessung, um ein bestimmtes Maß zu haben. (Verhältniß der Pflanzenmenge, die auf wagrechter oder aber auf schiefer Fläche wächst. — Ansteigender oder fallender Boden als Bauplatz.

Hiemit verbindet der Lehrer Uebungen im Abstecken bestimmter gerader Linien, im Messen von abgesteckten Linien nach wagrechter Ausdehnung, so wie solcher nach schiefer Ausdehnung, steigend oder senkend.

Eine Hauptsache ist die Absteckung von Perpendikeln auf bestimmte gerade Linien, z. B. der Höhen zur Ausmessung von Dreiecken ꝛc. — Hiezu bedarf aber der Schüler, um schnell und sicher verfahren zu lernen, eines einfachen Werkzeuges. Das einfachste ist das Meßkreuz oder Winkelkreuz (Kreuzscheibe), das sich der ältere Schüler leicht selbst verfertigen kann, indem er auf ein ebenes, senkrecht auf einen Stab gestecktes Brettchen zwei senkrechte Linien konstruirt, die sich in der Mitte der Durchbohrung durchschneiden. Zum sichern Zielen oder Visiren können bei den Endpunkten der Senkrechten feine Stiftchen angebracht werden, so wie man noch zur lothrechten Haltung des Stabes mit demselben ein Loth verbinden kann.

Hierauf folgen Uebungen im Ausmessen von drei-, vier-, fünfeckigen Grundstücken ꝛc. auf einem Terrain, das nicht gar zu viele Schwierigkeiten darbietet. Bei rechtwinkliger Absteckung lassen sich diese Figuren leicht nach verkleinertem oder verjüngtem Maße konstruiren, wodurch der Schüler ein einfaches Plänchen des Grund-

stückes erhält. Die Bestimmung des Flächeninhalts kann abwechselnd nach einzelnen Dreiecken, dann abkürzungsweise durch Abtheilung in Trapeze oder beliebige Vierecke vorgenommen werden.

Die letzte Uebung ist die umgekehrte, nämlich die Absteckung einer nach gewissem Maße verzeichneten ganz einfachen Figur auf freiem Grunde.

C. Realergänzungsschule.

Die Realergänzungsschule hat in weiter begründendem Sinne fortzufahren und das zu vollenden, was die vorige Schulstufe in einfacher Weise begonnen hat; die Richtung soll da aber eine hervorragend praktische sein, weil Schul- und Altersstufe dem beruflich bürgerlichen Leben hier schon sehr nahe stehen.

Nun handelt es sich da zunächst wieder um neue Stoffbildung. Die Realschule mußte die Begriffe der Linie, des Winkels und der geschlossenen Fläche so verarbeiten, daß die Verarbeitung selbst sowohl in formal- als praktisch-bildender Hinsicht diejenige Ausbeute gab, wie sie von dieser Schul- und Altersstufe gemäß der Bedeutung der Volksschule zu erwarten ist.

Nunmehr steht die Bildung und nähere Betrachtung der körperlichen Räume bevor. In der gleichen Weise wie man vom Winkel zur geschlossenen Fläche überging, in derselben Weise geht man vom Flächenwinkel zum geschlossenen Körperraum über. Der Gang ist ein ganz analoger mit dem frühern. Beim Längenmessen wurde die gerade Linie mit der geraden Linie in der gleichen Richtung verbunden, bei der Bildung des Winkels in verschiedener Richtung und so endlich zum Einschluß und zur Begränzung der Fläche. Beim Flächenmessen wurde die Ebene (das Flächenmaß) in die Ebene gelegt; nun sollen die Ebenen mit einander auch in verschiedener Richtung zur Bildung des Flächenwinkels, der körperlichen Ecken und des geschlossenen körperlichen Raumes oder des geometrischen Körpers verbunden werden. Eine ökonomische Benutzung der Schulzeit verlangt da aber wirklich nur die Berücksichtigung des Allerwichtigsten. Die Bildung von pyramidalen und prismatischen Körpern bietet für einmal genug Stoff.

Es reihen sich dann hieran zunächst einige Uebungen in der

Darstellung der Oberfläche (Netze) dieser Körper und in der Ausmessung dieser Oberfläche, was sich nach dem ganzen Gange sehr leicht ausführen und anwenden läßt.

Eine Hauptsache ist hierauf die geometrische Zeichnung dieser Körper. Es soll dieß eine Darstellungsweise sein, aus der sich genau die Gestalt und Größe eines Körpers nach bestimmtem Maße, so wie überhaupt die geometrischen Beziehungen desselben entnehmen lassen. Am geeignetsten dürfte die Anwendung der sogenannten Parallelperspektive etwa in der speziellen Form der isometrischen Zeichnungsart sein. Die praktische Richtung ist da leicht zu erkennen.

Nun folgt die dritte Seite der Betrachtung genannter Körper und das ist ihre Ausmessung oder ihre Inhaltsbestimmung. Die Ableitung und Darstellung der Körpermaße und damit zusammenhängend der Gewichte bildet hier den ersten und wichtigsten Punkt; der Schüler soll dadurch zum Abschluß und zur bestimmten Kenntniß des gesetzlichen Maßsystems gelangen. Während er früher die meisten Maße zuerst durch unmittelbare Auffassung ihrer Größe kennen lernte, hat er sie nun allmälig in ihrem gegenseitigen Verhältnisse aufgefaßt, so daß er aus einer Grundeinheit alle übrigen Einheiten der Maße wie der Gewichte ableiten und wirklich bilden kann.

Es ist leicht einzusehen, von welcher Bedeutung eine solche Kenntniß des Zusammenhangs sämmtlicher Maße und Gewichte für den Schüler ist.

Da die Körpermessung im Allgemeinen schon bedeutendere Schwierigkeiten darbietet als die Ausmessung ebener Flächen, wie sie auf der vorigen Schulstufe betrieben wurde, so genügt für den ersten Gang die Ausmessung rechteckiger (d. h. von lauter Rechtecken begränzter) Säulen. Das Uebrige gibt sich mit Hülfe des parallel fortschreitenden und sich erweiternden Rechnungsunterrichtes bei einem folgenden Angriffe nur um so leichter. Und hier ist es nun ganz am Platze die letzte Stofferweiterung folgen zu lassen.

Es sind die gewöhnlicheren von krummen Flächen begränzten Körper, deren Entstehungs- und Bildungsweise dem Schüler noch vorzuführen ist. Diese sind insbesondere der Zylinder, der Kegel und die Kugel.

Aus ihrer Entstehungsweise als Rotationskörper geht für den Schüler mit größter Leichtigkeit eine klare Einsicht in die Bedeutung der Axe, der Seitenlinien, Meridiane und der Parallelkreise dieser Körper hervor, eine Einsicht, die an andern Orten, z. B. in der Geographie, nach der Gelegenheitsmethode mit großer Zeitversäumniß und vielen Umschweifen nicht einmal annähernd erreicht wird.

Da nur die Oberfläche der beiden ersten Körper in eine Ebene abwickelbar ist, so können auch nur die Netze der beiden ersten Körper durch die Schüler ordentlich dargestellt und darauf gestützt deren Oberflächen mit wirklicher Einsicht berechnet werden.

Wer aber glaubt, auch über die Kugel noch dießfällige Mittheilungen dem Schüler machen zu sollen, dem wollen wir später geeigneten Ortes bei der speziellen Ausführung einige weitere Andeutungen machen.

Da die Messungen, die sich auf die genannten drei Rotationskörper beziehen, sämmtlich auf der Ausmessung der Kreislinie, der Kreisfläche ꝛc. beruhen, so ist hier der Ort, das was in der Volksschule über die Kreismessung behandelt werden kann und zu behandeln nothwendig ist, folgen zu lassen. Es ist dieß nun um so eher möglich, als auch der Unterricht im Rechnen bis zu dieser Höhe das Nöthige in der Bruchlehre geleistet haben wird. Die strenge geometrische Bestimmung der Verhältnißzahl des Kreisradius zur Kreislinie ist nur mit höhern Hülfsmitteln möglich. Die annähernde Erkenntniß derselben, wie diese für die Volksschule ausreichend ist, schließt sich wohl am besten an die früher behandelte Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks an, woraus wenigstens die Erkenntniß der Ganzen jener Verhältnißzahl geschöpft werden kann. Es darf der Umstand, daß man dem Schüler hier auf dieser letzten Schulstufe auch noch etwas mittheilen muß, zu dessen genauer Erforschung seine Kräfte eben nicht ausreichen, durchaus keine pädagogischen Bedenken erregen, noch irgend welche Entmuthigung hervorrufen. Denn erstens erkennt da der Schüler, dessen Verstand schon mehr der Reife entgegengeht, daß es auch in der Geometrie Dinge zu berechnen gibt, wozu es der vollen Kraft eines ausgebildeten Verstandes bedarf. Er lernt einsehen, daß man der Wissenschaft, von der man ihm sagt, sie habe die und

die Resultate genau so und so bestimmt, vieles schuldig ist und er empfängt so im Allgemeinen Achtung vor dem, was man wissenschaftliche Arbeit nennt, ein Gefühl, das im gemeinen Leben nicht selten nur zu sehr mangelt und dessen zarte Pflege die Volksschule nicht verabsäumen soll. Ein verborgenes Talent mag sich auch angespornt fühlen, Tieferes ergründen zu wollen und zu dem zu gelangen, wozu es von Natur vorzüglich bestimmt ist. Es hat also auch dieß seine gute Seite. Zweitens ist die Erscheinung, daß man den Schülern der obern Abtheilung der Volksschule neben der von ihnen genau erkannten Stoffentwicklung auch einmal ein wissenschaftliches Ergebniß als solches einfach mittheilt, und sie dasselbe anwenden und erproben läßt, etwas, wozu sogar wissenschaftliche Unterrichtsanstalten von mittlerer Höhe nicht selten ihre Zuflucht nehmen müssen, und diese sind daher in dem genannten Punkte verhältnißmäßig nicht besser daran als die Volksschule.

Die allgemeine Ausmessung der obgenannten geometrischen Körper ist nun gehörig vorbereitet. Der Gang kann etwa folgender sein:

An die Ausmessung der rechteckigen Säule schließt sich diejenige der rechtwinklig dreiseitigen Säule, dann die der drei-, vier- und mehrseitigen prismatischen Körper überhaupt, endlich die des Zylinders.

An die Ausmessung des dreiseitigen Prismas knüpft sich diejenige der dreiseitigen, dann der mehrseitigen Pyramide, endlich des Kegels und der Kugel.

Natürlich haben sich hieran als Hauptsache passende praktische Aufgaben anzureihen, die das Abgeleitete theils befestigen helfen, theils fürs Leben in der mannigfaltigsten Weise fruchtbar machen sollen.

Die graphische Darstellung der runden Körper, wodurch in Verbindung mit dem Frühern die Grundlage zur geometrischen Zeichnung verschiedener technischer Gegenstände, die im Kreise des beruflichen Lebens von Wichtigkeit sind, gelegt werden soll, darf hier ebenfalls nicht fehlen.

Endlich folgt auf der letzten Unterrichtsstufe die Nachholung der schwierigeren Längen-, Flächen- und Körpermessungen im Freien, die dasjenige ergänzen sollen, was früher in diesem angewandten Theile nur in den ersten Anfängen begonnen werden konnte. Eine Menge der nützlichsten Aufgaben mit Hinsicht auf die Bestimmung

des Volumens oder des Gewichtes, oder des Werthes oder Betrages gewisser Gegenstände haben hier ihren Ursprung.

Hieher gehören auch die fortgesetzten Uebungen im Aufnehmen und Entwerfen von Grundplänen, in der Kenntniß einfacher Grund- und Aufrisse und Durchschnitte, womit entsprechende Berechnungen zu verbinden sind, endlich in der graphischen Darstellung von Gegenständen und Vorrichtungen des allgemein praktischen Lebens, jedoch Alles in der Ausdehnung und unter der Beschränkung, wie dieß für sämmtliche Schüler der letzten Volksschulabtheilung, die sich den verschiedensten Berufsthätigkeiten widmen, noch ersprießlich und gedeihlich sein kann und wie es neben der Behandlung des übrigen Bildungsstoffes in der Volksschule überhaupt möglich ist.

Dieß wäre der Gang der methodischen Entwicklung des geometrischen Unterrichtsstoffes auf den verschiedenen Stufen der Volksschule.

Es geht aus der bisherigen Betrachtung hervor, daß von der Zeit an, da in dem Schüler geometrische Begriffe und geometrische Wahrheiten zum bestimmten Bewußtsein erhoben werden sollen, d. h. von der II. Schulstufe oder der Realschule an, der methodische Verlauf des Unterrichts sich beständig auf folgende drei Richtungen bezieht:

1. Die lebendige Veranschaulichung der Entstehung der geometrischen Gebilde. Diese Veranschaulichung geschieht gewöhnlich durch einen Bewegungsakt, und es werden *mit* dem bildsamen Stoffe zugleich dessen allgemeinste Eigenschaften dargestellt.

   Hieraus schöpfen folgende beiden Richtungen ihre wesentliche Begründung:

2. Die graphische Darstellung der geometrischen Gebilde, Konstruktion, Zeichnung (mit Anschluß von technischen Darstellungen).
3. Die Größenbestimmung oder Ausmessung der geometrischen Gebilde (mit Anschluß der Größenbestimmung konkreter Gegenstände, die Annäherungen zu jenen und somit den materiellen Stoff bilden, der jenen zur praktischen Unterlage dient).

Die beiden letzten Richtungen würden für sich allein dem Schüler unverständlich bleiben, wenn sie nicht ihre Beleuchtung durch die erstere erhielten; denn wenn dem Schüler nicht der innere *Grund* einer Verrichtung und die allgemeinen *Eigenschaften des Stoffes*, an dem er jene Verrichtungen vollziehen soll, bekannt sind, so tappt er im Finstern und kann höchstens nur *maschinenmäßige* Fertigkeiten sich aneignen, die er indessen lange nicht

mit der Sicherheit ausübt wie die Maschine, da er unter solchen Verhältnissen weniger ist als sie. In der oben bezeichneten Verbindung mit der erstern Richtung tragen dann aber auch die beiden letztern noch vieles zum rechten innern Verständniß der Sache bei und haben so einen doppelten Nutzen.

Die Volksschule hat hiedurch den begründenden Theil des Unterrichts auf ein Minimum reduzirt; wer da noch weiter reduziren will, läßt einfach den begründenden Theil ganz weg und dann verfährt er, wie man heutzutage noch vielorts beim Unterrichte, nicht aber im Leben verfährt, wo man kein Haus mehr auf bloßen Sand zu bauen pflegt.

Leider werden sogar noch an höhern Unterrichtsanstalten, wo man es nicht erwarten sollte, ganze Schulklassen systematisch mit Konstruktionen, Zeichnungen und Ausrechnungen abgemüdet, deren innerer Grund dem Schüler nicht besser bekannt ist, als dem geduldigen Zirkel und Bleistift, die ihm diese Aufgaben ausführen helfen. Man kann nicht genug wiederholen, wie sehr es unverantwortlich ist, eine geistige Jugend auf solche Weise abzustumpfen und für einen zukünftigen gedeihlichen Unterricht beinahe unbrauchbar zu machen!

Die oben auseinander gehaltenen drei Richtungen muß auch der Schüler allmälig erkennen und festhalten; er wird nach und nach inne, daß bei jeder Gattung der geometrischen Größen erst ihre Entstehung, behufs Erkenntniß ihrer allgemeinen Eigenschaften und Beziehungen, dann ihre abbildliche Darstellung und Konstruktion und endlich ihre Größenbestimmung ꝛc. in Betrachtung fällt. Dieß gibt ihm den geistigen Faden, an dem er die einzelnen Ergebnisse aus sich selbst wieder zu erzeugen und fest zu knüpfen vermag und woran er auch sicher einzelne sonst isolirte praktische Kenntnisse ꝛc. anreiht.

So wird er, wie das Gebiet der rechnenden, so auch dasjenige der geometrischen Thätigkeit mit seinem geistigen Leben verweben und in dieser Verbindung werden beide gleich gesichert und gleich fruchtbar sein.

§ 5.

Methodische Gliederung des geometrischen Unterrichtsstoffes nach den einzelnen Schuljahren gemäß der vorangegangenen Entwicklung des gesammten Unterrichts.

I. Schulstufe, Elementarabtheilung.

Vom zurückgelegten 6. bis 9. Altersjahre.

Geometrischer Vorbereitungsunterricht.

Erstes Schuljahr: Anregung und Entwicklung des Orts-, Formen- und Größensinnes durch Betrachtung von Gegenständen aus der

Umgebung. Unterscheidung von Punkten und Strichen in verschiedener Zahl und Lage. Nachbildung einfacher aus Linien gebildeter Formen als Einleitung für den Schreib- und Zeichnungsunterricht.

Zweites Schuljahr: Weitere Uebung des Auges und der Hand im Zeichnen der einfachsten meist aus wenigen geraden oder krummen Zügen zusammengesetzten Bilder vorgelegter oder wenigstens bekannter Gegenstände. Geeignete Wandtabellen zur Nachbildung können hier wie schon im vorigen Jahre mit Vortheil benutzt werden.

Drittes Schuljahr: Fortsetzung der Uebungen in Auffassung von Form und Größe mit Benutzung leichter Zeichnungsvorlagen.

Anmerkung: Es wäre eine ganz falsche Auffassung, wenn man glaubte, der hier angedeutete Vorbereitungsunterricht in der Elementarschule könnte oder sollte ein eigener für sich bestehender Fachunterricht sein. Er vertheilt sich vielmehr auf verschiedene Richtungen. So fällt die hier im ersten Schuljahre zu lösende Aufgabe zusammen mit dem allgemeinen Elementaranschauungsunterricht, der die Grundlage bildet für den Unterricht in Sprache (Schreiben inbegriffen), Zahl und Form.

Dieser erste Anschauungsunterricht ist also weder ausschließlicher Sprach- noch Rechnungs- oder Zeichnungsunterricht, die geometrische Grundlage liegt im Keime ebenfalls darin. Im zweiten und dritten Schuljahre tritt die geometrische Beziehung einfach im Zeichnen ganz einfacher Figuren als abbildlicher Darstellungen bekannter Gegenstände hervor.

Also nur deßwegen, weil die ersten geometrischen Beziehungen in der Elementarschule mit Anderm in der natürlichsten Verbindung auftreten, wird dieses Andere auch hier beim geometrischen Vorbereitungsunterricht aufgeführt. Daher nicht vielerlei Unterricht, aber vielseitige Anregung.

II. Schulstufe oder erste Realabtheilung.

Vom zurückgelegten 9. bis 12. Altersjahre.

Anfang des geometrischen Unterrichts.

Viertes Schuljahr: Bewußte Bildung der Raumelemente und abbildliche Darstellung derselben. Verbindung von Linien durch Messung; einfaches praktisches Längenmessen durch die gesetzlichen Längenmaße. Verbindung von Linien durch Umdrehung. Winkel, und damit zusammenhängende Konstruktionen und Messungen.

Fünftes Schuljahr: Bildung und Konstruktion des Dreiecks und Verarbeitung der hieraus sich ergebenden Beziehungen. Die Parallellinien als ein Gränzfall des Dreiecks, Nutzanwendung davon auf Dreiecke. Vierecke. Konstruktion regelmäßiger und unregelmäßiger Vielecke. Einleitung zum Flächenmessen: Flächenmaße.

Sechstes Schuljahr: Ausmessung beliebiger Rechtecke, rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke (auch mit Voraussetzung einfacher gebrochener Maßzahlen). Ausmessung der aus beliebigen Dreiecken zusammengesetzten Vier- und Vielecke. Mannigfaltige leichtere Anwendungen hiezu. Anfänge in Vermessungen im Freien. Aufnahme und Zeichnung der leichtesten Grundplänchen.

III. Schulstufe oder zweite Realabtheilung.

(Realergänzungsschule.)

Vom zurückgelegten 12. bis 15. Altersjahre.

Schluß des geometrischen Unterrichts.

Siebentes Schuljahr: Bildung der einfachern von Ebenen begränzten geometrischen Körper aus gegebenen Bestimmungsstücken und nähere Betrachtung dieser Körper hinsichtlich ihrer allgemeinsten Eigenschaften. Darstellung und Ausmessung ihrer Oberflächen. Geometrische Zeichnung dieser Körper in Parallelperspektive. Einleitung zum Körpermessen: die Körpermaße und Gewichte; praktische Aufgaben.

Achtes Schuljahr: Bildung der gewöhnlichern von krummen Flächen begränzten Körper, namentlich des Zylinders, Kegels und der Kugel. — Ihre Oberfläche. — Ausmessungen, gestützt auf die hier anzubringende Messung der Kreislinie und Kreisfläche. Geometrische Zeichnung dieser Körper. Bestimmung des körperlichen Inhalts verschiedenartiger Körperräume, namentlich mit Rücksicht auf praktische Nützlichkeit.

Neuntes Schuljahr: Nachholung der schwierigern Längen-, Flächen- und Körpermessungen, die für das gewöhnliche Leben von Bedeutung und Vortheil sind (hauptsächlich Messungen im Freien). Grundpläne in gesteigerter Fortsetzung der frühern Uebungen; Durchschnitte. Grund- und Aufrisse einfacher Baugegenstände. Damit verbundene Rechnungen. Geometrische Darstellung technischer Gegenstände und Vorrichtungen, die für den beruflichen Verkehr von Wichtigkeit sind.

Anmerkung: Mit der Realergänzungsschule, in welcher die Tendenz der geistigen Vorbereitung und Befähigung für das bürgerliche Berufsleben in den Vordergrund tritt, muß der geometrische Unterricht der Volksschule als solcher abgeschlossen, d. h. es soll bis dahin das hieher gehörende Gebiet völlig durchgemacht werden. Sollte auf der nächsten und letzten Schulstufe, d. i. in der Zivilschule, die den vorherrschenden Zweck der Vorbereitung des jungen Bürgers als Glied der Gemeinde und des Staates hat und die der kirchlichen Vor-

bereitungs- oder Unterweisungsschule nebengeordnet ist, gleichwohl mitunter eine praktische Frage, sei es über Landwirthschaft oder über Gewerbe ꝛc. zur Besprechung kommen (weil keine Schulstufe bloß einen einzigen ganz ausschließlichen Zweck hat); so sind, im Falle hiebei geometrische Hülfsmittel benutzt werden müssen, nicht mehr diese Gegenstand des Unterrichts, sondern sie müssen aus den Leistungen der vorangegangenen Schulstufe geschöpft werden können; weßwegen also in der Zivilschule von einem geometrischen Unterricht als solchem nicht mehr die Rede sein kann.

§ 6.

Gränzlinien des geometrischen Unterrichts für Töchter.

Es ist in vielen Unterrichtsanstalten, z. B in Sekundarschulen, Privatinstituten, Töchterschulen ꝛc., Uebung, den Mädchen keinen geometrischen Unterricht zu ertheilen. Man scheint anzunehmen, der geometrische Unterricht gewähre ihnen entweder keinen Nutzen fürs Leben, oder er könne nicht ihrer Fassungskraft angepaßt werden. Es frägt sich also, soll diese Uebung auch auf die Volksschule ausgedehnt werden?

Allerdings, wäre eine dieser Annahmen richtig, oder wären es sogar beide zugleich, so dürfte von einem geometrischen Unterricht für die Töchter wohl nirgends, also auch nicht in der Volksschule, die Rede sein. Wir halten aber beide Ansichten für unrichtig.

Was zunächst den ersten Punkt anbelangt, nämlich ob auch den Mädchen geometrische Kenntnisse von praktischem Vortheil sein können, so hat man nur auf den Kreis der weiblichen Wirksamkeit in Küche und Haus hinzuweisen. Der ökonomische Sinn für richtiges Abmessen und Eintheilen erhält im wirklichen Messen, in der Kenntniß und Anwendung der gebräuchlichen Maße das beste Unterstützungsmittel. Wie oft kommt nicht die Mutter, die Tochter, die Magd in den Fall, wirklich genau abzumessen und abzuwägen!

Wie oft wäre es ihnen nützlich, vermittelst besserer Kenntniß von Maß und Messung einen schnellen Ueberschlag über diesen oder jenen Vorrath zu machen, oder von einem Maß schnell auf ein anderes zu schließen. Die praktische Hausmutter kann in tausend Fällen, besonders wenn sie auch einigermaßen mit der Naturkunde vertraut ist, von der Kenntniß des Messens Anwendung machen.

Allein ebensowenig als das Haus dem Kinde eine ausreichende Kenntniß der Zahlen und des Rechnens gibt, ebensowenig gibt es ihm eine genügende Kenntniß der Maße und des Messens. Die Schule muß es also thun und das letztere fällt in die Aufgabe der Volksschulgeometrie.

Doch eben so sehr als in den genannten Richtungen des Messens sind Kenntnisse und Fertigkeiten im konstruirenden Zeichnen dem thätigen weiblichen Geschlechte nothwendig. Seine Arbeiten, die sich auf Herstellung bestimmter Formen beziehen, erhalten durch die Einsicht in einfache geometrische Konstruktionen eine sehr wesentliche Unterstützung. Der Schnitt der Muster zur Herstellung von Kleidungsstücken z. B. wird wesentlich durch die Kenntniß einfacher geometrischer Konstruktionen erleichtert. Die Richtung des Aesthetischen kann sich auch um so mehr geltend machen, je mehr die Hülfsmittel vorhanden sind, die entsprechenden Verhältnisse abzumessen und durch Zeichnung darzustellen.

Es unterliegt somit keinem Zweifel, daß einfache geometrische Kenntnisse im Messen und Zeichnen auch für das weibliche Geschlecht von entschiedener Wichtigkeit sind.

Was den zweiten Punkt anbetrifft, nämlich ob das Mädchen eben so gut befähigt sei, wie der Knabe, den einfachen geometrischen Unterricht der Volksschule aufzufassen, so ist zunächst kein Grund vorhanden, warum die Natur dem Mädchen Blick und Einsicht in die räumlichen Verhältnisse versagt und diese Fähigkeit nur dem Knaben zugewandt haben sollte. Die Erfahrung in allen denjenigen unserer gewöhnlichen Volksschulen, in welchen ein natürlich sich entwickelnder geometrischer Unterricht ertheilt wird, zeigt auch, daß im Allgemeinen die Mädchen in dem genannten Unterrichtszweige eben so geweckt und mit eben so scharfem Blicke begabt sind, wie die Knaben. Zudem ist ja die Geometrie der Volksschule nicht ein abstraktes Feld difficiler Logik wie die wissenschaftliche Theoremgeometrie, sondern in ihr tritt, — was die letztere eben gewöhnlich voraussetzt — die konkrete Seite des Messens und Zeichnens, gestützt auf anschauliche geometrische Entwicklung, mit beständiger Beziehung auf das Leben als Hauptsache hervor.

Auf die geistige Entwicklung des Mädchens wird die geometrische Thätigkeit, die mehr der Verstandesrichtung angehört, nur vortheilhaft einwirken. Die Erfahrung lehrt, daß es nicht gut ist, wenn den Mädchen nur solche geistige Nahrung geboten wird, die hauptsächlich die Weichheit des Gemüthes und die Thätigkeit der Phantasie befördert. Es ist im Gegentheil — sagt Seminardirektor Dr. Scherr in seiner Pädagogik — sehr zweckmäßig, „wenn die Bildungsbestrebungen bei Mädchen so hervortreten, daß auch ihr Verstand zu ernster Thätigkeit hingeleitet wird, und es ist gewiß ein Mißgriff, wenn man schon frühzeitig anfängt, das

Mädchen nur in den Richtungen zu beschäftigen, die der weichen weiblichen Natur besonders zusagen."

Wenn wir so auf den Schluß kommen, daß auch in der Volksschule die Mädchen am geometrischen Unterrichte Theil nehmen sollen, so frägt es sich nun noch, in welcher Ausdehnung dieses geschehen soll?

Der Unterricht in der Elementar- und ersten Realabtheilung (I. und II. Schulstufe) wird auch in allen übrigen Fächern Knaben und Mädchen gewöhnlich gemeinsam ertheilt; die Kenntniß der Elemente ist für alle gleich nothwendig und die Einführung in die Realkunde auf der II. Schulstufe verlangt für Knaben wie für Mädchen dieselben Erfordernisse. Der geometrische Unterricht, so weit er auf der ersten und zweiten Schulstufe zu berücksichtigen ist, kann also hier von beiden Geschlechtern in der Hauptsache gemeinsam benutzt werden; einzig dürften die Anfänge der Vermessungen im Freien und die hierauf bezüglichen Uebungen am Schlusse des sechsten Schuljahres den Töchtern erlassen werden.

Auf der dritten Schulstufe, wo die Tendenz des Beruflichen vorherrschend wird, da sollen die Mädchen an demjenigen Unterricht, der mehr die Berufsarten männlicher Personen ins Auge faßt, nicht mehr Theil nehmen; sie erhalten dafür in der sogenannten weiblichen Arbeitsschule einen besonders für sie berechneten Unterricht.

Was sie auf dieser letzten Schulstufe aus der Geometrie noch lernen sollen, das bezieht sich hauptsächlich auf die Kenntniß der Körpermaße und Gewichte, sowie auf einfache auf das häusliche Leben angewandte Messungen und Rechnungen mit denselben. Diese Rechnungen sollten namentlich dann auch in Verbindung gebracht werden mit den aus der Naturkunde gewonnenen Kenntnissen zur Anwendung in Garten, Küche und Haus.

Insbesondere wäre es dann auch an der Arbeitsschule, die Kenntnisse, welche das Mädchen im Messen und geometrischen Zeichnen erworben hat, so zu benutzen, daß dasselbe seine Arbeiten wirklich bälder und mit um so größerer Gewandtheit und Geschicklichkeit auszuführen im Stande sein würde. Es wäre also wünschenswerth, daß die Arbeitslehrerinnen selber in der genannten Richtung zu ihrem und ihrer Zöglinge Vortheil besser vorgebildet wären; mancher Arbeit würde dadurch eine vernünftigere und zweckmäßigere Behandlungsweise zu Theil.

Auch hier ist von der Zukunft ein Besseres zu erwarten!

§ 7.

Das Uebungsbuch für den geometrischen Unterricht oder die geometrische Aufgabensammlung der Volksschule.

Die gleichen allgemeinen Gründe, die uns im ersten Theile unsers Handbuchs veranlaßten, die Nothwendigkeit der Einführung eines individuellen Rechnungslehrmittels (resp. eines Uebungsbuches für die Schüler) in die Volksschule hervorzuheben, gelten auch hinsichtlich eines geometrischen Lehrmittels. Ja es tritt hier diese Nothwendigkeit noch um so stärker hervor, da hier neben der messend rechnenden Richtung noch die konstruirende auftritt, wodurch der ganze Unterrichtsgang mannigfaltiger als beim Rechnungsunterrichte wird und der Schüler also um so mehr veranlaßt werden muß, seine Kräfte nach allen Seiten gehörig zu üben.

Es frägt sich nun zunächst:

Welche Stellung und Bedeutung soll ein geometrisches Lehrmittel in der Volksschule im Allgemeinen haben?

Um den geometrischen Unterricht fruchtbar zu machen, bedarf die Schule eines Hülfsmittels, wodurch dieser Unterricht vornämlich auf die **Selbstthätigkeit** des Schülers gestützt wird. Diese Selbstthätigkeit muß sowohl die Wiederholung und Anwendung der Hauptpunkte des Unterrichts als auch die selbsteigene Auffindung und Darstellung einfacher geometrischer Resultate durch den Schüler umfassen.

Das Lehrmittel muß aus dieser Rücksicht eine methodische Aufgabensammlung sein, durch welche zudem die Uebersicht der Hauptresultate des Unterrichts erleichtert wird. Wir wollen uns hierüber etwas näher aussprechen:

Man hat die Bedeutung einer mathematischen Aufgabensammlung für die Volsschule mitunter schon in dem Sinne auffassen wollen, daß dieselbe strenge nur das enthalte, was man unter mathematischen Aufgaben in wissenschaftlicher Bedeutung versteht. Die mathematische Aufgabe unterscheidet sich vom mathematischen Lehrsatze besonders dadurch, daß jene den Gegenstand als noch zu suchend, dieser als schon gefunden und ausgemacht darstellt. In Folge dessen soll durch eine mathematische Aufgabe gewöhnlich eine Rechnung, oder eine Messung, oder eine Konstruktion vermittelst bereits gefundener und bekannter Sätze ausgeführt werden.

Wollte man nun an eine mathematische Aufgabensammlung für die Volksschule die Anforderung stellen, daß sie nur solche Aufgaben enthalte, durch die einfach ein mathematisches oder speziell geometrisches Resultat mittelst

Anwendung bestimmter Sätze herzustellen ist, unbekümmert darum, ob der Schüler die mathematischen Gesetze wirklich geistig beherrsche, d. h. sie selbst einfach abzuleiten verstehe, und mit Bewußtsein auf die verschiedenen praktischen Verhältnisse anwenden könne, so erhielte man hiedurch ein form- und farbloses Lehrmittel, das den Klassenunterricht der Volksschule jedenfalls nicht sehr erleichtern und fruchtbar machen würde.

Durch eine solche Aufgabensammlung wäre dem Schüler noch kein Hülfsmittel zur Uebersicht, Wiederholung und naturgemäßen Anwendung der Hauptpunkte des Unterrichts geboten. Damit er aber reife Früchte aus diesem Unterrichte ziehen kann, muß er die Herkunft und den Fortschritt des Einzelnen sowie des Ganzen übersehen können, sonst bleibt ihm der Wald vor lauter Bäumen unbemerkt; er muß insbesondere auch die Veranlassung haben, die einfachen Betrachtungen und Ableitungen, in welche ihn der Lehrer durch den mündlichen Unterricht eingeführt hat, für sich selbst oftmals zu wiederholen, sonst verfliegt ihm der geistige Inhalt des Unterrichts und er verliert den Faden derselben; endlich muß ihm eine innige Vermittlung zwischen den rein geometrischen Beziehungen und den praktischen Aufgaben, deren Lösung durch diese Beziehungen zu begründen ist, stufenweise und übersichtlich geboten werden, sonst kommen ihm die praktischen Aufgaben zu schwierig vor und er wird nicht fest in der bewußten Anwendung und Benutzung der geometrischen Hülfsmittel und nicht geschickt im eigenen Suchen und Auffinden, weil er eben nicht allmälig dazu geführt wird.

Wir verstehen also unter den geometrischen Aufgaben, die dem Schüler durch die Aufgabensammlungen vorgelegt werden sollen, nicht bloß diejenigen, nach welchen er einfach eine Linie, einen Winkel, eine gerad- oder krummlinige Figur, einen Körper ꝛc. zu messen oder zu zeichnen hat, sondern auch diejenigen passenden Aufgaben, durch welche er veranlaßt und geleitet werden soll, sich die Gegenstände des Unterrichts durch eigenes Schaffen und Untersuchen zu geistigen Erwerbnissen zu machen und durch welche er zur selbstständigen Anwendung der geometrischen Kenntnisse und Fertigkeiten im praktischen Leben tüchtig vorbereitet wird.

Eine geometrische Aufgabe — nicht im Sinne der strengen Mathematik, aber im Sinne der Pädagogik — ist uns also jede Anforderung an den Schüler, durch die er veranlaßt wird, sich mit einem Gegenstande des reinen oder angewandten geometrischen Unterrichts in eigener Thätigkeit selbstsuchend oder selbstschaffend zu beschäftigen.

Eine Aufgabensammlung, die nur Aufgaben enthielte, wie sie von der platt praktischen Richtung gewünscht werden, nämlich solche, durch die allein das Können, die Fertigkeit erzielt wird, wäre aber nicht bloß ein form- und farbloses, sondern auch ein ganz einseitiges Lehrmittel: der Schüler soll verstehen, was er kann, aber auch können, was er versteht, und zu beidem ist seine Selbstthätigkeit nöthig, d. h. in beiden Richtungen soll er durch Aufgaben harmonisch gefördert werden.

Gibt man ihm ausschließlich oder ungebührlich vorherrschend Aufgaben der einen Art, so wird er in einem Fall Manches können, was er nicht versteht, und im andern Falle mit einigem Verständniß keine oder nicht die rechte Fertigkeit verbinden. In welchem Verhältnisse die eine und die andere Art dieser Aufgaben in der Sammlung zu berücksichtigen sind, davon werden wir später noch sprechen.

Wir kommen also durch alle Betrachtungen wieder auf den Schluß, daß die mathematische Aufgabensammlung eine methodisch bearbeitete sein muß, methodisch in Hinsicht auf die Anordnung des Unterrichtsstoffs, so wie in Hinsicht auf dessen grundsätzliche Entwicklung.

Wir lassen hier eine Stelle aus einem leitenden Artikel eines neuern schweizerischen Schulblattes folgen, mit deren Inhalt wir vollständig einverstanden sind und die ganz wohl auch ihre Anwendung auf die hier in Rede stehende Aufgabensammlung findet:

„Es versteht sich wohl von selbst, daß dem Lehrmittel eine bestimmte Methode, ein bestimmter Gang des Unterrichts zu Grunde liegen muß. Je weniger dieß der Fall ist, um so mehr wird die Brauchbarkeit vermindert nnd die Anwendung desselben erschwert. Dieß gilt auch dann noch, wenn der Lehrer selbst einen andern Weg einschlägt. In einem mathematischen Lehrmittel muß eine Methode vorhanden sein; wollte man dieselben bis aufs Aeußerste fliehen, so bliebe man immerhin noch in der Methode des Unsinns befangen. Es kann sich also für uns nur fragen, welche Methode soll dem Lehrmittel zu Grunde gelegt werden.

„Voraus muß man nicht vergessen, daß der Zweck eines Lehrmittels nicht weiter geht, als zur Förderung eines sachgemäßen Unterrichts nothwendig ist und daß dieser Zweck nicht darin bestehen kann, die freie Selbstthätigkeit des Lehrers unnöthig zu machen.

„Es gibt gewisse allgemeine Principien im Unterrichte eines Lehrfaches, die über der Individualität des Lehrers und Schülers und über örtlichen und zeitlichen Verhältnissen erhaben sind, sie bilden die Konstante

in der Methode. Innerhalb dieser Prinzipien gibt es eine große Mannigfaltigkeit von verschiedenen Verfahrungsweisen, in denen sich die Individualität des Lehrers geltend macht, worin die Individualität der Schüler speziell zu berücksichtigen ist und die besondern örtlichen und zeitlichen Verhältnisse sich geltend machen können. Diese verschiedenen Umstände bilden die Variable in der Unterrichtsmethode.

„Nun ist aber kein Lehrmittel gedenkbar, das jene allgemeinen Prinzipien in abstrakter Weise darstellen könnte. Die zu Grunde gelegte Methode soll eine konkrete sein, wie sie die am häufigsten vorkommenden Verhältnisse erfordern. Es ist dann Sache des Lehrers zu entscheiden, in wie weit die speziellen Verhältnisse Modifikationen in den Ausführungen des Lehrmittels erheischen. Der Lehrer soll sich hüten, eine konkret durchgeführte Methode zur stereotypen zu machen; aber eben so wenig kann er verlangen, daß ein Lehrmittel, das für weitere Kreise bestimmt ist, gerade seinen Verhältnissen speziell angepaßt sei.

„Wollte man das letztere, so müßte nicht nur jede einzelne Schule ein besonderes Lehrmittel haben, sondern dieselbe Schule hätte für jeden neuen Jahrgang wieder ein neues Lehrmittel nöthig. Es ist also durchaus nothwendig, daß man Wesentliches und Unwesentliches aus einander halte, und daß man ein Lehrmittel nicht als einen bis in alle Einzelnheiten gültigen Unterrichtskodex betrachte.

„Die Geometrie scheint uns nun gerade dasjenige Unterrichtsfach zu sein, bei dem man sich am leichtesten über ein allgemeines Prinzip der Methode einigen kann. Sie ist ein so reines Produkt der menschlichen Verstandesoperation, daß der geometrische Unterricht nur diese Verstandesoperation im Schüler zu veranlassen hat, um denselben in den Besitz der geometrischen Kenntnisse zu bringen. Die hierauf basirte Methode wird die naturgemäßeste und fruchtbarste sein. Es versteht sich, beiläufig gesagt, wohl von selbst, daß man dem Schüler nicht eine Operation zumuthen darf, die überhaupt über seiner geistigen Sphäre liegt, oder zu welcher ihm die nöthige Grundlage fehlt."

Wir treten nun näher auf die Frage ein:

Welchen Anforderungen sollen die Aufgaben, aus denen das geometrische Lehrmittel zu bilden ist, im Besondern genügen?

Wir haben schon auf zwei Hauptarten von Aufgaben hingewiesen, welche die Aufgabensammlung enthalten muß, nämlich:

1. solche, welche das wirkliche Verständniß und die geistige Beherr-

schung der zur Anwendung im Leben nothwendigen geometrischen Gesetze erzielen und befestigen helfen;

2. solche, durch welche die Fertigkeit in der Anwendung dieser Gesetze auf praktische Verhältnisse des Lebens erzielt und die Gewandtheit im geschickten Angriff dieser Verhältnisse, wie im eigenen Auffinden richtiger Lösungsweisen befördert wird.

Die erstere Art hat sich prinzipiell an den methodischen Unterrichtsgang des Lehrers anzuschließen, um den Resultaten geistigen Halt zu verschaffen und dieselben allseitig verarbeiten zu lassen. Hiebei wird vorausgesetzt, daß der Lehrer einen auf lebendige Anschauung gegründeten Unterricht ertheile, wodurch es dem Schüler möglich wird, eine einfache geometrische Ableitung oder Untersuchung, wie sie die Aufgabensammlung verlangt, auch in dem Falle durchzuführen, wenn der Lehrer in der vorausgegangenen Lektion nicht einmal genau den gleichen speziellen Gang verfolgt hat, wie er im Lehrmittel eingeschlagen ist.

Die Individualität und Selbstständigkeit des Lehrers hat hier innerhalb der allgemeinen Methode, die auf den Prinzipien der psychologisch genetischen Entwicklung beruht, freien Spielraum. Ja ein ausgezeichneter Lehrer wird bei einem in diesem oder jenem Punkte ganz eigenthümlichen Lehrverfahren die hiervon abweichend gestellten einzelnen Aufgaben im Lehrmittel dennoch wohl zu benutzen wissen, indem er durch dieselben an seinen Schülern erproben kann, in wie weit sein Lehrgang die Schüler auch zu einer solchen Lösung von Aufgaben befähigt habe, die nach einer etwas andern Anschauungsweise, als die im Unterricht zu Tage getretene durchgeführt werden soll.

Diese Aufgaben der ersten Art sind möglichst deutlich und mit Berücksichtigung der nöthigen Kürze zu stellen, um den Schüler (zwar ihm unbemerkt) dahin zu leiten, daß er selbstthätig in seinem Geiste produzirt, was als geometrische Lehre in ihm haften soll. Der Trieb zu finden und zu erfinden soll hiebei die erste leitende Anregung erhalten.

Ferner ist bei diesen Aufgaben nicht zu vergessen, daß dieselben alle schon von praktischen Beziehungen in der Weise durchwoben sein müssen, daß sie stets ein Hinlenken auf die eigentlich angewandten Aufgaben in vorbereitender und unterstützender Richtung in sich schließen. Dadurch sollen die Aufgaben der zweiten Art naturgemäß eingeleitet werden, so daß sie dem Schüler nicht zu fremdartig und schwierig erscheinen.

Die ganze Bedeutung der Aufgaben der ersten Art ist diejenige, welche im Rechnungslehrmittel die uneingekleideten Rechnungsaufgaben haben, durch welche die verschiedenen Zählformen, die Zahleigenschaften und Zahlverbindungsgesetze in anschaulichen, aber ebenfalls speziell methodischen Uebungen entwickelt und im Geiste des Schülers befestigt werden.

Indem aber beim Rechnen der Bildungsgang sich nach Operationen entwickelt, die in immer weiter werdenden Kreisen mit den mannigfaltigen Zahlen und Zahlformen sich fortbewegen, so erscheint es dort angemessen, die eingekleideten Aufgaben von den uneingekleideten in der Sammlung (jedoch mit bestimmter Hinweisung auf die passende Vereinigung beim Unterrichte) zu sondern, hauptsächlich um dem Schüler die Einheit der Zahlentwicklung durch die so mannigfaltigen Formen hindurch möglichst deutlich und übersichtlich vor die Augen zu stellen.

In der Geometrie gliedern sich die Operationen des Konstruirens und Messens mehr nach fortlaufenden Stoffgruppen, die sich schneller abschließen als die Operationsgruppen beim Rechnen, welche sich nicht nach stofflichen Beziehungen ordentlich gliedern lassen. Dagegen bilden z. B. die Uebungen im Zeichnen und Messen der geraden Linie, des Winkels, der Arten der geradlinigt begränzten Figuren ꝛc. stoffliche Gruppen, die sich so ziemlich genügend in einem Gange abschließen lassen, während beim Rechnen z. B. die Operationsgruppe der Additionsaufgaben sich in immer neuen Umwandlungen durch den ganzen Rechnungsunterricht hinauf windet.

Bei der Geometrie scheint es aus diesen Gründen angemessen, jeder stofflichen Gruppe zugleich die angewandten Aufgaben beizuordnen, die dahin gehören. Ueberdieß kann hier, da der Unterrichtsstoff konkreter ist als beim Rechnen, das Ineinanderfließen der rein geometrischen und angewandten Aufgaben beim Zeichnen wie beim Messen nicht umgangen werden, und man würde offenbar der Sache Zwang anthun, wollte man auch nur in der Darstellungsweise die genannten Aufgaben von einander trennen.

Ueber die Aufgaben der zweiten Art muß ferner bemerkt werden, daß sie in der Sammlung zahlreicher und mannigfaltiger vertreten sein müssen, als diejenigen der ersten Art; zahlreicher weil die Anwendung des geometrischen Gesetzes in viel mehr verschiedenen Fällen auftritt, als die Ableitung desselben und diese auch schon genügt, wenn sie nur in einer Weise geistig fest erfaßt ist; mannigfaltiger, weil das

Leben in tausend Abwechslungen seine Anforderungen an den Schüler stellt.

Aus wie mancherlei Gebieten der Stoff der angewandten Aufgaben gewählt werden müsse, haben wir schon an einem frühern Orte hervorgehoben. Es ist armselig und traurig zugleich, in den Aufgaben eines Volksschullehrmittels nur ein Gebiet des Lebens oder nur einen Stand oder nur eine Berufsart berücksichtigt zu sehen.*

Hiebei ist darauf zu achten, daß die „praktischen Aufgaben" wirklich auch diesen Namen verdienen. Man findet noch zu häufig in den Aufgabensammlungen sogenannte „praktische Aufgaben", die nichts weniger als praktisch sind, weil sie im praktischen Leben gar nicht vorkommen und deren Lösung bloßer Zeitverlust ist. Eine Aufgabe ist deßwegen noch nicht praktisch, daß sie sich auf irgend ein praktisches Gebiet bezieht oder daß bei ihrer Stellung einzelne praktische Termen gebraucht werden; sie kann deßwegen doch auf eine bloße Tändelei hinauslaufen. Die wahrhaft praktische Aufgabe zielt stets auf die wirkliche Erleichterung einer praktischen Verrichtung. Nun soll man den Schüler nicht lehren wollen, was sogar jeder Ungeschulte im Leben von selbst kann; man lehre ihn das, was ein Ungeschulter aus sich nicht kann und helle ihm dadurch jene Irrthümer auf, die fast Allen ankleben, welche keine ordentlichen geometrischen Kenntnisse haben.

Wenn wir hier aber von der Ansicht ausgehen, daß die Mathematik der Volksschule, namentlich in ihrer angewandten Richtung, für den Schüler ein Hauptunterstützungsmittel bilden müsse zur leichtern und bessern Erwerbung der wichtigern Kenntnisse aus der Naturkunde, der Landwirthschaft, der Handwerke, der Künste und Gewerbe, des Handels und öffentlichen Verkehrs überhaupt, und daß eine mathematische Aufgabensammlung

---

* Wir haben letzthin ein Rechnungsbuch zu Gesichte bekommen, das sich als besonders praktisch für die Schule und das Leben ankündigt. Der Stoff ist fast ausschließlich aus der Landwirthschaft gewählt und dabei merkwürdigerweise die Düngerlehre hauptsächlich berücksichtigt. Es scheint, der Verfasser habe bei sich keinen andern Wahlspruch aufkommen lassen als den alt bewährten: M... geht über List. Nur ein verhältnißmäßig kleiner Theil der Aufgaben wirkt bloß auf den Zahlen- und — das beliebte Thema verleugnend — nicht zugleich auch auf den Geruchssinn ein. — Und dergleichen einseitiges und zum Theil abgeschmacktes Zeug konnte noch von einem hohen Schulmanne als für die Volksschule passend warm empfohlen werden!

der Volksschule in angemessenen Verhältnissen passende Aufgaben aus allen diesen Gebieten enthalten müsse, so wird wohl kaum nöthig sein, hervorzuheben, daß wir dadurch die übrigen Unterrichtsfächer nicht benachtheiligen und auch aus der Volksschule keine bloße Berufsschule machen wollen, im Gegentheil wird sie dadurch nur eine um so würdigere allgemeine Bildungsanstalt für das gesammte Volk werden können.

Ueber den Gebrauch der geometrischen Aufgabensammlung ist zunächst zu bemerken, daß, wenn auch dieselbe besonders als ein Mittel zur stillen Klassenbeschäftigung ꝛc., wie jede andere Aufgabensammlung, zu benützen ist, es natürlich stets ein großer Fehler wäre, wenn dieselbe so angewendet werden wollte, daß dadurch der lebendige Unterricht von Seite des Lehrers erspart würde.

Wir führen dieß ausdrücklich an, weil dieser Fehler doch hie und da gemacht wird, wenigstens in der Weise, daß etwa eine Schulklasse Abtheilungen aus der Aufgabensammlung lösen soll, ohne daß der nothwendige anregende, entwickelnde und erläuternde Unterricht durch den Lehrer voraus ertheilt worden ist. *

Diesen Unterricht hat der gewandte Lehrer ganz frei nach seiner Individualität zu gestalten, jedoch natürlich in der Weise, daß die Schüler den bevorstehenden Stoff geistig bemeistern, und die hierauf sich beziehenden Aufgaben zu lösen vermögen. Wir verweisen hiebei auf die in der nachfolgenden speziellen Anleitung ertheilten methodischen Rathschläge.

---

* Es wird dieser Fehler auch etwa beim Rechnungsunterrichte begangen. Man kann nicht die Aufgabensammlung den Schülern in die Hand geben und darauf ohne Weiteres verlangen: Jetzt löset die Aufgaben auf der und der Seite! Nicht bloß müssen die Aufgaben zur Operations- und Zahlentwicklung durch den lebendigen Unterricht unter Hinweisung auf die nöthigen Veranschaulichungsmittel (wie bei den Ganzen, so besonders auch bei den Brüchen!) gehörig vorbereitet werden, sondern auch jeder Hauptabtheilung der angewandten Aufgaben muß ein erklärender Unterricht vorausgehen, der in die praktischen Verhältnisse einführt, auf die sich im Allgemeinen die Aufgaben beziehen. So ähnlich bei der geometrischen Aufgabensammlung: die Schüler werden nichts Rechtes herausbringen, wenn der Lehrer zuvor noch nichts in ihren Köpfen geweckt hat! — Man kann freilich auch in den entgegengesetzten Fehler verfallen, wenn man zu ängstlich und zu gründlich verfahren und sich mit der kindlichen, in der einen oder andern Beziehung natürlich noch etwas unvollkommenen Auffassung namentlich im Anfange nicht begnügen will.

Ein im Schulleben noch wenig erfahrner junger Lehrer thut aber für den Anfang immer gut, wenn er sich in seinem Unterrichte möglichst nahe an den methodischen Gang des Lehrmittels anschließt. Er macht gründlichere methodische Erfahrungen, wenn er den vielfach durchdachten Plan eines Lehrmittels in seinem Unterrichte verfolgt, als wenn er glaubt, von Anfang an aufs Gerathewohl methodische Experimente machen zu müssen; dieß hätte, auch wenn es die Schulbehörden stillschweigend angehen ließen, immer bedeutende Nachtheile für die Schule zur Folge. Mit der Zeit findet er dann leichter und sicherer heraus, welche eigenthümliche Behandlung des Lehrgegenstandes er sich je nach den Verhältnissen erlauben darf.

Außer dem Gebrauche der Aufgabensammlung zur stillen Beschäftigung der Schülerklassen wird auch die Benutzung derselben zur Aufgabenstellung nach Hause von Wichtigkeit sein; daß auch hier der nöthige Unterricht vorauszugehen hat, versteht sich wohl von selbst. — Von besonderer Wichtigkeit wird eine zweckmäßige geometrische Aufgabensammlung auf der Stufe der Ergänzungsschule auch zur Beschäftigung der Schüler in praktischen Aufgaben bei Hause sein, da die wöchentliche Schulzeit hier bedeutend kürzer ist, und eine angemessene Thätigkeit des Schülers in freien Stunden bei Hause sehr fruchtbar sein kann.

Wir werden hierauf noch bei einem besondern Anlaße zurückkommen.

Was die Ausdehnung der geometrischen Aufgabensammlung anbelangt, so wird dieselbe in Uebereinstimmung mit den frühern Erörterungen nur auf die Klassen der Realschule und der Realergänzungsschule zu beziehen sein. Auch muß diese Aufgabensammlung in Hinsicht auf den Stoff eine verhältnißmäßig geringere Ausdehnung haben, als die Rechnungsaufgabensammlung, was wohl keiner weitern Erörterung bedarf.

§ 8.

Veranschaulichungsmittel und Werkzeuge für den geometrischen Unterricht in der Volksschule.

A. Veranschaulichungsmittel.

Die Nothwendigkeit der Veranschaulichungsmittel für den geometrischen Unterricht in der Volksschule ergibt sich aus jeder methodischen Untersuchung, die sowohl das Wesen des Unterrichtsfaches als die Bedeutung der Volksschule richtig ins Auge faßt. Wir werden uns hierauf nicht

weiter einlassen, da diese Nothwendigkeit aus allem Früheren zur Genüge hervorgeht.

Eine Anzahl Veranschaulichungsmittel für den geometrischen Unterricht wird der Lehrer sich leicht jederzeit selbst verschaffen können, die Anschaffung anderer und gerade der wichtigern darf ihm aber nicht zugemuthet werden. Es ist Sache der Schulbehörden, die Anschaffung der letztern zu bestreiten.

Zunächst erscheinen da zur anschaulichen Auffassung der Raumelemente eine Anzahl am besten aus gutem Holz gearbeiteter Körper mit ebener und krummer Begränzung nothwendig. Ein paar Stücke dürften auch zweckmäßig nach ebenen und krummen Durchschnitten zerlegbar sein. Die nothwendigen Modelle dieser Art wären etwa folgende:

1. die gewöhnlichen prismatischen Körper;
2. die gewöhnlichen pyramidalen Körper;
3. ein paar zylindrische Körper;
4. die Kugel;
5. ein paar Zusammensetzungen und polyedrische Körper.

In welcher Weise dieselben zur Entwicklung der Begriffe der Raumelemente benutzt werden dürften, haben die nachfolgenden speziellen Vorschläge und Beispiele zu zeigen. Ueberdieß werden diese Formen häufig bei den geometrischen Operationen mit Linien, Winkeln, Flächen und Körpern, sei es in Hinsicht auf Zeichnung oder Messung benutzt werden.

Beim Unterrichte kann der Lehrer zudem etwa durch steifes Papier gewisse Flächen, die irgend eine bestimmte Form oder Lage haben sollen, zur Anschauung bringen, wie z. B. geradlinigte und krummlinigte Figuren, wagrechte (horizontale), lothrechte (vertikale) Flächen ꝛc., sowie er auch aus solchem Papier die Netze der gewöhnlichen geometrischen Körper herausschneiden und diese hiedurch auf mehr genetischem Wege den Schülern vorführen kann. Außerdem stehen dem Lehrer für die Entwicklungen der Winkel, Dreiecke, Vierecke u. s. f. leicht gerade dünne Stäbchen ꝛc. zu Gebote, die er nach Bedürfniß durch Stifte mit einander in Verbindung bringen kann.

Ein Hauptveranschaulichungsmittel zum Gebrauche beim mathematischen Unterrichte überhaupt, sowie insbesondere zur Darstellung der sämmtlichen Maße und ihres Zusammenhangs ist dem Lehrer in einem künstlichen, aus Platten, Stäben und Würfeln zusammengesetzten Kubus zu bieten, dessen Kante die Grundeinheit des Längenmaßes (bei uns den Fuß = 0,3 Meter) darstellt.

Der ganze Kubus wird am zweckmäßigsten in einem passenden Kistchen aufbewahrt, dessen hohler Raum, genau einen Kubikfuß haltend, zur Darstellung der Hohlmaße und zur Vergleichung derselben mit dem Kubikmaße, so wie zur Ableitung der Gewichtseinheiten benutzt werden kann. Zu diesem Ende ist zunächst ein rechtwinklig säulenförmiges, aus möglichst dünnen Wänden zusammengesetztes Gefäß nothwendig, dessen hohler Raum $^1/_3$ Fuß breit, $^1/_2$ Fuß lang und $^1/_3$ Fuß hoch, also gleich $^1/_{18}$ Kubikfuß ist. Dieser Raum stellt in unserm schweizerischen Maßsystem die Einheit der Hohlmaße (d. i. eine Maß für Flüssigkeiten, ein Immi oder Mäßlein für feste Körper Früchte ꝛc.) dar.

Wird hiezu noch ein ähnliches säulenförmiges Gefäßchen von $^1/_3$ Fuß langem, $^1/_3$ Fuß breitem und $^1/_6$ Fuß tiefem Hohlraume hinzugefügt, so kann das Gewicht dieses Hohlraumes reinen Wassers unsere Gewichtseinheit „Pfund" ($= ^1/_2$ Kilogramm) veranschaulichen.

Es versteht sich, daß hier die Anschauung der wirklichen Maßgröße nicht das Einzige ist, das durch die angeführten Hülfsmittel erzielt werden soll, denn die Einsicht in das Gesetz, nach welchem die eine Maßeinheit von der andern abhängig ist, oder durch dieselbe gebildet werden kann, ist ebenso wichtig.

B. Werkzeuge.

Daß die Werkzeuge für den geometrischen Unterricht in der Volksschule vor Allem aus einfach sein müssen, bedarf keiner weiteren Begründung; daß aber solche vorhanden sein und gebraucht werden müssen, ist unerläßlich, wenn dieser Unterricht nicht wieder zu dem herabsinken soll, was er auch schon gewesen ist, und eben darum in der Volksschule keine rechten Wurzeln geschlagen hat, nämlich: zu einem bloßen Wortspiel ohne wirkliche praktische Unterlage.

Es ist aber nothwendig, daß in der Schule nicht bloß die entsprechenden Werkzeuge für den lebendigen Unterricht, sondern auch solche für den einzelnen Schüler zu seiner eigenen Thätigkeit vorhanden seien, da ohne diese der Unterricht nicht gedeihen kann.

Die allgemeinen Werkzeuge mögen folgende sein:

1. Ein größeres Lineal mit Eintheilung in Fuß, Zoll und Linie;
2. ein größerer Zirkel mit Kreideeinsatz;
3. ein Transporteur oder Winkelmesser, der zugleich als Setzwage und Equerre dienen kann;

4. eine Meßlatte mit der nöthigen Eintheilung; für die Schüler der dritten Schulstufe (Ergänzungsschule) noch besser eine Meßkette;
5. eine Kreuzscheibe (Meßkreuz oder Winkelkreuz).

Ueber den Gebrauch dieser Werkzeuge geeigneten Ortes später.

Das Hauptwerkzeug, das der Schüler außer denjenigen, die er ohnedieß schon für den Schulunterricht nöthig hat, zur geometrischen Aufgabensammlung bedarf, ist ein Zirkel mit Bleistift- und Reißfedereinsatz. Einen kleinen Transporteur können die vorgerücktern Schüler sich selbst verfertigen; für die übrigen sind kleine Winkelmesser auf gesteiftem Papier sehr wohlfeil zu erhalten, ebenso einfache hölzerne Equerren zum Zeichnen. Mit Zirkel und Lineal soll indessen der Schüler allmälig seine einfachern Hülfsmittel zur geometrischen Thätigkeit selbst anfertigen lernen, das gewährt mancherlei Vortheil, der sehr in Anschlag zu bringen ist.

Endlich ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der gar nicht zum Unwichtigsten gehört. Die Messungen größern Umfangs sollten schon im Schulzimmer veranschaulicht werden können, damit sie dann in Wirklichkeit besser verstanden und überblickt würden. Hiezu ist aber ein ordentlich freier Raum im Schulzimmer unentbehrlich und der sollte in keinem Schulzimmer fehlen. Es wäre derselbe auch sehr oft noch wegen vieler anderer Uebungen nothwendig; aber an den meisten Orten ist hierauf leider kein Bedacht genommen.

Es dürfte ferner nicht unzweckmäßig sein, einige der Hauptveranschaulichungsmittel, z. B. den eingetheilten Kubikfuß, die Meßruthe (10′), (Elle, Klafter) 2c. in der Schule so aufzustellen, daß sie von den Schülern häufig gesehen werden; es prägen sich ihnen hiedurch die Maße, Fuß, Elle, Klafter, Ruthe, Quadratfuß, Kubikfuß 2c. mit solcher Sicherheit ihrem Vorstellungsvermögen ein, daß sie sich bei mancher Bestimmung schon auf ihren Blick verlassen können.

Der Pestalozzianer Joseph Schmid spricht sich sehr energisch für Herbeiziehung solcher Maß-Veranschaulichungsmittel aus. Er sagt z. B. gerade auch in Hinsicht auf den häuslichen Kreis, „daß dieselben unter die Kinder gebracht, wohl unendlich mehr hervorbringen würden als mancher geschriebene Kinderfreund."

§ 9.

Vergleichende Blicke auf die verschiedenartige methodische Behandlungsweise des geometrischen Unterrichts in Volksschulen.

Vor der Pestalozzischen Schulperiode wurde die Elementargeometrie in der Regel nur an höhern wissenschaftlichen Schulen gelehrt. Es war dieß mit wenigen Ausnahmen der Form und dem Inhalte nach die Geometrie der Alten, welche dieselbe als fertiges logisches System nicht für das Knabenalter, sondern für dasjenige des reifern Verstandes bestimmten und von der uns einer ihrer ersten Pfleger und Beförderer Plato rühmend sagt: daß sie (wie die Mathematik überhaupt) das Auge des Geistes vom barbarischen Schlamme frei mache und zum Anschauen des Wesens der Dinge führe.

Diese Elementargeometrie, die wir vornämlich den alten Griechen verdanken (wenige Beiträge arabischen oder indischen Ursprungs abgerechnet) ist in den Büchern Euklid's, eines der hervorragendsten Männer der Alexandrinischen Schule, methodisch am besten ausgearbeitet, wenn auch nicht ganz vollständig durchgeführt. Deßwegen blieben die Euklid'schen Bücher der Geometrie bis in die neueste Zeit an vielen der oben bezeichneten Schulen, namentlich in England und Italien, wo man dem Strome der neuern Geometrie am längsten widerstand, die ersten und wesentlichsten geometrischen Lehrmittel.

Durch Pestalozzi wurde die Aufnahme des geometrischen Unterrichts in den Kreis allgemeiner Volksschulen bewirkt. Er selbst stellte in seinem ABC der Anschauung (Bern 1801) die ersten Elemente der Geometrie als allgemeines Bildungsmittel für Elementarschulen auf. Nach Pestalozzi soll der Schüler die geometrischen Wahrheiten an der Hand des Lehrers selbstständig auffinden. Ihm folgten zunächst seine Schüler Joseph Schmid und Ramsauer, die das vielseitig Bildende der Form-, Raum- und Größenlehre als Anschauungsunterricht in weitläufigen, speziell methodischen Bearbeitungen darstellten.

An die Pestalozzianer, welche die Richtungen der sogenannten Formen- und Größenlehre aufgestellt hatten, schloß sich die Zahl derer, die, an der Durchführung des weit ausgedehnten Bildungsganges der gesammten Form- und Größenlehre verzweifelnd, sich einseitig auf das Gebiet der Formenlehre warfen und dieselbe für die Volksschule erschöpfend zu bearbeiten suchten. Diese Fraktion, die sich bis in die Dreißigerjahre kund gab, mußte sich nothwendig im tändelnden Spielwerk verlieren —

(man schrieb sogar geradlinigte, krummlinigte und gemischtlinigte Formenlehren) — und gegenwärtig ist sie fast gänzlich verschollen.

Allein die Pestalozzische Anregung, den geometrischen Unterricht als ein durchaus nothwendiges Mittel zur allgemeinen Bildung der psychologischen Entwicklung gemäß methodisch zu gestalten, blieb nicht ohne Erfolg, obwohl der Lehrgegenstand selbst da, wo er eingeführt war, oft wieder fallen gelassen wurde. Die Bestrebungen zur festern methodischen Gestaltung und zur wirklichen Einbürgerung dieses Unterrichts in der Volksschule dauerten bis in die neueste Zeit fort. Zunächst zeigte sich das Bestreben, die Euklid'sche Geometrie mehr mit der Pestalozzischen Lehrweise in Vereinigung zu bringen, d. h. jene in die Klassen jüngerer Schüler herabzuziehen und sie mehr nach *entwickelnder Weise* umzuformen.

Darauf machte sich eine fernere Richtung geltend, nämlich diejenige der sogenannten *praktischen* Pädagogen, die ausschließlich das aufgriffen, was die Pestalozzische Schule zu wenig in den Vordergrund stellte, und die also das Fach einzig um seiner *praktischen Nützlichkeit* willen in der Volksschule betrieben wissen wollen. Durch Vormachen, Nachmachen und vielfaches Einüben soll der Zweck: Kenntnisse und Fertigkeiten, erreicht werden. Eine eigentlich geistige Bildung und Kraftförderung will man hiebei nicht, wenigstens nicht zunächst, erzielen.

Eine weitere Richtung ist diejenige, welche den Pestalozzischen Grundsatz, daß der Schüler die geometrischen Wahrheiten an der Hand des Lehrers selbstständig aufzufinden habe, durch eine im Wesen des geometrischen Bildungsstoffs liegende und der geistigen Entwicklung des Schülers entsprechende Methode begründen will. Dieselbe benutzt die Fortschritte der neuern Geometrie und will, da die geometrischen Größen als kontinuirliche nur durch *Bewegung* entstanden gedacht werden können, dem Schüler die Eigenschaften geometrischer Gestalten und die gegenseitige Abhängigkeit von einander durch die *Entstehung* derselben, also auf dem Wege der lebendigen Anschauung des werdenden Gebildes, zur Klarheit und zum Bewußtsein bringen. Dadurch will sie die je länger je mehr nothwendig werdende *praktische Tüchtigkeit* der Schüler auf ein festes Fundament stellen und hiebei dem ganzen Stoffe dasjenige Maß und diejenige Vertheilung auf die Alters- und Schulstufen geben, die eine wirkliche Durchführung desselben unter Erreichung des formalen und realen Zweckes möglich macht.

Endlich ist noch die Richtung der sogenannten Kasualmethodiker zu bezeichnen, obwohl dieß eigentlich gar keine methodische Richtung ist, da dieselben dem Lehrer anrathen, nach Gelegenheit und Gutdünken bald die, bald jene Methode zu verfolgen, wenn der Unterricht nur das Rechte leiste und den Hauptbedingungen, die man an einen zweck- und sachgemäßen Unterricht stelle, entspreche. Offenbar machen sich's diese nicht gar schwer, um der Volksschule das Geschenk eines zweckmäßigen geometrischen Unterrichts zu verschaffen.

Wir wollen nun vergleichsweise etwas näher in die einzelnen angedeuteten methodischen Richtungen des in Rede stehenden Schulfaches eintreten:

Es ist begreiflich, daß man seiner Zeit den Versuch machte, ob vielleicht die Euklid'sche Lehrart der Geometrie auch für Schüler jüngern Alters passen möchte, man hatte dazumal eben nichts, was für diesen pädagogischen Zweck speziell bearbeitet war. Der Erfolg konnte natürlich den Wünschen nicht entsprechen. Die Euklid'sche Methode ist für die Volksschule nie anwendbar und zwar insbesondere aus folgenden Gründen:

1. Diese Methode ist nicht eine schaffende und entwickelnde und läßt deßhalb den Anfänger in Vielem unbefriedigt, weil sie ihm nicht den Entstehungsgrund der Sache aufdeckt, sondern bloß die Richtigkeit derselben beweist.
2. Sie paßt nicht für die hier zu berücksichtigende Altersstufe; denn entweder sieht das Kind die Wahrheit eines Satzes zum Voraus schon ein, oder nicht, und dann kann es im erstern Falle nicht begreifen, warum der Lehrer sich so viel Mühe gibt, ihm etwas zu beweisen, was es von selbst einsieht; im zweiten Falle aber wird es durch den Beweis so wenig von der Wahrheit des Satzes überzeugt, als wir durch die feinen Handgriffe eines Taschenspielers von dem natürlichen Hergange seiner Kunststücke.
3. Sie ist nicht genug praktisch, da sie sich zu wenig an die materielle Grundlage der Geometrie anlehnt. Deßwegen muß an höhern Schulen, wo man die Euklid'sche Geometrie lehrt und doch auch das Praktische nicht unberücksichtigt lassen will, stets neben dieser noch eine besondere praktische Geometrie gelehrt werden. In der Volksschule kann man aber nicht zwei Geometrieen lehren; hier sollte man durch eine das Nothwendige erreichen. Praktisch ist sie

dann auch deßwegen nicht, weil sie die Selbstthätigkeit der Schüler zu wenig anspornt.

Die Euklid'sche Methode ist offenbar nur für den höhern wissenschaftlichen Kreis bestimmt und hat hier ihre volle Berechtigung. Trotz ihres 2000jährigen Alters ist sie nicht veraltet und wird in diesem Kreise noch lange nicht veralten; denn um ein lückenloses unumstößliches System mathematischer Wahrheiten im Abschlusse und in der Abrundung darzustellen, wobei es sich nicht mehr darum handelt zu zeigen, auf welchem Wege die einzelnen Wahrheiten aufgefunden worden sind, wird sie noch lange als Muster dienen können. Es kommt indessen auch in der reinen wissenschaftlichen Mathematik theils auf die Eigenthümlichkeit des Stoffes, theils auf den Zweck der Darstellung an, welche spezielle Methode hiefür am zweckmäßigsten zu befolgen ist.

Das ganze Wesen der genannten Methode spricht für die Unmöglichkeit irgend welcher Verbindung dieser Methode mit einer auf Pestalozzischen Grundsätzen beruhenden entwickelnden Lehrweise; deßwegen mußte der oben genannten Richtung schon zum Voraus ein ungünstiges Resultat warten. Und man kann wohl dieselbe auch für die Zukunft als abgethan betrachten.

Was nun die Pestalozzische Methode des geometrischen Unterrichts insbesondere anbelangt, so sind ihre allgemein pädagogischen Grundsätze der Art, daß sie von keiner folgenden Methode, wenn sie auf irgend welche Berücksichtigung in der Volksschule Anspruch machen will, unbeachtet bleiben dürfen; so die Grundsätze: daß der Unterricht im Allgemeinen sich an den Entwicklungsgang des Kindes genau anzuschließen habe, daß dessen Lernen Selbstthätigkeit, freies Erzeugen aus sich selbst, lebendige Schöpfung sei, daß in Folge dessen der Schüler die geometrischen Wahrheiten an der Hand des Lehrers, vom Leichtern zum Schwerern fortschreitend, selbstständig auffinden müsse ꝛc.

Besonders ein Prinzip Pestalozzis wurde aber durch seine Schule so zu sagen auf die Spitze getrieben, nämlich das Prinzip: daß in Allem die Entfaltung der Anlagen des Schülers das Erste, die **Krafterzeugung** die Hauptsache und die eigentliche Erwerbung von Kenntnissen und Fertigkeiten diesem Zwecke als Mittel untergeordnet sein müsse. Die Pestalozzianischen Bearbeitungen der Geometrie trieben sich in so weit ausgedehnten lückenlos fortschreitenden formalistischen Uebungen herum, die Anstrengungen, den Schüler durch die ausführlichsten Betrach-

tungen über die Verhältnisse der Form und Größe richtig und scharf denken und schließen zu lehren, waren so enorm, daß der Erfolg selbst an geistiger Bildung der verwendeten Lehrkraft nicht proportional war und nicht sein konnte.

Dabei mußte überdieß die wirkliche Hinlenkung auf die praktischen Verhältnisse des Lebens zu sehr Noth leiden, die Rücksicht auf praktische Tüchtigkeit trat überhaupt sehr bedeutend in den Hintergrund; denn wenn dieselbe wohl auch hauptsächlich von der Kraft (in geistiger und leiblicher Hinsicht) abhängt, so ist dagegen die Verbindung des Wissens und Könnens mit eigentlich praktischen Kenntnissen eine absolute Nothwendigkeit, die je länger je mehr hervortritt, je mehr auch das Volksleben selbst an umfassender Thätigkeit und Bedeutung gewinnt, so daß schon in der Gegenwart eine Bildung, die nicht in den realen Verhältnissen des Lebens wurzelt, manchen mit viel geistiger Kraft Ausgerüsteten dennoch oft im Stiche läßt.

Ramsauer sagt zwar in seiner Bearbeitung der geometrischen Formen- und Größenlehre (1828) sehr gut, daß in den Schulen keine Professionen gelehrt werden können, daß dagegen der Schüler so herangebildet werden soll, daß er später, er mag einen Beruf ergreifen, welchen er wolle, zuvörderst, mit gutem Willen und guten Absichten, dann aber auch mit der Gewohnheit, ich möchte sagen mit dem Bedürfniß arbeite, über Alles, was er ergreift, zu denken und sich in Allem, was er thut, vermöge seines Denkens, so wie vermöge seiner gebildeten Hand, seines gebildeten Auges und seines gebildeten oder wenigstens geweckten Geschmackes immer mehr zu vervollkommnen suche.

Allein auch er, wie Joseph Schmid, verliert sich zu sehr in der formalen Vielseitigkeit und er verkennt oft mit Unrecht praktische oder wie er es nennt, mechanische Uebungen in der Meinung, daß viele Schüler nicht um ihres zukünftigen Berufes willen, sondern bloß zur Bildung ihres Geistes überhaupt in der Geometrie unterrichtet werden sollen.

Die spätern Bearbeitungen der Geometrie im Sinne der Pestalozzianer tragen den gleichen Fehler, sowohl diejenigen, welche bloß die geometrische Anschauungslehre bieten, — ein Unterricht, wobei der Schüler ihm vorgelegte geometrische Gebilde ohneweiters anzuschauen, wohl auch etwa nachzuzeichnen hat — als diejenigen, welche die kombinatorische Formenlehre getrennt und möglichst erschöpfend durchführen, sowie endlich auch diejenigen, welche die Formen- und Größenlehre mit einander vollständig

behandeln. Bei Allen mangelt zudem als Haupterforderniß eine aus dem Bildungsstoffe selbst fließende, natürlich sich entwickelnde Methode, die zugleich auf die stets unumstößlichen pädagogischen Hauptgrundsätze Pestalozzis gegründet wäre.

Einen Fortschritt in der methodischen Bearbeitung des Faches suchten vornämlich in den Dreißiger- und zum Theil auch bis in die Vierzigerjahre besonders Türk, Harnisch, Tillich, Diesterweg, Pöhlmann, Tobler, Göldi, Unger u. A. zu erzielen; allein es dürfte kaum behauptet werden, daß in deren Werken sowohl in Beziehung auf die Methode als auch auf den Unterrichtsstoff und auf das Stoffmaß das Rechte und für die Volksschule Passende getroffen worden sei. Zwar muß man anerkennen, daß die meisten dieser Bearbeiter des Faches die reale oder praktische Seite desselben etwas mehr hervorhoben, als es früher geschah.

So hat z. B. Göldi in seiner „reinen und angewandten Raumlehre (1837)" unter dem weit ausgesponnenen reinen Bildungsstoffe doch manche vortreffliche praktische Uebung, die in der rechten Weise behandelt fürs Leben nicht ohne mannigfachen Nutzen sein kann. Und er scheint auch darin vollständig Recht zu haben, wenn er sagt: „Wie es sich jetzt noch mit der Geometrie verhält, gerade so verhielt es sich mit dem Rechnen, ehe dasselbe in die Volksschule eingeführt war. Jeder, der keinen Unterricht in diesem Fache erhalten hatte, berechnete, was er sich zur Berechnung vorlegte, oder ihm vorgelegt wurde, auf eine ihm eigenthümliche Weise, d. h. wie sie ihm Verstand und Ueberlegung im Moment eingaben, wobei er sich dann aber auch nicht selten verrechnete. Jetzt ist sogar jeder gemeine Mann, sei er Taglöhner, Bauer oder Handwerker, überzeugt, daß das Rechnen wegen des praktischen Nutzens, den es im Leben gewährt, ein unentbehrliches Lehrfach sei. Sollte es mit der Geometrie nicht auch dahin kommen können? Wir glauben zuversichtlich, daß mit der Zeit dieses Fach ebenfalls diejenige Berücksichtigung und Anerkennung, die es seiner Wichtigkeit nach verdient, erhalten und somit denselben Rang mit dem Rechnen in den Volksschulen einnehmen werde." Allerdings nimmt Mancher bisweilen einzelne geometrische Verrichtungen vor, ohne daß er nur weiß, daß es solche sind; die Natur thut es, eben weil die Anlage zu diesem Fach im Menschen ist. Bringt nun die Schule zum Bewußtsein und zur sichern, einsichtsvollen Thätigkeit und Fertigkeit, wozu schon die Natur den Menschen hinleitet, so werden geometrische Verrichtungen,

wie diejenigen des Rechnens, auch in der niedern Sphäre des Berufslebens ihre feste Aufnahme finden und hier in unendlicher Mannigfaltigkeit Nutzen und Vortheil stiften.

Göldi hebt aber nur mit großer Behutsamkeit diese praktische Richtung hervor, denn er nimmt noch wie manche Andere seiner Zeit die Volksschule im Sinne einer bloßen Elementarschule und zwar ungefähr vom 6. bis zum 12. oder höchstens 13. Altersjahre dauernd, wobei die meisten Schüler darüber hinaus keine weitere Schule mehr zu besuchen haben.

Mehrere andere der genannten Methodiker stützen sich ebenfalls auf eine Auffassung der Volksschule, wie sie heutzutage wenigstens in den vorgerückteren Schweizerkantonen nicht mehr gehegt wird. Dabei ist kaum zu begreifen, wie sie die Verhältnisse und Kräfte der Volksschule, in welcher Bedeutung sie sich dieselbe auch denken, so sehr überschätzen können, daß sie dieselbe mit einer solchen Masse von Uebungsstoff — und leider oft sehr leerem — überhäufen, als ob in der Volksschule nichts als Geometrie und Rechnen getrieben werden sollte. — Mit Beziehung auf eine sichere stoffeinige Methode des Fachs, als Unterrichtsgegenstand in der Volksschule, sind alle um keinen merklichen Schritt weiter gekommen, als die eigentlichen Pestalozzianer schon waren.

Wir haben in Göldi einen Repräsentanten für diejenige methodische Richtung gewählt, die am Faden der Pestalozzianischen Auffassung des geometrischen Unterrichts fortarbeitete. Werfen wir nun noch einige Blicke auf eine von der vorigen ziemlich verschiedene methodische Richtung dieser Periode. Wir wählen hier einen deutschen Methodiker, nämlich Dr. E. S. Unger, der die eben angekündigte Richtung am ausgeprägtesten vertritt. Es ist dieß diejenige, welche ebenfalls die allgemein pädagogischen Grundsätze Pestalozzis besonders in Hinsicht auf die freie Selbstthätigkeit des Schülers ꝛc. adoptirt, dagegen als Ziel des geometrischen Volksschulunterrichts mehr eine systematische Auffassung des Gegenstandes im Geiste der Euklid'schen Geometrie anstrebt.

Unger hebt in seinem Werke: „Der erste Unterricht für die Geometrie, ein Leitfaden ꝛc. für die Lehrer der Volksschule (1844)" hervor, daß der erste geometrische Unterricht in der Volksschule aus zwei Kursen bestehen müsse, von welchen der erste das Wesen der geometrischen Aufgabe, und der zweite das Wesen des geometrischen Lehrsatzes zu seinem Gegenstande hat.

In seiner „Uebersicht" spricht er sich über die beiden Kurse folgendermaßen aus: „Durch den ersten Unterricht in der Geometrie sollen die Anfänger befähigt werden, einen geometrischen Satz richtig aufzufassen. — Zunächst wird der Anfänger durch die geometrischen Aufgaben an die Beschäftigung mit Raumgrößen überhaupt gewöhnt und dadurch, daß die Auflösungen derselben nicht gegeben werden, sondern gefunden werden müssen, wird seine Thätigkeit in einer Weise in Anspruch genommen, die nothwendig zum Nachdenken führt. Die Grundeigenschaften der einfachsten Raumgrößen ergeben sich als unmittelbare Folgen dieser Thätigkeit, und sie werden eben deßwegen nicht bloß in dem Gedächtniß aufgenommen, sondern es wird ihre Richtigkeit auf eine vernünftige Weise erkannt.

Die Aufgaben, welche den ersten Kursus bilden, sind aus dem Gebiete der Elementargeometrie genommen, so daß durch sie auch alsdann, wenn der ganze geometrische Unterricht auf diesen ersten Kursus beschränkt bleibt, dem Schüler ein Material zugeführt wird, das er später unmittelbar anzuwenden vermag.

Der zweite Kursus hat den Zweck, den Anfänger zu der Erkenntniß dessen zu führen, was erforderlich ist, um die Wahrheit eines Satzes mit Zuversicht behaupten zu können. Aus diesem Grunde werden hier die Lehrsätze mit einer solchen Ausführlichkeit behandelt, daß über alle Einzelnheiten derselben und über jede einzelne, in den Beweisen vorkommende Folgerung eine vollständige Nachweisung gegeben wird.

Diese Behandlung des Lehrsatzes ist der eigentliche Zweck des Unterrichts; wie weit das durch die Geometrie dargebotene Material hiebei zu benutzen ist, hängt von der Zeit ab, die diesem Lehrgegenstande überhaupt gewidmet werden kann.

Wer die Geometrie, so weit sie in den beiden Kursen behandelt wird, richtig aufgefaßt hat, ist hinlänglich vorbereitet, um mit dem vollständigen System der Elementargeometrie sich beschäftigen zu können; er vermag nicht nur die einzelnen Sätze derselben mit Leichtigkeit richtig aufzufassen und ihren systematischen Zusammenhang zu begreifen, sondern er ist so weit vorgeschritten, daß ihm zugemuthet werden kann, selbstständig geometrische Probleme zu lösen und die Beweise gegebener Lehrsätze aufzufinden. Selbst ohne Beihülfe eines Lehrers wird es ihm möglich sein, das von mir unter dem Titel: Die Geometrie des Euklid und das Rechnen derselben herausgegebene Werk zu verstehen, und die verschie-

denen, in demselben vorkommenden Uebungen durchzunehmen und hiedurch seine geometrische Ausbildung zu vollenden."

Es muß bemerkt werden, daß Unger seine Geometrie nicht für die Schüler der untern, sondern erst für die Schüler der obern Klassen einer Volksschule bestimmt. Wenn nun auch gerne anerkannt werden muß, daß diese Arbeit eine höchst verdankenswerthe Erscheinung in der mathematischen Volksschulliteratur bildet, und daß wirklich durch den ersten oder den Aufgaben-Kurs der Unger'schen Geometrie die Selbstthätigkeit des Schülers in hohem Grade in Anspruch genommen wird, so fällt es doch sehr bald auf, daß in dieser Behandlungsweise nicht die wahre methodische Auffassung dieses Unterrichts, wie er der ganzen Volksschule entsprechen soll, liegen kann.

Das Ganze ist zu sehr des gewöhnlichen wissenschaftlichen Systems wegen da, das doch unmöglich Zweck des geometrischen Unterrichts in der Volksschule sein kann. Für solche Schüler, die noch weitern mathemathischen Unterricht auf wirklich wissenschaftlicher Basis erhalten, mag diese Vorschule entsprechender sein, und doch auch da wünschten wir noch eine allgemeinere oder vielseitigere elementare Grundlage. Diese reine Systemgeometrie läßt oft, trotz ihres geläuterten Inhalts, den Knaben recht arm, weil sie ihn zu wenig ins wirkliche Leben versetzt, wo er in tausend Verrichtungen die einzelnen Wahrheiten wieder finden, erproben, anwenden und zur Auffindung von neuen Resultaten verbinden soll. Und dieses Letztere möchten wir von der Geometrie der Volksschule doch verlangen.

Ueberhaupt ist es eine Unmöglichkeit, den ersten geometrischen Unterricht in der Volksschule durch die Behandlung des Wesens der geometrischen Aufgabe mit Erfolg zu beginnen. Der erste geometrische Unterricht muß doch unzweifelhaft die lebensvolle Erzeugung des geometrischen Stoffes zum Zwecke haben, wie der erste Rechnungsunterricht die Erzeugung lebensfrischer Zahlvorstellungen, und erst darauf ist jedesmal der Schüler behufs der Stoffverarbeitung zur geometrischen Aufgabe hinzuführen. Diese aber soll eine sehr vielseitige Bedeutung haben und durchaus nicht bloß diejenige, die ihr in ihrer Beziehung zum System angewiesen ist, denn diese allein zielt viel zu wenig nach der mannigfaltigen lebendigen Anwendung, die der Schüler nach allen Seiten seiner Lebenserfahrung verfolgen soll.

So ist eben die ganze Behandlung der geometrischen Aufgaben des

ersten Kurses von Ungers Geometrie ein fast ausschließlich theoretisches Gebäude, dessen hauptsächliche Bestimmung ist, in das System der Lehrsätze einzuführen. Der Schüler der Volksschule wird aber hiedurch nach der praktischen Richtung zu wenig angeregt und zu wenig gebildet.

Die beiden Richtungen dieser Periode haben bis jetzt keinen bleibenden Boden gewinnen können und werden wohl niemals solchen gewinnen; beide übersteigen in ihren Anforderungen die Kräfte der Volksschule, die erste durch die Masse des Stoffes, besonders des formalen, dessen Durcharbeitung sie verlangt, die zweite durch die hohen Voraussetzungen, die sie stillschweigend macht; beide genügen durch ihre Leistungen, namentlich in praktischer Beziehung, den Erwartungen, die man von der Volksschule hat, nicht, und beiden mangelt das Hauptprinzip einer natürlich entwickelnden leicht zum Ziele führenden Methode.

Wenn man die neuere und neueste Literatur der Methodik der Volksschulgeometrie durchgeht, so trifft man sogleich wenigstens auf einen Fortschritt: Die meisten hieher gehörenden Schriften haben den enormen unnöthigen Ballast weggeworfen; sie beschränken sich mehr auf das Wesentliche und Nothwendige und sehen hiebei hauptsächlich auf das, was, ohne die Kräfte der Schüler zu übersteigen, im Leben mit Vortheil angewendet werden kann. Deßwegen sehen wir hier, statt der dickleibigen Bände der Formen- und Größenlehre, geometrische Leitfaden, Uebungsbücher, Aufgabensammlungen ꝛc. mäßigen Umfangs vor uns, die dennoch darin vollständiger sind, als jene umfangreichen Werke, daß sie die geometrische Konstruktionslehre (das geometrische Zeichnen), sowie auch die körperliche Geometrie in mäßiger Ausdehnung ebenfalls behandeln, während in vielen jener frühern Bearbeitungen diese Theile entweder gänzlich mangeln oder zu wenig berührt sind. Wir unterlassen es, aus der Menge der vorhandenen neuern Schriften dieser Art einzelne der bessern mit Namen anzuführen; wir werden nur die Hauptrichtungen der methodischen Auffassungsweise verfolgen.

Auch die Franzosen sind in dieser Beziehung einigermaßen vorwärts gekommen, obwohl eigentlich die „Volksschule" für sie fast ganz noch ein Germanisme ist. Doch haben wir ein paar bemerkenswerthe „Cours théoriques et pratiques de Géométrie à l'usage des écoles primaires" vor uns, die, obwohl methodisch nicht sehr fortgeschritten, denn sie sind immer noch in der Manier von Vater Legendre, also à la Euklide, abgefaßt, dennoch in ihren Aufgaben eine sehr sorgfältige Rücksicht auf

die angewandten Theile der Geometrie, namentlich mit Beziehung auf Handwerke, Künste und Gewerbe, nehmen.

Unter den neuern deutschen Lehrmitteln für den geometrischen Unterricht machen sich zwei von einander abweichende Richtungen geltend, nämlich die oben genannte flach praktische Richtung und die der Entwicklung, gewöhnlich der genetischen Entwicklung; dabei gibt es noch eine Menge von Spielarten, indem sich die eine Richtung der andern, oder umgekehrt, nähert.

Die Praktiker schlechtweg führen die geometrischen Resultate einfach vor, lassen probiren, machen und berechnen*. Die Resultate für sich sind vereinzelte Erscheinungen, dem fähigeren Schüler ist überlassen, sowohl die einzelnen Erscheinungen für sich zu rechtfertigen oder wenigstens zu begreifen und einen geistigen Faden herauszufinden, der von der einen zur andern führt.

Die entwickelnden Methodiker wollen den Schüler an die gemeinschaftliche Quelle führen, aus welcher jene sämmtlichen Erscheinungen fließen; sie wollen aber dadurch den Schüler nicht bloß geistig anregen und bilden, sondern ihn auch praktisch auf feste Füße stellen.

Wenn sich die letztere Richtung vor Weitläufigkeiten hütet — im Rückblick auf die Verstöße, welche die frühere Pestalozzianische Schule gemacht hat — so kann nicht lange zweifelhaft bleiben, welcher der beiden angedeuteten Richtungen bei einem vernünftig organisirten Schulwesen der Vorzug gehören wird.

Weitaus am meisten Vorzüge finden wir in derjenigen entwickelnden Methode, welche den Schüler aus der Entstehung der geometrischen Größen die einzelnen Wahrheiten erkennen und diese also in ihrem sachgemäßen Zusammenhange auffassen läßt. Wir haben diese Methode oben die psychologisch genetische genannt. Wird hieran die Selbstthätigkeit der Schüler in Lösung geeigneter methodisch geordneter Aufgaben ungefähr in der Weise, wie wir in den frühern Betrachtungen auseinandersetzten, geknüpft, so dürfte dadurch auch sicher bei den Schülern eine solche geistige Fertigkeit erzielt werden wie sie Göldi der geisti-

---

* Der Spruch eines Weisen sagt dagegen: Nichts ist gut, was nicht mit Einsicht geschieht. (Sokrates.) Und von der Kraft der Einsicht sagt Pythagoras, „daß sie das Stärkste sei?"

gen Ungelenkigkeit selbst höherer Schüler gegenüberstellt, wenn er in der Einleitung zu seiner Raumlehre bei ähnlicher Veranlassung sagt:

„Es ist in der That traurig zu sehen, wie sogar ältere Schüler, die selbst auf höhern Schulen schon allerlei gehört haben, hinter gut geführten Elementarschülern in manchen Beziehungen zurückstehen; wie sie ohne geübtes Anschauungsvermögen sind, wie ihnen jede Fähigkeit, sich leicht zu orientiren und jeder freie und schnelle Blick fehlt, so daß es ihnen zuweilen große Anstrengung kostet, Dinge und Verhältnisse zu entdecken, die jüngere Schüler gleichsam spielend wahrnehmen."

Ueber die Richtung der Gelegenheitsmethodiker läßt sich eigentlich sehr wenig sagen; man muß warten, bis dieselben ihre Schulbücher geschrieben haben, bevor man genau urtheilen kann. Aber vielleicht währt dieses zu lange, oder wenn es geschieht, so hören sie wohl auf, den Gelegenheitsmethoden das Wort zu reden und werden dann eben auch die Vertheidiger eines bestimmten, d. h. wohl des von ihnen aufgestellten oder angerathenen Lehrverfahrens.

Die meisten derselben scheinen bis jetzt die sonderbare Meinung zu haben, die Methodik als solche führe nur auf Abwege und die Anstrengungen derselben, den Lehrstoff eines Schulfaches nach Gründen der Erfahrung und der wissenschaftlichen und speziell pädagogischen Forschung der Bedeutung der Volksschule gemäß methodisch zu gestalten, führen zur Befangenheit und Einseitigkeit.

Nach ihnen hat sich ein Lehrer mit Leib und Seele einer Methode verpfändet, wenn er dieselbe aus empirischen und wissenschaftlichen Gründen als die vorzüglichste erkannt und dann auch als solche erprobt hat, und sie deßhalb bei seinem Unterrichte fort befolgt; er ist nach ihrer Meinung unselbstständig und unfrei geworden und vermag nicht aus andern Richtungen zur Ergänzung und Vervollkommnung seines Verfahrens das Bessere zu entnehmen.

Deßhalb beruht ihre ganze Kunst bis jetzt darauf, daß sie sagen: der Lehrer soll recht unterrichten, d. h. bei seinem Unterrichte keine Verstöße gegen die Gesetze der menschlichen Entwicklung und gegen das Wesen des Lehrgegenstandes machen. Das ist gewiß sehr einfach, und wenn damit dem Lehrer gedient ist, so hört die Methodik auf, und die Pädagogik ist einer sehr mühevollen und schwierigen Aufgabe enthoben.

Wir aber sind der Meinung Scherrs, der sich in seinem Handbuche der Pädagogik vielfach dahin ausspricht, „daß ihm nichts so verderblich vorkomme, als die Zumuthung oder Zulassung, nach welcher angehende Lehrer sich selbst Lehrstoff und Methode auswählen mögen. Viele finden so in ihrem ganzen Leben nicht den rechten Weg, und häufig wird dadurch die Schule der Schauplatz unüberlegter, planloser Experimente."

Zweite Abtheilung.

Anschauungsunterricht

als geometrischer Vorbereitungsunterricht auf der ersten Schulstufe; Elementarschule.

Vom zurückgelegten 6. bis 9. Altersjahre.

§ 9.

Auffassung von Ort, Form und Größe, zur Unterstützung allgemeiner Unterrichtszwecke, wie z. B. des Schreib-, Zeichnungs- und geometrischen Vorbereitungsunterrichts.

Wir wiederholen, daß wir es für unzweckmäßig erachten, wenn auf dieser Schulstufe ein eigentlich geometrischer Unterricht oder eine sogenannte Formenlehre mit ausschließlich geometrischer Tendenz begonnen werden wollte. Die Richtungen des Unterrichts über Form und Größe müssen hier vereinigt bleiben; sie sprechen sich aus im elementarischen Zeichnungsunterricht, wovon der Schreibunterricht (natürlich bloß in Beziehung auf die Darstellung der Buchstabenform) einen Ausläufer bildet.

Wir müssen ferner bemerken, daß wir uns nicht erlauben wollen noch können, hier eine vollständige Darstellung des elementarischen Zeichnungsunterrichts zu geben, dagegen müssen wir denselben berühren, weil in ihm eben das geometrische Element als zu pflegender Keim eingeschlossen ist und sein soll.

Wohl müssen wir uns aber erlauben, der Tendenz entgegenzuwirken, nach der auch im elementarischen Zeichnungsunterricht schon geometrische Entwicklungen und geometrische Bezeichnungen antizipirt werden sollen, die einer natürlichen Entwicklung des geometrischen Unterrichts nur hindernd in den Weg treten. Wir glauben dadurch dem Zeichnungsfache der Elementarschule selbst einen Dienst zu erweisen, und also auch im Interesse der Methodiker dieses Faches zu handeln, wenn wir aus

demselben eine Zurüstung zu entfernen suchen, die ihm bloß zum Flitterlappen, zur Erschwerung und zum Zeitaufwande dient.

So werden nicht selten beim elementarischen Zeichnen Entwicklungen und Erklärungen über Linien, Winkel, Flächen ꝛc. gegeben, die weit über dieser Schulstufe stehen.

Wenn hier z. B. den Kindern schon erklärt und veranschaulicht werden will, daß zwei Punkte die Richtung und Größe einer geraden Linie bestimmen; daß zwei gerade Linien (in der ebenen Fläche) entweder sich durchschneiden (zusammenlaufend) oder gleichlaufend sein müssen; daß man den Richtungsunterschied derselben Winkel nenne; welches die Arten der Winkel seien; daß z. B. der rechte Winkel den vierten Theil des Raumes um einen Punkt herum ausmache; daß es wenigstens dreier gerader Linien bedürfe, um einen Flächenraum einzuschließen; welches die Arten der Dreiecke, der Vierecke, Vielecke ꝛc. seien, und wie jedes derselben entstehen könne; daß das Flächenmaß in der Form des Quadrates ausgewählt werde, und so noch vielerlei dergleichen Dinge aus der geometrischen Formen- und Größenlehre, — so sind dieß alles Unterrichtsmittel, die man auf dieser Schulstufe dem Zeichnungsunterrichte ebensowenig als einem geometrischen Unterrichte zugestehen darf und zwar jenem noch um so weniger, als derselbe alle diese Dinge schon im ersten Schuljahre und zwar möglichst bald verlangen möchte, um damit auch bald — und wie gemeint wird — gründlich und natürlich zum Zeichnen von Figuren übergehen zu können.

Wir aber sind der Meinung, daß der erste Zeichnungsunterricht am natürlichsten ganz ohne diesen geometrischen Apparat ertheilt werden kann. Dinge, die für das Kind verfrüht sind, können ihm unmöglich zu irgend Etwas nützen, sie müssen ihm schaden und sie schaden ihm leider oft in mehr als einer Richtung. Das elementarische Zeichnen ist aber für sich wichtig genug, ohne daß man irgend nöthig hat, durch Herbeiziehung höherer Mittel demselben noch einen größeren Schein der Wichtigkeit zu geben.

Die kleinen Bilder, die das Kind in dieser Zeit von einfachen, ihm bekannten Gegenständen so gerne entwirft, kann es ausführen, ohne daß ihm vorher obige geometrische Kenntnisse abgeleitet werden; und unterzieht man sich dennoch dieser Mühe, so zwingt man ihm eine Beigabe auf, die ihm das Ganze, von allem Uebrigen abgesehen, jedenfalls lästiger als angenehm macht. Die unmittelbare Auffassung der Form eines

Dinges und die unmittelbare Wiedergabe durch den einfachsten Umriß (Zeichnung) desselben entspricht dem in dieser Periode des Kindesalters sich vorzugsweise kundgebenden Auffassungs- und Nachahmungstriebe am besten.

Fast alle Kinder, sobald sie den Schieferstift handhaben können, versuchen sich sofort im Zeichnen einfacher Umrisse und stellen aus sich selber bald diesen, bald jenen Gegenstand ihrer Umgebung dar. Ein Viereck, das sie zeichnen, ist ihnen keine geometrische Figur; sie stellen dadurch den Spiegel, die Tafel, das Fenster, den Tisch, den Ofen, den Schrank ꝛc. dar; das Bild muß ihnen etwas sein, es muß etwas Konkretes, Bekanntes bezeichnen.

Nun kann der Lehrer die Kleinen auf dieser ersten Entwicklungsstufe des Form- oder Zeichnungsunterrichts naturgemäß weiterführen; er kann sie zur vielseitigen Auffassung räumlicher Formen und Gestalten, zur saubern und deutlichen Darstellung ihrer Umrisse hinführen und anleiten, ohne schon speziell geometrische Betrachtungen wie die oben angeführten vorzunehmen; ja wir wissen aus Erfahrung, daß durch einen solchen Zeichnungsunterricht auf den nachfolgenden geometrischen Unterricht um so besser vorbereitet und vorgearbeitet wird, d. h. daß die Schüler diesen mit um so größerer Geweckтheit und Frische und mit um so größerem Erfolg erfassen, je weniger man bei jenem schon direkte auf rein geometrische Beziehungen losgegangen ist. Es ist auch natürlich. Bevor der Schüler befähigt sein kann, sich die idealen geometrischen Formen zu bilden, muß er vorher mit Sicherheit Form und Gestalt wirklicher Dinge unterscheiden und in sich fixiren. Das elementare Zeichnen bildet die beste Uebung hiezu und ist somit die natürlichste Vorschule des geometrischen Unterrichts.

Wir halten nun immer noch die Art und Weise wie Seminardirektor Dr. Scherr den Formunterricht in der Elementarschule behandelt wissen will, für die beste, die bis jetzt vorgeschlagen und versucht worden ist.

In seinem ersten Bande macht er zwar, ohne daß es nothwendig gewesen wäre, den ausführlichen speziellen Formenlehren noch einige Konzessionen, indem er z. B. in die Unterscheidungen der bekannten Arten der Winkel, der Figuren ꝛc. eintritt; im zweiten Bande dagegen finden wir nur die Uebungen zur Auffassung und Nachbildung der Formelemente, hauptsächlich zur praktischen Vorbereitung auf den Schreibunterricht. Eine speziell geometrische Formenlehre ist hier ganz weggelassen und damit sind

wir vollständig einverstanden. Dagegen dürften wohl die gleichen Uebungen zur Auffassung und Nachbildung der Formelemente auch für einen ganz einfachen elementaren Zeichnungsunterricht benutzt werden, der, wie wir oben andeuteten, nur die Fortsetzung von den Zeichnungsübungen sein müßte, welche die Kinder schon im elterlichen Hause zum Theil aus sich selber, zum Theil in Folge sehr unvollkommener anderseitiger Anleitung mit so großer Lust treiben.

Den Elementarschülern kann man gewiß hiezu noch einige freie Zeit in der Schule einräumen und wäre es auch hauptsächlich nur zur stillen Selbstbeschäftigung. Den geistigen Trieb, der sich bei den Kleinen in der Neigung zum Zeichnen und Abbilden so unverkennbar ausspricht, darf man in der Elementarschule nicht unberücksichtigt lassen.

Die vortheilhaftesten Folgen eines solchen in Hinsicht auf Zeit und Uebungsstoff sich nicht zu sehr ausdehnenden Unterrichts können unmöglich ausbleiben: Auge und Hand werden fortschreitend in der Auffassung und Darstellung der Form geübt und erlangen hiedurch einen gewissen Grad der Sicherheit, der, wenn auch noch nicht sehr hoch, doch immerhin von entschiedenem Werthe ist, und diese Auffassung, Unterscheidung und Uebung in abbildlicher Darstellung körperlicher Gestalten bildet die beste Grundlage, auf welche der mit der Realschule beginnende geometrische Unterricht bauen kann. Die ästhetische Seite dieses Zeichnungsunterrichts ist endlich auch nicht außer Acht zu lassen und würde dieselbe auch noch weniger in der Anregung des eigentlichen Kunstsinnes als bloß in der Hinlenkung auf reinliche und saubere Darstellung und Anordnung bestehen, es bliebe das Ganze immer noch der Berücksichtigung und Pflege werth.

Wir gehen nun über zur kurzen Besprechung des elementaren Zeichnungsunterrichts in den drei ersten Schuljahren.

Erstes Schuljahr.

Vom zurückgelegten 6. bis 7. Altersjahre.

A. Allgemeine Vorübungen.

Die ersten Uebungen mögen ziemlich allgemeiner Natur sein. Die Kinder bringen schon manche Vorstellungen über Verhältnisse des Ortes, der Form und Größe mit sich in die Schule; einzelne haben sie sich ziemlich sicher erworben, andere dagegen nicht und manche Bezeichnungen wenden sie noch ganz falsch an. Im Anfange, also bevor die Kinder schon verschiedene Uebungen im Zeichnen von Punkten und Linien und im Zählen derselben

gemacht haben, zeigt der Lehrer den Schülern eine Anzahl ganz verschiedenartig geformter Gegenstände, die schon ihrer abweichenden Gestalt wegen das Interesse und die Aufmerksamkeit der Kinder auf sich zu ziehen im Stande sind.

Hieran knüpfen sich dann verschiedene Unterscheidungen.

a. Unterscheidungen des Ortes und der Lage.

Hieher gehören die Verhältnisse: Neben (links, rechts), vor, hinter, oben, unten, auf, über, zwischen, mitten, (oberhalb, unterhalb) 2c.

Zur Unterscheidung dieser Verhältnisse nimmt der Lehrer zwei der obigen Gegenstände z. B. zwei Würfel, oder einen Würfel und eine Kugel, oder zwei Bauhölzchen (meist rechtwinklig geschnittene Körper, mit denen die Kinder so gerne spielen), oder zwei platte kleinere Steine 2c. und legt sie neben einander vor die Kinder.

Hierauf Fragen und Antworten und Uebungen: Was ist das? — Und das?

Wie liegen diese Dinge? Sie liegen neben einander; die Kugel liegt neben dem Stein und der Stein liegt neben der Kugel.

Lege diese Bauhölzchen neben einander! — (Und nachdem die Kinder die beiden Hände als rechte und linke sicher unterscheiden gelernt:)

Zeige mir mit der rechten Hand die Kugel; mit der linken den Stein!

Auf welcher Seite liegt die Kugel; — auf welcher der Stein?

Welches der beiden Dinge liegt rechts; — welches links?

Kann man sie nicht noch anders legen? — Wie? — Ja, und auch so: die Kugel vor den Stein, den Stein hinter die Kugel. Und umgekehrt.

Lege diese Würfel neben einander! Hinter einander! Welcher ist vorn; welcher hinten?

Man kann die Würfel noch anders legen: den unten, den oben darauf. Welches ist der obere? Welches der untere?

Lege einen Würfel auf diesen Stein? Eine Kugel auf den Würfel! Was liegt zu oberst? Zu unterst? In der Mitte?

Diese Hölzchen liegen neben einander, — hinter einander. Lege zwischen sie eine Kugel. Was liegt rechts, links

von der Kugel? — Was liegt hier zu vorderst, zu hinterst, in der Mitte?

Lege auf die eine Seite dieses Würfels noch einen Würfel. Und auf die andere Seite auch einen. Welcher ist in der Mitte?

b. Unterscheidungen der Lage und der Richtung.

Z. B. aufrecht oder stehend, liegend, schief, rechts schief, links schief ꝛc.

Der Lehrer veranschaulicht die hier genannten Richtungen mittelst eines geraden, nicht zu kurzen Stäbchens. Die Lektion geschieht ähnlich wie vorhin; durch Fragen und Uebungen wird bei der Auffassung die rechte Aufmerksamkeit und Thätigkeit der Schüler erzielt.

c. Unterscheidungen verschiedener Formen und Gestalten.

Der Lehrer legt vor die Schüler (aber nicht gerade auf ein Mal) eine Anzahl verschiedengeformte Körper, z. B. ein paar Kugeln und Ringe, einen eiförmigen Körper (etwa von Holz), einen kugeligen, einen plattenförmigen und einen ganz unregelmäßigen Stein und wenn gerade vorhanden, etwa auch einen schöngeformten Bergkrystall; ferner aus Holz oder Pappe gefertigt einen Würfel, ein Tetraeder, Octaeder ꝛc., ferner etwa auch ein paar prismatische, walzenförmige und kegelförmige Körper, wenn auch nur in Form der gewöhnlichen Bauhölzchen. Nun Uebungen, z. B. so:

Kannst du mir eine Kugel zeigen? — Noch eine? — Welches ist die größere? — Die kleinere?

Wie ist eine Kugel (was für eine Form hat sie)? Gut, eine Kugel ist rund.

Ist dieser Stein auch ganz so schön rund wie die Kugel? — Nein, er ist nicht ganz so rund; er ist bloß abgerundet.

Da ist noch ein abgerundeter Körper, der aber vorn etwas spitziger ist als hinten; wem sieht der gleich? — Ja, der ist wie ein Ei, er ist eiförmig. — Was ist das? — Ein Ring. Ist der auch ganz rund? — Ja, aber anders als die Kugel. Zeig du mir noch einen Ring! Du noch einen größern! Was sieht der Kugel mehr gleich, das Ei oder der Ring.

Merkt euch nun gut, wie etwas sein muß, wenn es kugelförmig (kugelrund), oder wenn es eiförmig (eirund) oder wenn es endlich ringförmig sein soll.

Seht da, ich kann mit der biegsamen Ruthe beinahe einen Ring bilden! So jetzt ist das fast ein Ring, die Ruthe ist ringförmig gebogen — Und jetzt — ist sie wieder gerade wie zuvor.

Nun wollen wir andere Dinge beschauen, die nicht rund sind. Zeige du mir eines! Du auch eines! u. s. f. Ja, die sind nicht rund, die haben Ecken, sie sind eckig. — Hat es da viele eckige Dinge?

Welches gefällt dir am besten? — Und dir?

Wenn ihr recht ernst habet, dann sollet ihr auch die Ecken zählen lernen. (Bei spätern Zählübungen läßt dieß der Lehrer wirklich thun.)

Seht hier Kinder, dieser Würfel ist da an den Seiten und auch oben und unten ganz glatt und grad, man heißt dieß eben.

Kannst du mir hier noch einen Gegenstand zeigen, der auf den Seiten auch so eben ist? — Gut, fast alle diese Bauhölzchen, auch da diese schönen auf allen Seiten gleich aussehenden Körper. (Die oben genannten regulären Körper.)

Hat dieser Stein auch solche ebene Seiten? — Nein, der ist nirgends eben, er ist auf allen Seiten uneben.

Nenne du mir noch mehr Dinge, die auch so uneben sind!

Nun will ich euch hier ein Ding zeigen, das ist wie ein runder Stab; es hat keine Ecken und ist auf der Seite ganz rund. Das ist eine Walze oder Welle! Seht, so wälzt sie sich!

Hast du auch schon solche Walzen oder Wellen gesehen? — Wo? Und welche?

Solche Dinge nennt man auch walzenförmige.

Also, das ist nicht gleich: rund wie eine Kugel, rund wie ein Ei, rund wie ein Ring, rund wie eine Walze, merkt euch das!

Wer kann mir hier noch ein Ding zeigen, das auf der Seite auch abgerundet ist, oben aber eine Spitze hat? — Gut, das ist ein Kegel!

Ist der Kegel wie eine Walze? — Wo ist er nicht gleich? — Und wo gleich?

Seht, Dinge, die aussehen wie der Kegel, also eine solche Form haben, sind kegelförmig. — U. s. f. je nach der disponibeln Zeit und den Umständen.

Endlich: Nun dürft ihr nochmal wiederholen, was für eine Form jedes dieser Dinge hat.

Die Antworten ganz kurz. Z. B. Wie ist dieses Bauhölzchen? Es ist eckig: Und an den Seiten? — Glatt und grad oder eben.

Wie ist dieser Stein? — Gut, er ist auch eckig, aber auf den Seiten uneben u. s. f.

Also nur solche Unterscheidungen sollen die Kinder hier zunächst machen lernen, wie solche auch im häuslichen Kreise vorkommen, wo der Vater oder die Mutter sich mit dem Kinde anregend über Dinge der Umgebung unterhält. Wir wünschen also bloß naturgemäße Vorbereitung zur Weckung des geometrischen Formensinnes, aber nicht schon geometrische Distinktionen selbst. So wollen wir dem Kinde hier gar nicht erklären, was eine Fläche oder was eine Linie ist, wir wollen gar nicht näher in die Form der Flächen eintreten, von denen ein Körper begränzt ist, überhaupt wollen wir davon hier gar nichts sagen; wir wollen den Schüler bloß den Gegenstand oder das Ding anschauen und dann im Allgemeinen angeben lassen, wie dessen Form ist.

d. Unterscheidung der Ausdehnung im Allgemeinen.

Lang, kurz (groß, klein); hoch, tief, niedrig; weit, nicht weit, enge; dick, dünn; breit, schmal.

Hier ist ein Stäbchen, und da noch eines. Welches ist länger? — Dieses. Und das andere? — Ist der Griffel auch so lang? — Wie ist er denn? Zeige mir etwas das noch kürzer ist.

Nun aber stelle ich die Stäbchen auf. Was kannst du mir jetzt von dem einen sagen? Und was von dem andern?

Auf welcher Seite steht das höhere? Auf welcher das niedrigere?

Nun lasse ich beide vom Tisch an abwärts gehen. Welches reicht tiefer hinab? — Welches weniger tief?

Ich halte beide mit ihren Enden an die Wand. Welches ragt weiter hervor? — Welches weniger weit?

Andere Beispiele: Bis auf den und den Berg, an den und den Ort ist es weit. — Jener Weg ist nicht weit. — Ferner: Der Hals der Flasche ist eng. — Dieser Korb ist weit u. s. f.

Der Lehrer nimmt nun zwei Brettchen, die gleich lang und breit sind, von denen aber das eine ziemlich dünn, das andere bedeutend dicker ist. Indem er sie aneinanderhält: Sind diese

Brettlein auch ungleich lang? — Wo sind sie denn ungleich? — Wie heißt man das? — Ja, das eine ist ganz dünn, das andere ist viel dicker.

Kannst du mir noch etwas nennen, das dünner ist, als dieses Brettchen? — Gut, das Papier ist dünner; die Fensterscheibe ist dünner; das Messer (die Messerklinge) ist dünner ꝛc.

Kennst du Dinge, die noch dicker sind, als das andere Brettchen? — Es werden wieder solche genannt.

Vergleichet den Griffel mit dem Lineal! — Wie ist der Griffel gegen das Lineal? — Er ist kurz und dünn, u. s. f. und umgekehrt.

Diese Lineale sind gleich lang, das eine aber ist breit, das andere schmal.

Wie ist die Tischplatte gegen das Gesimsbrett? Sie ist breiter und dieses ist schmäler.

Noch mehr solche Dinge! — Die Hand ist breiter als der der Daumen. Der Mund ist breiter als die Nase. Das Bändelchen ist schmäler als der Gurt. Der Faden ist dünner als die Schnur. Die Straße ist breit; der Fußpfad ist schmal, u. s. f.

e. Belehrungen über Form, Gestalt und Ausdehnung nach vorgelegten Abbildungen.

Seminardirektor Dr. Scherr hat in seiner Pädagogik einen vollständig glücklichen Versuch gemacht, in den Kreis unserer Elementarschulen belehrende Unterhaltungen nach Bildern hereinzuziehen. Bei diesen an solche Abbildungen geknüpften Unterhaltungen kann die Vorbereitung für den geometrischen Unterricht im Sinne der vorausgegangenen Uebungen ganz leicht und in angemessener Weise ebenfalls im Auge behalten werden. Wir wollen also die Unterhaltung nach Bildern durchaus nicht auf einen einseitigen Zweck beschränken, sondern sie in ihrer allgemein bildenden Richtung vollständig erhalten wissen. Allein wir heben hier bloß hervor, was in jene Unterhaltungen mit Rücksicht auf die Anschauung von Form, Gestalt und Ausdehnung in passender Abwechslung verflochten werden kann.

Ueberfluß an geeigneten Bildern für den Anschauungsunterricht hat man nun freilich nicht und das Gute ist stets noch bedeutend theuer. Zu den besten sind immer noch die im Verlage von Schreiber und Schill in

Stuttgart und Eßlingen erschienenen Bilderbücher zu zählen. Wir stellen uns nun vor, der Lehrer betrachte mit den Schülern hier eben die Abbildung der Schulgeräthe auf den ersten Seiten dieses Bilderwerkes. Indem er mit dem Finger auf die Abbildung der schwarzen Schultafel deutet:

Was ist das?* Das ist die große Schultafel.

Worauf ist sie festgemacht? — Ja, sie steht auf einem hölzernen Gestelle, und da ist etwas darauf geschrieben, das müßt ihr dann auch lernen.

Zeige mir die Ecken der Tafel. — Wie ist die Tafel da vorn? — Gut, sie ist grad und glatt. Wo ist sie auch noch so? — Wo nicht? — Wie stehen die Stäbe des Gestelles? Diese sind aufrecht, aber die übrigen sind liegend. — Welches ist der obere? — Der untere? — Welcher ist rechts, welcher links? — Seht da rechts und links an der untersten Stange sind Kreuze, die machen, daß das Ganze fest steht, das sind die Füße. Und hier ist die Tafel in Fugen eingeschoben; da auf den beiden Zapfen liegt sie fest; man kann diese Zapfen auch in die untern Löchlein bringen, wenn man die Tafel tiefer stellen will. Wie steht sie jetzt? — Jetzt ist sie am höchsten, man kann die Zapfen nicht mehr höher hinauf stecken. Die Tafel reicht höher hinauf als das Gestelle. — Wir wollen jetzt sehen, wie dick die Tafel ist; wo sieht man das? — Gut, sie ist nicht gar dick, sie ist ziemlich dünne, die Stäbe sind dicker. Wo sieht man, wie lang (breit) sie ist, und wie hoch? — Ist sie wohl länger als hoch? u. s. f.

Da ist noch eine Tafel; was für eine? — Das ist eine Schiefertafel; sie ist in Rahmen gefaßt, da sind die Rahmen zusammengefügt; diese Strichlein bedeuten die Fugen. Wo sind die Ecken? Wie sind die Seiten der Rahmen? Welche Tafel ist größer, die Schiefertafel oder die Schultafel auf dem Gestelle? Ist die Schultafel viel dicker als die Rahmen der Schiefertafel? — Aber länger und höher? Wer braucht die Schiefertafel? — Wozu? —

---

* Oder, was stellt das vor? Die Kinder haben aber diese Frageform nicht gern, denn sie antworten lieber: das ist das und das, und nicht: das stellt das vor, oder ist das Bild von dem und dem. Nun im Anfange mag die etwas leichtere Redeweise wohl angehen.

Wollt ihr auch zeichnen und schreiben lernen? — Was muß man hiezu noch haben? u. s. f. u. s. f. — Was für Bilder hat es weiter auf dem ersten Blatte? (Es wird ähnlich in dieselben eingegetreten. Natürlich wird aber nicht nur über Form, Gestalt und Ausdehnung der dargestellten Dinge gesprochen, sondern über die andern Beziehungen, die für die Kinder Interesse haben, ebenfalls).

Was für Bilder bemerket ihr auf dem zweiten Blatte? Schulbänke, sonst noch eine lange Bank, und ein Pult mit einem Sessel davor. Sehet da, die Schulbänke und das Pult haben schiefaufsteigende Tischbretter oder Tischplatten. Warum macht man das wohl so? — Wo geht es schief aufwärts. Wo nicht? — Wie stehen die Beine der Bank? — Ja, sie stehen schief und sind schräg auswärts gerichtet, damit die Bank weniger leicht umfällt, sie steht so fester. Die Beine des breitern Pultes stehen dagegen gerade aufrecht. Bei den Schulbänken hat es statt der Beine aufrecht stehende Bretter, die geben den Bänken noch einen festern Stand und dann sind hier Tisch und Bank erst noch aneinander; seht da unten gehen die stehenden Bretter in einen gemeinsamen liegenden Balken und auf der andern oder der entgegengesetzten Seite auch. Wo steigt man hinein? — Wo kann man sitzen? — Wo anlehnen? — Wohin legt man Buch und Tafel? — Und den Griffel? — Wohin hält man die Hände? — Ja, und da oben auf dem schmalen liegenden Rande der Tische, was bemerkt ihr da? Runde Löcher. Was thut man da hinein? — Gut, da hinein kommen die Tintengefässe für die größeren Schüler zum Schreiben. Hat es beim Pulte auch solche runde Oeffnungen? — Was ist da darin? — Nein, das hier mit den vielen Löchlein oben, das ist kein Tintengefäß, darin hat es Sand, den man auf die nasse Schrift streut, wenn man umkehren muß; das ist eben ein Streusandgeschirr. — Was ist sonst noch auf dem Pulte? Hefte, ein Buch, ein Lineal, Federn, ein Federmesser und — eine Ruthe. — Für wen ist das Pult und der Sessel da? — Und wer muß dort auf die lange Bank sitzen? — u. s. f. mit möglichster Abwechslung und möglichst ungezwungen.

Natürlich werden auch, so bald man mit der Zahlbildung ein wenig vorgerückt ist, Uebungen im Zählen mit der Betrachtung dieser Bilder vereinigt; das bringt Abwechslung und befestigt auch die Zahlenbegriffe.

Ueberhaupt sind diese Unterhaltungen nach Bildern nicht für eine Richtung allein da, sondern für alle zugleich und Scherr hat in seinen Beispielen gezeigt, wie dieser Unterricht nicht nur für die realen, sondern gerade auch für die zartern Gebiete der Aesthetik, der Moral und Religion anregend ertheilt werden kann.

B. Uebung des Auges und der Hand in Nachbildung der Formelemente.

Nachdem die Schüler die allgemeinsten Begriffe über Verhältnisse des Ortes und der Lage, der Form und Gestalt, sowie der Ausdehnung (Größe) an wirklichen Dingen aufgefaßt, so wie auch in Abbildungen wieder erkannt und befestigt haben, kann man auf diesen Grund bauend sicher weiter gehen und mit den Uebungen des Zeichnens beginnen.

Es handelt sich hier zunächst um die Darstellung und Nachbildung der Formelemente. Die Anfänge können in der Weise gemacht werden, wie sie z. B. von Göldi und Andern, am besten wohl aber auch von Scherr in seiner Pädagogik dargestellt sind. Zuerst werden Punkte in den Stellungen zu einander unterschieden und gezeichnet, wie wir dieselben oben, unter den allgemeinen Vorübungen A., an wirklichen Körpern unterschieden haben.

1. Verbindung von Punkten durch die gerade Linie.

Der Lehrer macht z. B. mit der Kreide einen wagrechten Strich an die Wandtafel, indem er spricht:

> Seht Kinder, das ist ein Strich, ein gerade liegender Strich; da hört der Strich auf, das ist sein Ende; da fängt er an, das ist sein Anfang. Wir wollen jetzt Alles durchwischen bis an den Anfang und an das Ende. Was ist nun noch übrig? — Nun, das Tüpflein im Anfang, das nennt man einen Punkt, und das Tüpflein da am Ende heißt auch ein Punkt.) Von einem Punkt in streng mathematischem Sinne darf hier gar keine Rede sein.) Wie liegen die beiden Punkte gegen einander? — Gut, der eine liegt rechts, der andere links, beide liegen neben einander.
>
> Seht, ich kann nun wieder vom Punkt links bis zum Punkt rechts einen geraden Strich, man sagt auch Linie, ziehen, so! — Was ist das für eine Linie? — Eine gerade liegende Linie oder kurz: eine liegende Linie.

Ich mache da noch einen Punkt. Machet ihr jetzt mit dem Griffel auch einen solchen auf euer Täfelein! So, und jetzt noch einen daneben, wie ich es hier mache! Wer kann jetzt den schönsten Strich vom linken bis zum rechten Punkt machen? — So, was ist nun das? — Ein liegender Strich oder eine liegende Linie. Es haben nicht Alle eine schöne gerade Linie gemacht. Seht da, ich will jetzt auch eine solche vom ersten bis zum zweiten Punkt ziehen; so zieht man eine schöne gerade Linie!

Jetzt machet wieder einen Punkt! Und noch einen zweiten, aber gerade unter dem ersten. Ich will beide ebenfalls an die Wandtafel machen. — Und jetzt kann ich vom obern bis zum untern auch einen geraden Strich ziehen, so. — Was ist das? — Gut, das ist eine Linie, die steht wie ein aufrechtes Stäbchen; es ist darum eine stehende Linie. — Machet auch eine solche!

Nun repetirt der Lehrer mit den Schülern die übrigen Stellungen, die zwei oder drei Punkte auf der Tafel in gerader Linie haben können, z. B.

Ein Punkt auf der linken Seite der Tafel oben, der andere auf der rechten unten. Wie liegen dieselben? Der erste liegt links oben, der zweite rechts unten.

Ferner ein Punkt rechts oben! Ein Punkt links unten!

Er verbindet die beiden ersten Punkte (von oben nach unten) und nennt die Linie rechts schief abwärts. Er verbindet die zwei folgenden (wieder von oben nach unten) und nennt die Linie links schief abwärts. Wird umgekehrt von unten nach oben gezogen, so heißt die erstere Richtung links schief aufwärts, die zweite rechts schief aufwärts. Diese Züge werden eingeübt.

Nun drei Punkte: oben, unten, gerade mitten, oder rechts, links, gerade mitten. — Linie durch die ersten, durch die zweiten! — (Drei Punkte schräg sind jetzt schon kaum nöthig, ebensowenig drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen.)

2. Verbindung von geraden Linien.

a. Vorübungen.

Der Lehrer sieht zuerst, ob die Schüler die Linien in den oben unterschiedenen Richtungen gehörig ziehen können. Er diktirt also

(der Ausdruck „Linie“ steht hier der Kürze wegen stets statt „gerade Linie“):

Stehende Linie abwärts gezogen (von oben nach unten)!

Stehende Linie aufwärts gezogen (von einem Punkte unten nach oben)!

Liegende Linie nach rechts gezogen (von einem Punkt links nach rechts)!

Liegende Linie nach links gezogen (von einem Punkt rechts nach links)!

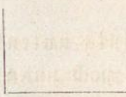
Linie rechts schief aufwärts (von einem Punkt links unten nach einem Punkt rechts oben)!

Linie rechts schief abwärts (von einem Punkt links nach einem andern rechts unten)!

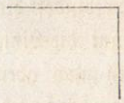
Linie links schief abwärts (von einem Punkt rechts nach einem andern links unten)!

Linie links schief aufwärts (von einem Punkt rechts nach einem andern links oben)!

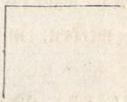
Nun verbindet der Lehrer zwei Linien folgendermaßen und läßt sie nachmachen:



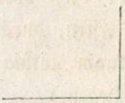
Ich mache eine stehende Linie abwärts und daran eine liegende Linie nach rechts.



Eine stehende Linie aufwärts und daran eine liegende Linie nach links.



Eine liegende Linie nach links und daran eine stehende abwärts.



Eine liegende Linie nach rechts und daran eine stehende aufwärts. U. s. f.

Wenn die Schüler diese Züge gehörig unterscheiden und richtig aus dem Gedächtniß, wie der Lehrer es befiehlt, wiederholen können, so werden folgende Züge geübt:

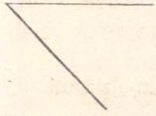
Liegende Linie und Punkt in die Mitte! Stehende und Punkt in die Mitte! Gerade schief aufwärts und mitten ein Punkt! Schief abwärts nud mitten ein Punkt!

Liegende gerade und durch die Mitte eine stehende.

Rechts schief aufwärts und durch die Mitte eine stehende.

Rechts schief aufwärts und durch die Mitte eine liegende.

Links schief aufwärts und daran eine stehende Linie abwärts.



Links schief aufwärts und daran eine liegende nach rechts.

Rechts schief aufwärts und stehende abwärts.

Rechts schief aufwärts und ein wenig nach links abwärts.

Rechts schief aufwärts und dann rechts schief abwärts. U. s. f.

Die obigen Uebungen mögen auch noch mit Strichen, die verschiedene Stärke haben sollen, gemacht werden.

b. Benutzung zu Schriftzügen.

Drei Linien!

Rechts schief aufwärts, dann stehende abwärts und daran wieder rechts schief auf.

Oder noch anders: Rechts schief auf, ein wenig nach links schief ab und dann wieder rechts schief auf.

Noch einmal so und darüber einen Punkt.

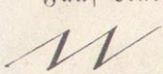
Vier Linien!

Rechts schief auf, stehende ab, nahe daneben noch eine stehende und dann wieder rechts schief auf.

Oder das Gleiche statt mit stehenden mit links schief abwärts gezogenen Linien.

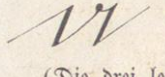
Oder noch mit einer kleinen schiefen oben.

Fünf Linien!


Rechts schief auf und links schief ab und daran noch zwei solche und wieder auf.

Zuerst drei Linien, dann ein Punkt und eine kleine Linie rechts, nämlich:

Auf (rechts schief)! ab (links schief)! auf (rechts schief)! und oben Punkt und kleine Linie rechts.


Wieder so, dann ab! auf!

(Die drei letzten noch einmal mit Strichlein darüber, auch beim n ein leichtes Böglein.) U. s. f. siehe Scherrs Pädagogik.

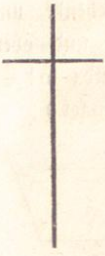
c. Benutzung zu den ersten und einfachsten Uebungen im Zeichnen.

Man kann die ersten Zeichnungen, welche die Kinder entwerfen, wohl noch kaum eigentliche Bilder nennen; allein so viel treffen doch fast alle Kinder, daß sie die charakteristischen Ausdehnungen eines Dinges in der Zeichnung berücksichtigen. Dabei verfolgen sie sichtlich das Bestreben, mit möglichst wenigen Strichen auszukommen. Wir glauben nun, daß die Schule gut thut, sich gerade auf diesen Standpunkt herabzulassen und mit Zeichnungen zu beginnen, die das Kind lebendig als Abbildungen ihm bekannter Gegenstände erfaßt und gelten läßt, obwohl sie noch aus so wenigen Linien zusammengesetzt sind, daß sie von einem höhern Standpunkte aus manche Ausstellungen zu gewärtigen haben.

Wir wollen versuchen, anzudeuten, wie das Vorausgegangene zu den Anfängen des genannten Zeichnens benutzt werden kann.

Der Lehrer mag hiebei abwechselnd besonders zwei verschiedene Gänge befolgen. Nach dem ersten stellt er den Schülern einen einfachen Gegenstand vor und läßt sich dessen Haupttheile und deren Richtungen angeben; und dann stellt er dieselben mit wenigen Linien dar. Nach dem zweiten diktirt er den Schülern Verbindungen von Linien, ähnlich wie vorhin unter a. und b. und fragt dann, was das Ganze vorstelle.

Zur Erläuterung folgen hier einige Beispiele, die der Lehrer nach Belieben bei seinem Unterrichte anwenden oder verändern, oder durch andere ersetzen mag.

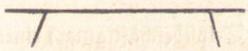


1. Der Lehrer stellt z. B. durch Bauhölzchen ein Kreuz auf; dann sagt er: Seht, dieser Theil des Kreuzes ist stehend, dieser Theil oben liegend. Nun mache ich da an der Tafel eine gerade stehende und da oben hindurch eine kurze liegende Linie; was ist jetzt das, oder was stellt das vor?

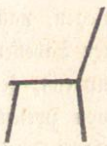
   Die Kinder werden wohl sagen: ein Kreuz, oder jenes Kreuz.

Könnt ihr jetzt auch ein Kreuz zeichnen? — Wie? — Die Schüler versuchen es.

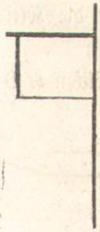
2. Der Lehrer: Ziehet wie ich auf der Tafel einen gerade stehenden Strich, der nach unten dicker wird, und dann nicht ganz unten hindurch einen kurzen liegenden Strich, so. Was wird nun das vorstellen? — Die Kinder antworten vielleicht verschieden, die einen werden es treffen und sagen: ein Schwert, andere: ein umgekehrtes Kreuz. Der Lehrer mag die Schüler an ihre hölzernen Schwerter erinnern.



3. Lehrer: Nun wollen wir hier die Bank zeichnen. Da gehts ganz gerade liegend; nur die Füße sind ein wenig schief. — So! — Nun ähnlich der Tisch. Richtung der Tischplatte liegend, zwei Füße stehend.



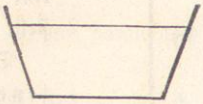
4. Jetzt machet schön, was ich euch sage: Liegende Linie nach rechts, dann rechts schief auf; auf beiden Seiten der liegenden zwei gleiche stehende abwärts (beide können auch ein klein wenig schief auseinandergehen)! — Was wird jetzt das sein (vorstellen)? — Ein Stuhl, ja! Wo ist der Sitz — die Lehne — wo sind die Füße?



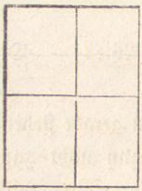
5. Wer kann aber errathen, was ich jetzt mache? Zuerst stehende Linie, dann fast oben nach links eine liegende, dann (nicht zu äußerst) stehend abwärts und wieder nach rechts liegend! So! — Und jetzt zuletzt noch ein Kreuzchen hinein! — Zeichnet das auch!

6. Aber wer könnte jetzt auch seine Schiefertafel abzeichnen? (Wenn die Schüler zwei liegende und zwei stehende Linien ordentlich zusammenfügen, so reicht diese Darstellung für den Anfang ganz aus.)

7. Und was gibt das? Zwei gleich hohe stehende, unten zwischen beiden Enden eine liegende und oben zwei schiefe, in eine Spitze zusammenlaufend; so! — (Wird von den Schülern ebenfalls gezeichnet.)



8. Und das?



9. Aber jetzt wollen wir einmal ein Fenster zeichnen. — Zwei gleich hohe stehende Linien, unten und oben durch zwei liegende geschlossen, dann eine stehende mitten hinab und eine liegende mitten hindurch! — So!

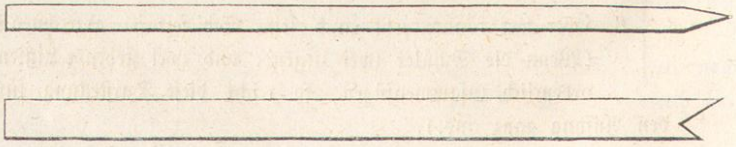
10. Aber jetzt noch eine schwere Zeichnung! Zwei gleich hohe stehende Linien, oben zwei in eine hohe Spitze zusammenlaufende, unten rechts daran zwei schiefe und eine stehende wie beim Haus; zu oberst ein Kreuzlein! Was mag das sein? — Macht's auch so!

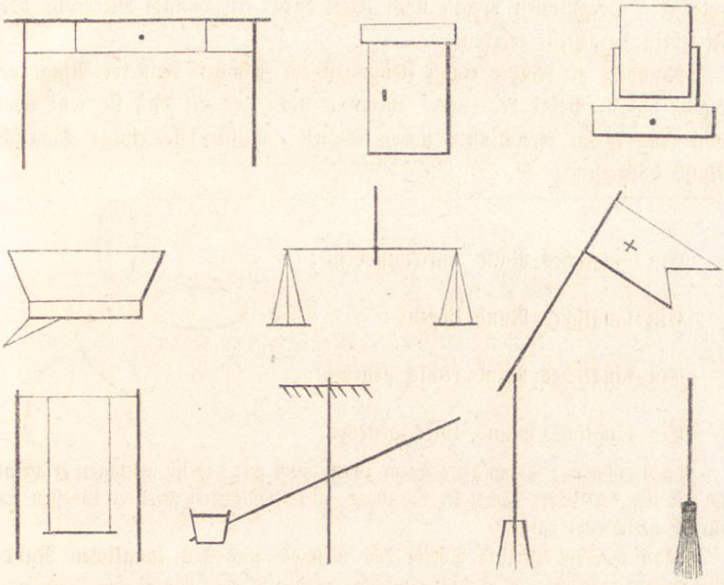
11. Sucht nun für euch (zur stillen Selbstbeschäftigung) einen Bleistift, ein Lineal, ein Buch 2c. zu zeichnen u. s. f.

Zur Abwechslung dürfen die Schüler bisweilen auch zeichnen, was ihnen einfällt und wozu sie gerade Lust haben.

Dann sind den Schülern ebenfalls passende Tabellen vorzulegen, nach denen sie ihnen bekannte Figuren zu zeichnen haben. Die ersten Tabellen enthalten: Punkte in verschiedener Lage und Anordnung (Gruppen), gerade Linien in verschiedener Lage (einzeln) und Verbindungen von zweien, wie solche oben unterschieden und dargestellt wurden, ganz einfache Figuren bekannter Gegenstände aus wenigen geraden Linien zusammengesetzt. Man geht oft nur zu schnell zu Zeichnungen über, welche für die Kleinen zu schwer sind.

Als ganz einfache Figuren mögen außer den oben dargestellten z. B. auch solche wie die folgenden gewählt werden:





3. Krumme Linien und Zusammmensetzungen aus solchen Linien unter sich und mit geraden Linien.

Die Uebungen, die hier durchzunehmen sind, haben hauptsächlich ihre praktische Beziehung auf die krummlinigten Schriftzüge. Wir verweisen hiebei ganz auf die dießfällige Behandlungsweise in Scherrs Pädagogik und berühren hier nur dasjenige, was für den Zeichnungsunterricht benutzt werden kann.

Die Kinder haben die Ringform kennen gelernt und der Lehrer zeichnet ihnen nun eine Ringlinie (Kreislinie) vor, zuerst am besten durch Umziehung eines wirklichen Ringes. Natürlich kann hier noch gar keine Rede sein von dem gleichen Abstande ihrer sämmtlichen Punkte vom Mittelpunkt; man sagt einfach: sie muß ganz rund sein! und beim Verbessern: hier ist sie nicht recht rund!

Dann führt ihnen der Lehrer ein längliches Rund vor: es wird z. B. ein aus elastischem Material gemachter Ring etwas ellyptisch gedrückt oder in die Länge gezogen, oder eine Rolle (aus festerm Papier), deren beide Enden kreisförmig sind, wird etwas zusammengedrückt, so daß dieselben länglich rund werden. (Dieselben Krümmungen sowie die später

folgenden Bogenlinien mögen auch leicht durch ein dünnes Meerrohr oder Fischbein dargestellt werden.)

Nachdem die Kinder einige Uebungen im Zeichnen kleinerer Ringe gemacht haben, wobei der Zweck durchaus nicht der ist, daß sie jetzt schon von Aug schöne Kreislinien ziehen können, müssen sie einige längliche Rund darstellen z. B.

Ein längliches Rund aufrechtstehend:

Ein längliches Rund liegend:

Ein längliches Rund rechts geneigt:

Ein längliches Rund links geneigt:

Anmerkung: Wenn diese Form zuerst auch nur leidlich gelungen erscheint, so hat sich der Lehrer damit zu begnügen, auf Reinlichkeit wird er indessen natürlich gleichwohl halten.

Nun werden einzelne Theile des Ringes und des länglichen Runds gezeichnet z. B.

Ringbogen nach rechts gekrümmt:

Ringbogen nach links gekrümmt:

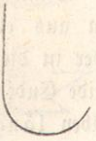
Ringbogen abwärts gekrümmt:

Ringbogen aufwärts gekrümmt:

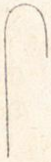
Ebenso mit länglichen Bogen!

Hierauf Verbindung dieser Bogen mit geraden Linien z. B.

Gerade stehende Linie unten mit Ringbogen rechts:



Gerade stehende Linie oben mit länglichem Bogen rechts:



So in verschiedenen Formen und verschiedenen Stellungen ꝛc.

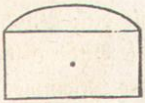
Dann Benutzung solcher Linien zur Darstellung bekannter Figuren z. B.

1. Schiefe Linie rechts auf! Mitten hindurch schiefe Linie links auf! Unten zwei Ringe dran! — Was gibt's so?

2. Einen halben Ring stehend! Von einem Ende zum andern einen länglichen Bogen in gleicher Lage:

3. Ein Ringlein. Rings daran vier oder sechs längliche Rund! Nach unten ein gebogener Strich!

4. Ein längliches Rund liegend! Rechts und links daran zwei gerade Linien abwärts und ein wenig gegen einander. Unten durch einen Bogen geschlossen, so:



5. Zwei gleiche liegende Linien! Links und rechts geschlossen durch zwei stehende! Oben daran einen länglichen Bogen; in der Mitte einen Punkt!

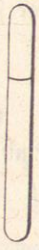
6. Zur Abwechslung mit den Zeichnungsübungen nach bloßer Angabe durch den Lehrer, der meistens gleichzeitig das, was er diktirt, an

die Wandtafel zeichnet, werden hauptsächlich auch einfache Figuren nach vorgelegten passenden Gegenständen entworfen, z. B.

Hier ist ein kleines Sackmesser, das wollen wir einmal zeichnen!

Die Schneide oder Klinge ist da an der scharfen Seite gerade. Von der Spitze an bildet der Rücken einen länglichen Bogen abwärts. Die Seiten des Heftes sind gerade, nur das Ende bildet einen Ringbogen, so:

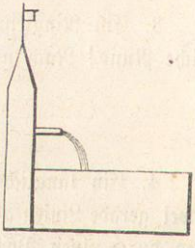
7. Seht, dieses Federrohr halte ich gerade aufrecht; wie muß man da ziehen, wenn man dasselbe zeichnen will? — Gut, und oben und unten? — Nun wollen wir das so machen!



8. Aber jetzt etwas Schweres; dort die Wanduhr! Die vordere Seite sieht aus wie bei einem Haus; in der Mitte ist das runde Zifferblatt mit den Zeigern; unten hängen die Gewichte an Schnüren und das Hin-und-her heißt ein Pendel. Also zuerst machen wir das Haus; in die Mitte den Ring mit den zwei Zeigern. Das Pendel wollen wir aber jetzt stillhalten; dann zeichnen wir es so durch diese stehende Linie mit dem runden Scheiblein unten u. s. f.

9. Den Brunnen wollen wir auch zeichnen; zuerst den Brunnenstock, oben zugespitzt und zu oberst das Fähnlein; dann den Brunnentrog durch zwei gleiche liegende Linien nach rechts und geschlossen durch eine stehende Linie; zuletzt in der Mitte des Stocks die Röhre mit dem ausfließenden Wasser in der Bogenlinie.

U. s. f. auch mit Hülfe geeigneter Wandtabellen.



Es ist natürlich, daß man von den Schülern nicht erwarten kann, daß sie diese Bilder auf den Schiefertafeln ohne Fehler zu Stande bringen; die Bilder selbst wollen und können noch nicht eigentlichen Anforderungen des Zeichnens genügen; sie sollen bloß die einfachsten Einleitungen zu demselben bilden. Die Verhältnisse einzelner Schulen lassen es kaum zu, daß der Lehrer im ersten Schuljahre fürs Zeichnen gar viel thun könne.

Zweites Schuljahr.

Vom zurückgelegten 7. bis 8. Altersjahre.

Fortsetzung der Uebungen im Zeichnen.

Wir werden von hier an keine speziellen Ausführungen hinsichtlich des Zeichnens mehr geben, sondern die weitere Fortsetzung bloß andeuten. Bis jetzt aber handelte es sich darum, zu zeigen, daß wie der Schreibunterricht, so auch der Unterricht im Zeichnen auf der ersten Elementarstufe ohne die Hülfsmittel eigentlich geometrischer Kenntnisse am natur- und sachgemäßesten ertheilt werden kann. Der Schüler kann alle obigen Figuren zeichnen, ohne daß er vorher gelernt hat, was Winkel, Dreiecke, Vierecke, Fünfecke ꝛc. sind; überhaupt bilden die geometrischen Figuren weder den nothwendigen, noch naturgemäßen Ausgangs- und Anfangspunkt für den Elementarzeichnungsunterricht, auch ganz abgesehen davon, daß geometrische Unterscheidungen Kindern von diesem Alter eben so wenig zusagen als verständlich sind.

Dagegen ist es hier vollständig ausreichend, wenn die Kinder neben den allgemeinsten Unterscheidungen des Ortes, der Lage und der Größe verstehen, gerade und gebogene Striche annähernd richtig und ordentlich hervorzubringen, um mit diesen Zügen sowohl die Schriftbuchstaben als die einfachsten Zeichnungen auszuführen. Da nun zu den Buchstaben gebogene Züge unerläßlich sind, dieselben aber schon im ersten Schuljahre erlernt werden, so kann man sie sofort auch zu den einfachsten Zeichnungen benutzen. Die Kinder ziehen die krumme Linie ohnedieß schon aus sich selber zu ihren ersten Zeichnungen herzu und diese charakterisiren sich besonders dadurch, daß sie aus möglichst wenigen Zügen, seien diese krumm oder gerade, zusammengesetzt sind.

Im zweiten Schuljahre werden die Zeichnungen etwas zusammengesetzter und sie beginnen auch den kunstgerechten Anforderungen etwas mehr zu genügen. Wenn z. B. bei den Zeichnungen des vorigen Schuljahres gewisse Theile eines Gegenstandes, bei denen vorzüglich die Ausdehnung in die Länge hervortrat, nur durch eine einzige Linie dargestellt wurden, so mögen dieselben nun besser und richtiger durch eine geschlossene Fläche dargestellt werden. Es dürfen aber hier ebenfalls noch keine zu komplizirten Gegenstände zur Darstellung gewählt werden und die Ausführung darf nur die nothwendigsten Einzelnheiten berühren, während man sich im vorigen Schuljahre mit der Begränzung oder dem Umriß eines Dinges fast ausschließlich begnügte.

So mögen auch schon früher vorgekommene Zeichnungen aufs Neue wiederholt, bei denselben aber einzelne Haupttheile noch weiter ausgeführt werden, wie z. B. beim Haus die Fenster, die Thüre, die Treppe u. s. f.

Die geometrische Vorbereitung des zweiten Schuljahres liegt nun hauptsächlich in der bestimmtern Ausprägung der Züge beim Schreiben und Zeichnen, in der regelmäßigern Anordnung und Eintheilung der Formen und in der richtigern Schätzung ihrer Größenverhältnisse.

Da in vielen Schulen, die mehrere Klassen zählen, der Lehrer sich mit der zweiten Klasse nicht mehr so viel im Zeichnen beschäftigen kann, wie mit der ersten in der Darstellung der Formen zum Schreiben und Zeichnen, so sind hier geeignete Wandtabellen zur Bethätigung der Schüler im Zeichnen unerläßlich. Der Lehrer hat dann natürlich die nöthigen Vorübungen zuerst mit den Schülern vorzunehmen.

Die Tabellen zum elementaren Zeichnungsunterricht von Lehmann, die mit dessen Zeichnungsschule für die folgenden Jahresklassen einen vollständigen Unterrichtsgang bilden, enthalten sehr viel Gutes und Zweckmäßiges; nur scheinen sie etwas weit zu gehen, und manche zu schwierige Zeichnungen zu enthalten; daneben ist die besonders in der Anleitung hervortretende Richtung, auf dieser Stufe schon geometrische Resultate zu entwickeln, um dieselben beim Zeichnungsunterrichte mitzubenutzen, zu tadeln. Diese Mängel können aber in der Folge leicht verbessert werden und das Ganze bleibt immer eine sehr beachtenswerthe, brauchbare Arbeit.

Drittes Schuljahr.

Vom zurückgelegten 8. bis 9. Altersjahre.

Fortsetzung der Uebungen im Zeichnen.

Es hat hier in mehrfacher Richtung ein Fortschritt zu geschehen. Die Umrisse vorliegender oder bekannter Gegenstände werden allmälig noch weiter ausgeführt. Da würde es aber zu viel Zeit erfordern, wenn der Lehrer alles vorzeichnen sollte, und Tabellen, deren Figuren etwas zusammengesetzter sind, können einer Schulklasse nicht so vorgelegt werden, daß alle einzelnen Schüler jeden Zug, wie es nothwendig ist, gehörig übersehen können. Schon die ganz einfachen Figuren der Tabellen des ersten und zweiten Schuljahres lassen sich den Schülern nicht immer so vorstellen, daß sie jedem derselben von der richtigen Seite und in der rechten Form zu Gesichte kommen.

Es sind also hier zweckmäßig geordnete Vorlegblätter in hinreichender Anzahl nothwendig, um den Schülern die Art und Weise zu zeigen, wie sie die hier passenden Zeichnungen am besten ausführen können.

Das macht die eigene Thätigkeit des Lehrers doch nicht überflüssig. Er wird einzelne Gegenstände, deren Abbildungen auf den betreffenden Vorlegblättern vorkommen, den Schülern wirklich vor die Augen führen, die Lage der einzelnen Theile betrachten, ihre Größe gegen einander vergleichen und alsdann das, was in die Darstellung fällt, in der möglichst angenäherten Form auf die Wandtafel zeichnen, worauf die Uebereinstimmung mit der Zeichnung des betreffenden Blattes nachgewiesen und die weitere Ausführung sodann den Schülern überlassen wird.

Die Hauptaufgabe dieses Schuljahres im geometrischen Vorbereitungsunterricht liegt nun besonders darin, daß der Schüler schärfer die Größenverhältnisse der Formen auffassen lerne. Es genügt hier nicht mehr, daß er die Ausdehnungen im Allgemeinen als größer oder kleiner unterscheide; er soll hier bereits darin geübt werden zu erkennen, was zweimal so groß, dreimal so groß ꝛc. als eine gewisse Länge bedeutet; er soll also die Ausdehnungen nach den Begriffen der Zahl vergleichen, worin er bis jetzt bereits zum Verständniß der Vielfachen gelangt ist.

Von den wirklichen bürgerlichen Längenmaßen braucht hier noch fast gar keine Rede zu sein, noch weniger von den Flächenmaßen ꝛc.

Natürlich gehört aber hieher das Eintheilen einer gewissen Länge in gleiche Theile. Hülfsmittel seien dabei erlaubt, aber der Zweck darf nicht vernachläßigt werden, den Blick des Schülers hier schon so vorzubilden, daß dieser von Auge kleinere Längen annähernd ordentlich in gleiche Theile eintheilen kann. So auch beim Vergleichen von Längen.

Die Vorlegblätter haben diesen Zweck besonders zu erleichtern; es kommen Figuren vor, deren Ausführung hauptsächlich auf der gleichartigen Anordnung und der Eintheilung nach gleichen Stücken beruht. Diese Uebungen sind schon ziemlich schwierig und wir würden sie nicht schon in einem frühern, jedenfalls nicht im ersten Schuljahre vornehmen. Viel leichter kann der Schüler schon im ersten Schuljahre eine krumme Linie ziehen als seine Züge nach gleichen Verhältnissen eintheilen und abmessen.

Eine weitere Vorübung für die Geometrie wird die sein, daß der Schüler einzelne Zeichnungen auch so ausführen lerne, daß er die einzelnen

Linien doppelt so lang als auf der Vorlage macht, dann auch wieder halb so lang u. s. f.

Ueberdieß soll hier der Schüler angeleitet werden, verschiedene Seitenansichten eines einfachen Gegenstandes zu zeichnen. Er zählt, wie viele Hauptseiten am Gegenstande zu unterscheiden seien, ebenso zählt er auch die Ecken.

Der Schüler wird bis jetzt schon oft in die Verlegenheit gekommen sein, daß er die dritte Ausdehnung eines Gegenstandes auf seiner Zeichnung nicht, oder nicht gehörig berücksichtigen konnte. Wenn er hier nun hauptsächlich noch bei platten Bildern verweilen muß, so wird die allseitigere Betrachtung der Gegenstände ihn doch zum unmittelbaren Bewußtsein der dritten Ausdehnung bringen. Dieß ist ebenfalls eine Hauptvorbereitung für den geometrischen Unterricht, der mit dem nächsten Schuljahre beginnt.

Bei diesem ganzen Zeichnungsunterrichte soll es also der Schüler nie mit eigentlich geometrischen Gebilden zu thun haben. Die Figuren, die er macht, sind ihm alle Bilder wirklicher, bekannter Gegenstände, und die Erkenntniß des geometrischen Gebildes, als Gegenstand der Abstraktion, soll ihm erst auf der nächsten Schulstufe erschlossen werden. Der Uebergang wird dem Schüler durch diese Vorbereitung leichter, ohne diese wird es oft manchen Schülern der Realabtheilung noch schwer, sich beim geometrischen Gebilde vom materiellen zu trennen.

Ein letzter Fortschritt dieses Schuljahres für die geometrische Vorbereitung bildet endlich noch die größere Genauigkeit und Reinheit, womit hier die Züge beim Schönschreiben und Zeichnen ausgebildet werden.

Zum Uebergange dürfte es nicht schaden, bisweilen eine einfache Zeichnung auch mit Bleistift ausführen zu lassen.

Schlußbemerkung zur zweiten Abtheilung.

Obwohl auf der nächsten Schulstufe die Richtungen des Zeichnens und der Geometrie besonders auseinandergehalten werden, so hört das Zeichnen dennoch nicht auf, in einer innern Verbindung mit der Geometrie zu stehen und es üben beide auf einander ihren gegenseitigen Einfluß aus. Das Zeichnen unterstützt die Geometrie besonders von der mechanisch technischen und die Geometrie das Zeichnen besonders von der begründend konstruktiven Seite. Die Geometrie erhält die überwiegendere

Macht der Kombination des Verstandes und wirkt sonach unterstützend in allen Gebieten mit, in denen die Größenvergleichung eine Hauptrolle spielt; das Zeichnen dagegen stützt sich vorzüglich auf die Thätigkeit der Phantasie und wirkt so zunächst als Kunstbildungsmittel, dann aber allerdings auch für technische Zwecke.

Auf der nächsten Schulstufe müssen wir den bloßen Zeichnungsunterricht größtentheils ganz verlassen, um das geometrische Gebiet nach seiner Stellung im Organismus der Unterrichtsfächer der Volksschule im Zusammenhange durchzuarbeiten.

Dritte Abtheilung.

Beginn des geometrischen Unterichts

auf der zweiten Schulstufe, oder der ersten Realabtheilung.

Vom zurückgelegten 9. bis und mit dem 12. Altersjahre.

I. Viertes Schuljahr.

(Vom zurückgelegten 9. bis 10. Altersjahre.)

§ 11.

Aufgabe.

Bewußte Bildung der Raumelemente und abbildliche Darstellung derselben. Verbindung der Linien durch Messung; einfaches praktisches Längenmessen durch die gesetzlichen Längenmaße. Verbindung von Linien durch Drehung; Winkel und damit zusammenhängende Konstruktionen und Messungen.

§ 12.

Die Raumelemente.

Durch die Uebungen der Elementarschule haben die Schüler bereits in sich mehr oder weniger reine Vorstellungen von den Raumelementen unmittelbar, d. h. durch einfache Anschauung und Uebung, ohne Hülfe irgend welcher Definition gebildet; die meisten werden bei sich unterscheiden zwischen Linie (Strich, Zug) und dem Gegenstand (dem Körper) selbst, ebenso zwischen Punkt und Linie und Fläche (am Boden, an der Wand, an der Seite).

Nun aber handelt es sich zunächst darum, diese Vorstellungen zum bestimmten Bewußtsein zu bringen, d. h. der Schüler soll die Merkmale oder die Eigenschaften, welche die Fläche vor dem Körper, die Linie vor der Fläche ꝛc. unterscheiden, nicht bloß dunkel vermuthen, sondern wissen. Es ist dieß ein Schritt vorwärts in der Abstraktion, der gehörig eingeleitet ein sehr leichter, allmäliger und naturgemäßer ist. Dabei muß man

sich aber vor allen Subtilitäten hüten; es ist ein großer Fehler, wenn Manche meinen, die Schüler hätten diese Begriffe hier schon so perfekt aufzufassen, wie es der Mathematiker thut, das wäre eine Absurdität. Hier so wenig wie anderwärts sind solche Sprünge möglich. Im Gegentheil haben sich im Verlaufe des Unterrichtes jene Begriffe stets noch zu läutern, zu schärfen, zu vervollständigen. Wenn z. B. der Schüler nach und nach die Gebilde kennen lernt, die sich in der Fläche, insbesondere der ebenen konstruiren lassen, so wird er nicht allein im geometrischen Bildungsstoffe weiter geführt, sondern er lernt zugleich jene Elemente Fläche und Linie immer wieder reiner und schärfer auffassen.

Wir sagen dieses ausdrücklich, um einzelne Lehrer von der Meinung abzulenken, als müßten auf dieser Stufe dem Schüler mit einem Male jene Begriffe schon in der Reinheit beigebracht werden, wie sie dieselben selbst inne haben. Es handelt sich beim Bildungsgange um eine fortwährende Läuterung, ja der Lehrer selbst würde jene Elemente bei weiterem Studium immer noch schärfer und allgemeiner auffassen*; so daß er sich leicht überzeugen kann, daß auch beim kleinen Schüler ein reinstes und vollkommenstes Erwerbniß mit einem Schlage nicht möglich ist.

Wir würden also gar nie den Versuch machen, dem Schüler auf dieser Stufe zu allererst schon den Begriff eines rein mathematischen oder geometrischen Körpers (als eines von allen Seiten begränzten Raumes ohne jede materielle Ausfüllung) beizubringen. Man gehe vom physischen Körper auch hier wieder aus und mache den Schüler auf die Begränzung dieses Körpers aufmerksam und zwar besonders auch dadurch, daß man durch Abschneidung von Stücken diese Begränzung verändert. Ist so der Blick des Schülers auf das aufmerksam gemacht, was das Aeußere eines Körpers bildet, d. i. das, worin er von seiner Umgebung abgegränzt oder abgeschnitten ist, so nenne man dieses Aeußere oder diese Begränzung die Oberfläche und deren einzelne Theile die Flächen des Körpers. Die Eigenschaften der Flächen, ihre Begränzung, die Linien und ihre Eigen-

---

* Jeder kann an sich selber diese Erfahrung machen, wenn er von der gewöhnlichen Elementargeometrie zur abstrakteren rechnenden gelangt. Niemand wird läugnen, daß derjenige, der sich Fläche und Linie und ihre Verbindungen auch unter dem Ausdrucke analytischer Gleichungen zu denken vermag, jene eben auch wieder um so allgemeiner und geläuterter auffasse, als früher auf dem Standpunkte der ersten Elementargeometrie.

schaften ergeben sich hierauf ohne Schwierigkeit. Dabei ist es durchaus noch gleichgültig, ob der eine Schüler sich die Fläche nur in Verbindung mit einem wirklichen Körper, oder ob ein anderer geweckterer Schüler sich dieselbe vom Konkreten abgezogen schon als abstraktes Ding vorstellen könne. Das Erstere genügt vollständig und der Lehrer bleibe daher nur bei diesem Erstern.

Die spezielle Manier der Entwicklung kann der Lehrer in Uebereinstimmung mit den allgemeinen methodischen Grundsätzen bald so, bald anders gestalten. Die folgenden Uebungen sollen nur als einzelne Beispiele nicht als strikte Norm gelten.

Nr. 1. Körper und Flächen.

Der Lehrer legt mancherlei für den Unterricht geeignete Körper vor die Schüler, besonders auch solche, von denen er leicht einzelne Stücke abbrechen oder wegschneiden kann. Alsdann läßt er sie durch die Schüler betrachten, läßt gleichartige und ungleichartige Körper angeben, ihre Form bezeichnen, auf verschiedenartige Größenverhältnisse ꝛc. Rücksicht nehmen, Ecken und Seiten zählen u. s. f. Dieß bloß zur Repetition dessen, was die Schüler schon in der Elementarschule aus dem Anschauungsunterrichte gelernt haben. Dann als Fortsetzung z. B.:

Hier ist ein Körper (etwa ein Stück von einer Rübe oder einer Kartoffel ꝛc.), von dem ich leicht beliebige Stücke wegschneiden kann.

Welche Form hat dieses Stück? Es ist rundlich, — eckig, — zugespitzt (je nach seinem wirklichen Aussehen).

Nun seht, hier schneide ich eine Ecke weg. Seht ihr den Abschnitt, den ich da gemacht habe?

Wie ist dieser Schnitt hier am großen Stück? — (Er ist grad und glatt. — So hat man diese Eigenschaft schon in der Elementarschule genannt.)

Ich will noch mehr solche Stücke abschneiden. (Der Lehrer macht die Schnitte so, daß ungefähr eine Würfelform entsteht.)

Ist jetzt das Körperstück auch noch so wie im Anfange? — Nein, es ist kleiner, ist nicht mehr rundlich (oder walzenförmig oder zugespitzt ꝛc.), es hat glatte Seiten und sieht aus wie ein Würfel.

Gut, durch das Abschneiden der Stücke habe ich seine Gestalt, sein ganzes Aeußeres verändert.

(So noch ein Beispiel einer andern beliebigen Formveränderung nur nicht zu weitläufig, damit das Ziel bald erreicht wird.)

Nun seht Schüler! Allemal, wenn man von einem Körper Stücke wegschneidet, so wird dadurch sein Aeußeres verändert, er bekommt eine andere Begränzung.

Jetzt merkt, diese äußerste Begränzung des Körpers nennt man seine Oberfläche!

Was ist also die Oberfläche eines Körpers?

Gut, das Aeußerste (oder die Begränzung) rings um denselben.*

Oder auch das, worin er von seiner Umgebung abgegränzt oder abgeschnitten ist ꝛc.

(Der Lehrer weist nun den Schülern Körpermodelle mit verschieden geformter Oberfläche vor, siehe die Abbildungen von Körperformen in Uebung 1 des ersten Heftes der geometrischen Aufgabensammlung**) z. B.:

Hier sind Körper mit ganz verschiedenen Oberflächen. Bei diesem ersten (ein Tetraeder) bemerkt man vier Haupttheile der Oberfläche; man nennt dieselben einzelne Flächen; da sind drei solche Flächen an den Seiten und eine unten am Boden. Man nennt die erstern deßhalb auch Seitenflächen und die untere Bodenfläche (Grundfläche).

Hier stelle ich euch einen zweiten Körper (einen Würfel) vor. Wie viele Seitenflächen hat der? — Und da zu oberst ist noch eine Fläche, das ist die Deckfläche. Wie viele Flächen hat dieser Körper im Ganzen? — U. s. f. mit einer Reihe ebenbegränzter Körper.

---

* Wir nehmen diese Antwort, wie wir sie einmal von einem Schüler der dritten Elementarklasse hörten, nachdem wir auf einem etwas andern aber ebenfalls anschaulichen Wege auf die Bedeutung der „Oberfläche" hingeleitet und hierauf von den Schülern manche ganz bezeichnende Antwort erhalten hatten. Einer sagte nämlich zuletzt: „D'Oberfläche ist das z'usserst z'ringelum."

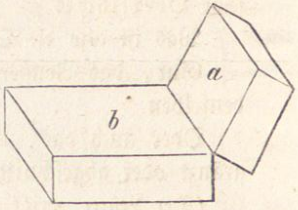
Eine solche allgemeine Auffassung genügt für den Anfang vollständig. Wir halten es nicht für zweckmäßig, wenn man sich hier zu weit einlassen und zu lange verweilen will; man kommt leicht auf Abwege. So hörten wir schon die „Oberfläche" als abzuschälende oder abzuziehende Haut den Kindern vorführen ꝛc.

** Im Staatsverlag der obligatorischen Lehrmittel für die zürcherische Volksschule und zu haben beim Kantonsschulverwalter in Zürich.

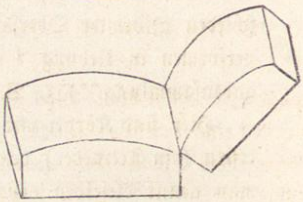
Hierauf:

Wir haben bis jetzt lauter Körper mit solchen Flächen betrachtet, die grad und glatt waren; man nennt diese Flächen auch eben, ebene Flächen.

Man kann leicht wissen, wann eine Fläche eben ist oder nicht. Seht, wenn ich an diesem Körper ein beliebiges Stück abschneide und diese Fläche des abgeschnittenen Stücks (siehe a in nebenstehender Figur) auf diese (siehe b) um lege, so ist eine jede eben, falls sie **vollständig an einander passen oder in einander fallen.**



Wenn aber ein Theil einer Fläche so umgelegt nicht in dieselbe paßt (oder nicht mit derselben zusammenfallen kann) so ist diese Fläche uneben, krumm. Wie hier:



(Wenn der Lehrer nicht gleich solche Formen von Holz bei der Hand hat, so kann er, was fast noch vorzuziehen ist, sich dieselben aus einer Rübe schnell zurechtschneiden. Zur Versinnlichung der nämlichen Eigenschaften kann man etwa auch eine Ecke von einem festen, ebenen, dann von einem unebenen Blatt Papier umfalten. Dann Vorweisung etwa von Kugel, Walze, Kegel.)

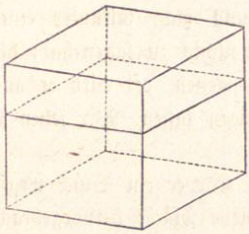
Weil die Flächen (ebene wie krumme) die äußerste Begränzung der Körper bilden, so sagt man, die Flächen sind **nicht dick, sie haben keine Dicke**, und dieß ist die Eigenschaft, welche alle Flächen zum Unterschiede von den Körpern haben, welche sämmtlich Dicke besitzen. Beispiele:

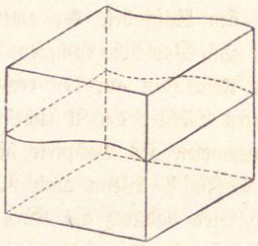
Alle Dinge unserer Umgebung sind wirkliche (materielle) Körper, das dünnste Blatt Papier besitzt noch Dicke, ist also nicht eine bloße Fläche; viele Blätter zusammen können ein dickes Buch bilden u. s. f.

Anmerkung: Wir halten es nicht für nöthig, und im ersten Entwicklungsgange nicht für ganz angemessen, die Fläche den Schülern als abgesondertes, vom Körper getrenntes, abstraktes Ding vorzuführen. Glaubt ein Lehrer bei einer an Fähigkeiten und Kenntnissen vorgerückteren Klasse weiter gehen zu können, so mag er im Einzelnen etwas einläßlicher sein und z. B. die Eigenschaft der

Flächen, daß sie keine Dicke haben und so bloß etwas Gedachtes sind, den Schülern auf folgende anschauliche Weise noch mehr zum Bewußtsein bringen:

Er durchschneidet einen Körper durch einen ebenen oder krummen Schnitt (noch besser ist's wenn solche Formen aus Holz genau gearbeitet hiezu benutzt werden können).





Der erste Körper ist eben durchschnitten. Wenn man das obere Stück abhebt, so zeigt sich da eine ebene Gränzfläche. Der zweite Körper ist krumm durchschnitten. Wird das obere Stück hier weggenommen, so sieht man da eine krumme Fläche. Auf einandergelegt fügen sich aber bei beiden Körpern die Schnittstücke genau aneinander an; das feinste Papier durchgeschoben, würde dieselben von einander trennen, es wäre noch zu dick; die Schnittfläche läßt aber beide Stücke in vollständiger Berührung, sie hat also gar keine Dicke.

Die fragliche Eigenschaft macht sich so dem Schüler sehr fühlbar, indessen ist, wie schon gesagt, diese Hinweisung hier noch leicht entbehrlich.

Nr. 2. Aufgaben über Körper und Flächen.

Erst jetzt werden die Schüler die Aufgabensammlung vorzunehmen und die Aufgaben über Körper und Flächen bis zu Uebung 4 zu lösen haben. Ohne eine vorausgegangene Lektion durch den Lehrer wäre aber der Gebrauch der Aufgabensammlung nicht der rechte. Damit der Lehrer aber nicht bei jeder Aufgabe dem Schüler erklärend und helfend zur Seite stehen muß, sind eben die Hauptgesichtspunkte, auf die sich die Aufgaben beziehen, in der Lektion ins Auge zu fassen. Dessenungeachtet wird nicht jede Aufgabe richtig gelöst werden. Das hat aber nichts zu sagen, denn das Fehlen gehört auch zum Lernen. Die Aufgaben der ersten Uebung des Heftes I. der Aufgabensammlung bieten dem Schüler fast keine Schwierigkeiten. Aufgabe 7 dieser Uebung verlangt, daß den Schülern die dort abgebildeten Körperformen wirklich vorgelegt seien; so wird es ihnen

nicht schwer fallen, die Zahl und die Art der einzelnen Gränzflächen anzugeben.

Die einzelnen Aufgaben mögen bald schriftlich, bald mündlich gelöst werden; kurze bestimmte Antworten ohne minutiöse Genauigkeit sind vorzugsweise zu erzielen.

Bei den Aufgaben der zweiten Uebung mag mitunter eine falsche Antwort zum Vorschein kommen, was gar nichts zu sagen hat; der Lehrer wird die Fehlenden auf den rechten Weg weisen, oft wird er auch durch die besseren Schüler das Unrichtige berichtigen lassen. Wir setzen bloß ein paar Antworten als Beispiele hieher.

Zu 1. Wenn man von einem Körper ein Stück wegschneidet, so wird dadurch am Körper eine neue Fläche hervorgebracht.

Zu 2. Ein Würfel ist von 6 Flächen begränzt, schneidet man bloß eine Ecke ab, so wird der übrige Theil von 7 Flächen begränzt sein.

Man kann den Würfel auch so entzweischneiden, daß jedes der Stücke noch von 5 Flächen begränzt ist (3 Seitenflächen, 1 Grundfläche, und 1 Deckfläche). Den Schnitt quer durch 4 einander gegenüberstehende Ecken gerichtet!

Schneidet man aber vom Würfel ein plattenförmiges Stück ab, so wird auch der übrigbleibende Theil noch von 6 Flächen begränzt sein.

Zu 3 und 4. Wenn man je ein Stück einer Fläche in sie so umlegen kann, daß beide ganz in einanderfallen, so ist die Fläche *eben*. Wenn dieses Zusammenfallen aber nicht möglich ist, so ist die Fläche *krumm* oder *uneben*. Wenn eine Ecke von einem ebenen festen Blatt Papier umgefaltet (ein „Ohr" gemacht) wird, so wird dieselbe genau wieder ins Blatt passen, bei einem unebenen oder krummen Blatt aber nicht. U. s. f.

Die Aufgaben in Uebung 3 mögen am besten mündlich behandelt werden, entweder unter Leitung des Lehrers oder eines ältern Schülers, der die Sache versteht. Der Lehrer kann hieraus ersehen, ob die Schüler im Leben schon mit aufmerksamem Auge auf die Form der Flächen geachtet haben, die einzelne Handwerker an Gegenständen ihrer Berufsthätigkeit hervorzubringen haben. Beispiele, auf die man verweisen kann:

Maurer und Steinhauer untersuchen mit der schmalen, aber langen Seitenfläche eines Rechtscheites, ob eine Fläche eben sei oder nicht. Der Maurer

ebnet den Bestich an einer Mauer, indem er mit einem ebenen Brettchen den weichen Kalkanwurf gleichmäßig bestreicht. Der Schreiner macht mittelst des ebenen Hobels ein unebenes Brett eben, das Messer schneidet die Unebenheiten weg, bis die ebene Grundfläche des Hobels an die frische Fläche des Brettes gut anpaßt. Der Küfer macht auf dem großen ebenen Fügbaume die Fugenschnitte der Dauben passend eben. Metall- und Steinplatten können auf ebenen harten Steinen eben geschliffen werden; auf eingewölbten und auf ausgewölbten Schleifsteinen können verschiedenen Geräthen und Werkzeugen entsprechende krumme Flächen angeschliffen werden. Das Schleifen von Gläsern für Fernröhren und Brillen ꝛc.

Nr. 3. Linien, gerade und krumme; Punkt.

Erste Lektion.

Die Lektion, die der Lehrer hier voraus zu geben hat, kann eben so kurz, oder noch kürzer sein, als die Lektion in Nr. 1.

Der Lehrer zeigt den Schülern an den frühern Körperformen, daß, wo zwei ebene Flächen zusammenstoßen, ein gerader Durchschnitt, eine gerade Kante entsteht. Diese Kante stellt eine gerade Linie dar.

Jedes Stück einer geraden Linie paßt, von beliebiger Seite in sie umgelegt, ganz in dieselbe. (Eigenschaft, durch die später das Lineal geprüft werden soll.)

Findet dieses Zusammenpassen oder Ineinanderfallen nicht Statt, so ist die Linie eine krumme.

Verschiedene Beispiele der einen und der andern Art an Körperstücken! Durchschnitte von Papierstücken!

Die Kanten der Körper stellen die Gränzlinien der Fläche dar. Eine Fläche kann dadurch verschiedenartig begränzt werden, daß man von ihr beliebige Stücke wegschneidet. (Anschauliche Beispiele wie bei den Körperformen.) Man sagt also: die Gränzen der Flächen sind Linien, und diese dehnen sich als äußerste Enden der Flächen nur in die **Länge** aus; sie sind nicht dick und nicht breit.

(Wünscht der Lehrer eine handgreiflichere Nachweisung dieser Eigenschaft zu geben, so kann er dieß durch die Schnittstücke einer Fläche thun, die gerad- oder krummlinig durchschnitten wurde und deren Schnittstücke sich in der Schnittlinie allenthalben unmittelbar berühren. Das Ganze also ähnlich wie oben in Hinsicht auf die Eigenschaft der Flächen.)

Wenn von einer Linie irgend ein Stück abgeschnitten wird, so ist das Ende jedes Stücks ein Punkt.

Was entsteht da, wo zwei Linien zusammentreffen oder sich durchschneiden?

Was stellen die Ecken an einem Körper dar?

Wie in der gleichen Ecke mehrere Kanten zusammentreffen können, so können auch mehrere Linien sich im gleichen Punkte durchschneiden.

Der Punkt als Gränze oder Ende der Linie hat keine Ausdehnung; er ist nicht dick, nicht breit und nicht lang.

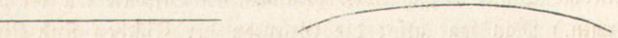
Man kann allenthalben in einer Linie Punkte annehmen, weil man sie allenthalben durchschneiden und begränzen kann. Ebenso können allenthalben in einer Fläche, in einem Körper Punkte angenommen werden.

Zweite Lektion.

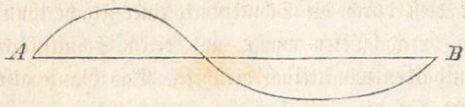
Lehrer: Wie ihr schon in den vorigen Uebungen gesehen habt, werden Punkte, Linien, Flächen, Körper auch abbildlich dargestellt. Ich mache mit der Spitze der Kreide ein Tüpfchen an die Wandtafel, das soll ein Zeichen für einen Punkt sein. Wenn ich von diesem Tüpfchen an die Kreidenspitze vorwärts bewege, so können wir uns auch vorstellen, der Punkt, den das Tüpfchen bezeichnet, werde vorwärts geschoben. Der Weg, den der Punkt hiebei durchläuft, ist eine Linie und das Zeichen für dieselbe ist der Strich, den die Kreidespitze macht. So!

Eine gerade, wie eine krumme Linie kann also auch durch einen sich bewegenden Punkt hervorgebracht (erzeugt oder beschrieben) werden.

Man zeichnet oder zieht eine gerade Linie auf dem Papier oder auf der Tafel am besten, wenn man die Spitze des abfärbenden oder zeichnenden Stifts längs einer geraden Kante hinbewegt. Fährt man mit dem Stift längs einer krummen Kante hin, so zeichnet derselbe eine krumme Linie! Der Lehrer macht beides sorgfältig vor:

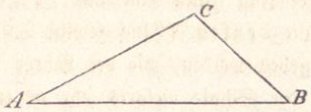


Wir können nun auch einen Punkt gegen einen andern in gerader oder krummer Linie hinbewegen; am bäldesten werden wir von einem zum andern auf geradem Wege anlangen. Dieß heißt auch die Richtung von dem einen Punkte zum andern. Ich bezeichne z. B. hier einen Punkt, den ich A heiße, und da einen zweiten B, so

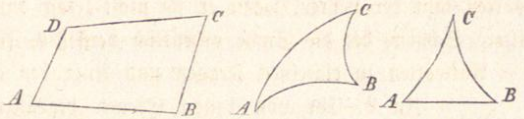


ist der Weg einer geraden Linie von A nach B kürzer als jede andere krumme. Der Lehrer zieht zwei solche Linien.

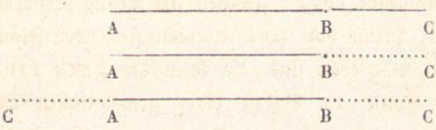
Mit geraden und krummen Linien können wir auch wieder beliebige Stücke von Flächen umziehen oder umgränzen. Ich ziehe z. B. von einem Punkt A zu einem zweiten B eine gerade Linie, dann von B zu einem dritten C wieder eine solche und endlich von C zu A eine dritte; so:



So kann man mit vier, fünf und mehr geraden Linien ein Stück einer Fläche umziehen. Ebenso mit krummen Linien, sowie auch mit krummen und geraden gemischt. Der Lehrer zeichnet solche Figuren vor.



Ebenso lehrt er hier noch das genaue Verlängern einer geraden Linie vorwärts und rückwärts ausgezogen und punktirt.



Nr. 4. Aufgaben über Linien und Punkte.

Nach der ersten Lektion in Nr. 3 können die Aufgaben in Uebung 4 und der größere Theil der Aufgaben von Uebung 5 der Aufgabensammlung I. Heft gelöst werden. Nach der zweiten Lektion in voriger Nr. 3 folgen die übrigen Aufgaben bis und mit Uebung 8 des I. Heftes.

Anmerkungen zu diesen Aufgaben:

Die Fragen in Uebung 4 werden die Schüler nach der Lektion fast alle ordentlich beantworten können. Die Uebung eignet sich am besten zur schriftlichen Lösung auf der Schiefertafel. Es ist ganz recht, wenn auf einzelne Fragen auch verschiedenartige Antworten erfolgen.

Wenn z. B. auf die Frage: Als was kann eine Linie angesehen werden? geantwortet wird: „Eine Linie kann man als die Gränze einer Fläche, oder als den Durchschnitt einer Fläche durch eine Fläche oder als die Kante an einem Körper, oder (später noch) als den Weg oder die Bahn eines sich bewegenden Punktes betrachten"; so wird der Lehrer wohl leicht darauf hinweisen können, wie dieß Alles auf das Nämliche

hinausläuft. Wenn sogar ein Schüler sagen würde: die Linie sei ein Strich oder Zug auf dem Blatt, oder der Tafel, oder dem Boden ꝛc., so würde der Lehrer auch eine derartige Antwort nicht ungerne anhören, obwohl sie nicht ganz richtig ist; er würde bloß berichtigen: jener Strich oder Zug kann eine Linie bezeichnen, man kann sich darunter eine Linie denken. (Eine gewisse Toleranz gegen Antworten, die nicht gerade gegeben werden, wie der Lehrer sie gerne haben möchte, wäre überhaupt in der Schule vielorts sehr zu empfehlen.)

Die übrigen Fragen der Uebung 4 sind für den Schüler nach der vorausgegangenen Lektion leicht zu beantworten. Die schriftlichen Antworten läßt der Lehrer, wenn er sie nicht selbst durchgehen kann, durch ältere Schüler, die die Sache ordentlich verstehen, korrigiren.

Antworten zu einzelnen Fragen und Aufgaben aus Uebung 5:

Zu 2. Ein von lauter Ebenen begränztes Lineal muß gerade Kanten haben. Der Schreiner, der ein solches verfertigt, sorgt bloß dafür, daß er mittelst des Füghobels je zwei und zwei zusammenstoßende ebene Flächen am Linal hervorbringt.

Zu 3. Wenn von zwei zusammenstoßenden Flächen eines Körpers nicht beide eben sind, so kann die Kante krumm sein, wie z. B. die Kante am Boden eines gewöhnlichen Trinkglases; die Kante kann aber auch gerade sein, z. B. einzelne Kanten an Thüren, Fenstern, am Getäfer ꝛc., wo oft schmale krumme Flächen mit ebenen zusammenstoßen.

Zu 6. Ein ebenes Blatt Papier schön zusammengefaltet erhält eine gerade Falte (Kante) aus gleichem Grunde, nach welchem die Kante zweier zusammenstoßenden ebenen Flächen gerade wird.

Da so viele Schulkinder ihre Papiere sehr unordentlich falten und zusammenlegen, so ist eine geeignete dießfällige Hinweisung durch den Lehrer hier ganz am Platze.

Zu 7 und 8. Nach allen Seiten in einer Ebene sind gerade Linien möglich, weil eine Ebene durch eine zweite nach beliebiger Richtung durchschnitten werden kann. Deßwegen kann man auch eine ebene Fläche prüfen, wenn man bloß untersucht, ob eine gerade Kante nach allen Seiten in die Fläche paßt. Schreiner, Zimmerleute, Maurer, Steinhauer, u. s. f. machen etwa mittelst der geraden Kante eines langen Rechtscheites hievon Gebrauch.

Zu 9. Mit einem angespannten Faden oder einer angespannten

Schnur kann man die Richtung einer geraden Linie andeuten. Gärtner, Maurer, Zimmerleute u. s. w. machen Anwendung hievon.

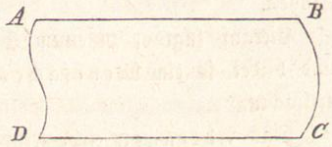
Bei 11. wird der Lehrer gut thun, wenn er selbst einmal vorzeigt, wie die Prüfung eines Lineals genau vorzunehmen ist. Es ist von Wichtigkeit für das nachfolgende geometrische Zeichnen, daß der Schüler zu untersuchen verstehe, ob er mittelst seines Lineals gerade Linien ziehen könne oder nicht.

Bei 13. wird besonders auch darauf geachtet, daß die Schüler ihre Hefte ordentlich liniren lernen.

Die Uebungen 6, 7 und 8 bieten wenige Schwierigkeiten. Die Antworten mögen bald schriftlich, bald mündlich verlangt werden. Die Aufgaben zum Zeichnen sind hier noch auf der Schiefertafel auszuführen. Ein Beispiel wie dieselben zu lösen sind, mag hier genügen.

Uebung 8. 4. g.: Ein Punkt bewege sich in gerader Linie von A zu B, dann in krummer Linie zu C, dann in gerader zu D, und hierauf in krummer Linie zurück nach A. Zeichnet ein Flächenstück, das von solchen Linien umzogen ist.

Die Schüler bezeichnen hier zuerst vier Punkte wie A B C D; dann ziehen sie von A zu B eine gerade Linie mittelst des Lineals, von B zu C eine beliebige krumm, dann von C zu D wieder wie zuerst eine gerade und endlich von D zu A eine beliebige krumme.



Nr. 5. Prüfende Fragen und Aufgaben über den ganzen ersten Abschnitt des geometrischen Unterrichts, d. i. über die Auffassung und abbildliche Darstellung der Raumelemente.

Der Lehrer wird gut thun, bevor er einen neuen Abschnitt beginnt, noch einmal durch eine kleine Prüfung sich zu überzeugen, ob die Schüler die Hauptpunkte des bis jetzt Behandelten aufgefaßt haben. Er wird hiebei je nach der Zeit, die er für den Gegenstand verwenden kann, kürzer oder einläßlicher verfahren, so wie er es überhaupt auch bei der Behandlung der Aufgaben des Lehrmittels gleichfalls halten kann. Bei beschränkter Zeit mag er manche Aufgaben, die weniger wichtig sind, weglassen, während dieselben ein anderer Lehrer unter günstigern Verhältnissen vielleicht gerne lösen läßt.

Fragen und Aufgaben über Körper, Flächen, Linien, Punkte und deren Darstellung finden sich genug im Lehrmittel, so daß hier keine Beispiele weiter nöthig sind; indessen kann der Lehrer dieselben umformen und mehren oder mindern, wie er es für zweckmäßig findet.

§ 13.

Verbindung von Linien durch Messung. Das Messen gerader Linien, und die gesetzlichen Längenmaße.

Nr. 1. Kurzer Inhalt der hierüber zu gebenden Lektionen.

Der Lehrer wird hier zunächst eine Lektion zur Entwicklung des Begriffs „Längenmessen" geben. Dabei wird er bei den Schülern die Kenntniß der vier Zählformen an ganzen Zahlen voraussetzen. Er zeigt zuerst, daß, wenn man an das Ende einer begränzten geraden Linie noch ein gerades Stück Linie in der Verlängerung anfügt, man eine Linie hat, die so groß ist, wie die beiden Stücke zusammen. Dieses Hinzufügen entspricht dem Zusammenzählen im Rechnen, mit dem Unterschiede, daß man beim letztern eine bestimmte Einheit im Auge hat, aus der man sich die Summe bildet, während dieß beim erstern nicht gerade nöthig ist; man hat da die Gesammtheit, das Ganze, ohne Rücksicht auf eine gewisse Einheit.

Hierauf fügt er zu einem Stück Linie ein gleiches wiederholt hinzu und bildet so ein *Mehrfaches* einer Länge. (Analog wie beim Vervielfachen.)

Das *Abtragen* einer geraden Linie auf eine andere hängt mit dem *Wegnehmen*, *Wegzählen*, zusammen. Geschieht dieses Abtragen wiederholt in aufeinanderfolgenden gleichen Stücken, so kann dabei untersucht werden, wie oft das abgetragene Stück in der zu Grunde liegenden Linie *enthalten* sei, d. h. von derselben weggenommen werden könne. Eine **Linie** oder eine **Länge** messen, heißt sonach untersuchen, wie oft in ihr eine bestimmte (gegebene) gerade Linie enthalten sei. Diese letztere wird das *Maß* für die erstere, das *Längenmaß*, auch die *Einheit* genannt, durch welche man die erstere ausdrückt.

Dieses Maß kann als solches zunächst in jeder beliebigen Größe angenommen werden. Im bürgerlichen Leben wendet man jedoch *bestimmte*, *gesetzliche* Maße an, damit jeder Einzelne die Messungsresultate oder die Messungsangaben des Andern verstehen und von der bezeichneten Größe eine richtige Vorstellung erlangen kann. Irrungen,

Täuschungen, Uebervortheilungen ꝛc. werden hiedurch soviel wie möglich verhindert.

Bevor nun der Lehrer zu den gesetzlichen Längenmaßen übergeht, zeigt er noch die Theilung der geraden Linie in gleiche Theile. Diese Theilung geschieht zunächst durch Versuch und allmälige Verbesserung des angenommenen Theils. (Siehe Uebung 11, Heft I. der geometrischen Aufgabensammlung.)

In einer besondern Lektion führt nun der Lehrer den Schülern die einfachern landesgesetzlichen Längenmaße im Zusammenhange vor. Wir betrachten hier für unsern nähern Zweck nur die neuschweizerischen Längenmaße.* (Das ganze Maß- und Gewichtssystem wird auf der folgenden Schulstufe [Ergänzungsschule] in Betrachtung fallen.)

Der Lehrer weist den Schülern den neuen Schweizerfuß in einem eben so langen Fußstabe vor. Der Zweck ist zunächst der, daß sich die Schüler diese Länge mit einiger Sicherheit merken. Wenn eine Zählrahme, die in jeder Reihe 10 zöllige Würfel hat, schon in den frühern Klassen gebraucht wurde, so werden sich die Schüler die Länge des Fußes wie die des Zolles schon lange eingeprägt haben.

Ein Messungsbeispiel, das der Lehrer selbst vornimmt, wird indessen in jedem Falle am Platze sein. Er mißt z. B. und läßt die Schüler zählen, wie manchmal die Länge des Fußes an eine Kante der Wandtafel oder an eine Längenkante der Schulbank ꝛc. angelegt werden kann. Da heißt es dann: diese Kante ist 5 Fuß lang, jene Länge beträgt 12 Fuß und noch ein Stück, das kleiner als 1 Fuß ist. U. s. f.

Zur Messung der Längen, die kleiner als 1 Fuß sind, theilt man diesen in 10 gleiche Theile, wovon ein jeder Theil 1 Zoll genannt wird. (Ausführung: zuerst Theilung in 2 gleiche Theile, wovon jeder nachher noch in 5 gleiche getheilt wird.) Hierauf Messung kleinerer Längen durch den Zoll. Endlich Theilung des Zolls in seine 10 Linien, und entsprechende Messungen, die sich für das kleine Maß am besten auf dem Papier eignen.

So führt der Lehrer noch auf einer Meßlatte die Länge von 1 Ruthe = 10 Fußen vor und macht auch damit entsprechende Mes-

---

* Natürlich wird jeder Lehrer die in seinem Lande gesetzlichen Maße erklären und durch diese das Messen lehren.

sungsbeispiele, so daß endlich die Schüler den Zusammenhang folgender Maße in Wirklichkeit aufgefaßt haben:

Linien	Zoll	Fuß	Ruthe
10‴	= 1″		
	10″	= 1′	
		10′	= 1⁰

Daß diese Maße ähnlich aus einander gebildet werden, wie bei den Zahlen aus den Einern die Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc., hierauf braucht der Lehrer wohl bloß hinzudeuten. Wie diese Verwandtschaft sich im Rechnen macht, zeigt er durch ein paar Zahlenbeispiele:

1345‴ machen 1⁰ 3′ 4″ 5‴. — Warum?

7213‴ machen 7⁰ 2′ 1″ 3‴. — Warum?

Umgekehrt sind 2⁰ 7′ 8″ = 278″

9⁰ 9′ 7″ 3‴ = 9973‴ u. s. f.

Um den Schülern die Nothwendigkeit verschieden großer Längenmaße, die in einem leicht zu behaltenden Verhältnisse zu einander stehen, noch fühlbarer zu machen, kann man sie eine und dieselbe Länge nach verschiedenen Längeneinheiten sich vorstellen und dieselbe auch darstellen lassen. Z. B. Lehrer:

Wie groß ist eine Ruthe?

Deute eine solche (aus bloßer Vorstellung) an einer Länge im Schulzimmer an.

Könnt ihr euch nun eine Länge von 3 Ruthen vorstellen?

Wer kann diese Länge annähernd richtig andeuten?

Wie viele Zolle machen 3 Ruthen?

Wenn man euch nun gleich Anfangs gesagt hätte: denkt euch eine Länge aus 300 Zollen, hättet ihr euch dieselbe mit der gleichen Sicherheit vorstellen oder sie gar aus 300 einzelnen Zollen mit gleicher Richtigkeit abtragen können wie die 3 Ruthen?

Die 3 Ruthen sind aber auch 3000 Linien. Sich eine Länge aus 3000 einzelnen Linien in Gedanken zusammensetzen, hält schon sehr schwer. Eine große Länge stellt man sich also leichter durch die größeren Maßeinheiten, eine kleine natürlich leichter durch die kleinen Maße vor, u. s. f. In allen Fällen ist aber nothwendig, den Zusammenhang dieser Maßeinheiten genau zu wissen.

Zum Schlusse macht der Lehrer die Schüler noch mit den üblichen

Längenmaßen: Elle = 2 Fuß, Stab = 4 Fuß, Klafter = 6 Fuß ꝛc. bekannt. Die Maßstäbe und die Meßruthe sind den Schülern in der Schule auf geeignete Weise dauernd zu Gesichte zu bringen und bei den nachfolgenden Uebungen sollen sie besonders auch ordentlich dieselben handhaben lernen.

Nr. 2. Aufgaben übers Längenmessen.

Zu diesen Aufgaben hat der Schüler durchaus einen ordentlichen Zirkel nothwendig, so wie auch der Lehrer zu einzelnen Darstellungen in den vorigen Lektionen ebenfalls eines größern Zirkels bedarf.

(Wir wiederholen, daß es durchaus wünschbar ist, daß die Schulpflegen diese Zirkel sammt den nöthigen Einsätzen, so wie die nöthige Anzahl Equerren zum späteren geometrischen Zeichnungsunterricht anschaffen; der einzelne Schüler schafft gewöhnlich nichts Brauchbares an und hat doch mehr Auslagen, als solche sich auf dem angedeuteten Wege verhältnißmäßig für die Schulkasse ergeben. Zudem ist, wenn das Opfer einmal gebracht, auf viele Jahre für das Bedürfniß in sehr wohlfeiler Weise gesorgt, indem die einzelnen Schulklassen nach einander von den gleichen Instumenten Gebrauch machen können.)

Die Uebung 9 im I. Hefte der geometrischen Aufgabensammlung ist für die Schüler sehr leicht. Die zu zeichnenden Längen werden in einem besonderen Hefte, „Heft für geometrische Aufgaben", mit Bleistift gezogen. Beispiele:

Zu 4. Zieht eine Linie, die 4 Mal so groß als eine gegebene Linie AB oder = 4 AB ist.

Der Schüler zeichnet eine Gerade A ⊢———⊣ B,
und hierauf C ⊢———⊣———⊣———⊣———⊣ D,
und schreibt dazu CD = 4 AB.

Zu 9. Es sind zwei verschiedene Gerade AB und CD und dann eine dritte EF zu ziehen, die so groß ist als 2 AB + 3 CD.

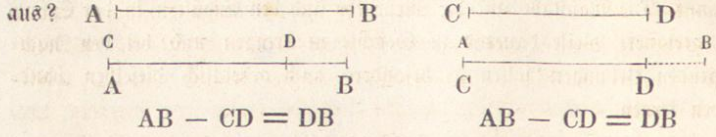
Der Schüler zieht A ⊢———⊣ B und C ⊢———⊣ D
und hierauf E ⊢———⊣———⊣———⊣———⊣———⊣ F
und schreibt EF = 2 AB + 3 CD.

Bei Fragen, die sich auf die gemachten Zeichnungen beziehen, können die Antworten gleich ebenfalls ins Heft geschrieben werden.

Aus Uebung 10.

Zu 1 und 2. Ziehet zwei ungleiche Linien AB und CD und

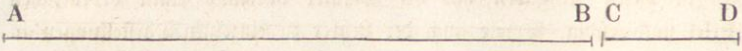
traget dann je die eine auf die andere; wie fällt der Unterschied aus?



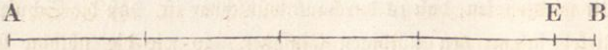
$AB - CD = DB$ $AB - CD = DB$

Der Unterschied fällt auf beide Arten gleich aus.

Zu 4. Sei die Linie AB durch CD zu messen:



Der Schüler trägt CD auf AB ab, so oft es angeht, nämlich:



und schreibt darunter:

Man kann CD 4 Mal von AB wegnehmen, dann bleibt noch EB.

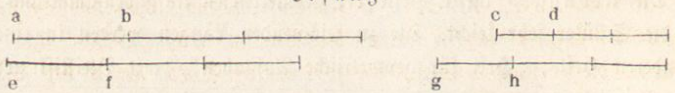
Oder $AB = 4\,CD + EB$

„ $AB : CD = 4$, und es bleibt der Rest EB.

Aus Uebung 11.

Zu 7. Theilt durch Versuch jede der folgenden Linien, die genau nachzuzeichnen sind, in 3 gleiche Theile.

Lösung:



Die erste = 3 ab; die zweite = 3 cd;
die dritte = 3 ef; die vierte = 3 gh.

Die Uebungen 12, 13 und 14 haben nun gar keine Schwierigkeiten.

Daß alle Schüler den halben Fuß in die 5 Zolle und den ersten Zoll in die 10 Linien theilen und sich so einen Fußstab konstruiren, ist zu ihrer eigenen Uebung nothwendig. Wenn aber der Eine oder Andere noch einen genauern nicht selbst verfertigten Maßstab besitzt, so mag er denselben zur genauern Abtragung der Maße insbesondere benutzen.

Zur Messung und Abtragung größerer Längen auf der Wandtafel und dem Zimmerboden mögen auch die Meßruthe, das Klafter, die Elle benutzt werden.

Die Zeichnungsaufgaben in Uebung 14 sind alle nach dem eingetheil-Fußstabe zu machen.

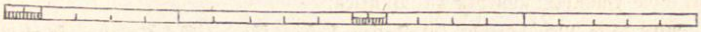
Uebung 15.

Zu 1. Die Bezeichnung der Uebungen unter 1.: a. b. c. d. e. f. ist

nur für den Lehrer da; er wird daraus je nach Zeit und Verhältnissen das Nothwendige ausführen. Wichtig ist es unbedingt, daß die Schüler auch im Messen und Schätzen von größeren Längen außerhalb des Schulzimmers geübt werden.

Zunächst werden gerade wagrecht liegende Linien zur Messung ausgewählt. Dieselbe geschieht im Anfange durch Maßstäbe und Meßstangen; der Lehrer läßt besonders darauf achten, daß dieselben genau an einandergefügt und in der rechten Richtung angelegt werden. Wenn die Schüler für dieselbe Länge nach wiederholter ungleich ausgeführter Messung dasselbe Messungsresultat finden, so sind sie genau verfahren.

Zwei gleich lange Meßstangen, von denen die erste jedesmal wieder ans Ende der zweiten in der gleichen Richtung angefügt wird, bis die



zu messende Länge wenigstens bis auf einen Rest, der kleiner ist, als eine der Stangen, durchlaufen ist, leisten gute Dienste.

Um durch Schritte zu messen, müssen die Schüler angeleitet werden, dieselben vorerst zu messen. Auf einem ebenen Platze können zu diesem Ende hin auf einer geraden Linie vom Anfangspunkte aus Längen von 40′, 50′, 60′, 70′, 80′ u. s. f. bezeichnet werden. Ein Schüler geht vom Anfangspunkte aus in natürlichem Schritte vorwärts und zählt die Schritte, die er machen muß, bis er einmal ziemlich genau mit einem der Theilungspunkte zusammentrifft. Er findet z. B., daß er in 30 Schritten die Länge von 60′ durchlaufen hat, alsdann ist es für ihn noch Sache der Rechnung zu finden, wie viele Fuße er bei einer andern Anzahl von Schritten durchläuft.

Natürlich kann hier noch nicht viel geleistet werden, weil die Schüler dieser Klasse im Rechnen noch nicht gar weit sind; es handelt sich da also bloß um einen leichten Anfang, von dem aus später der Schüler auch aus sich selber weiter gehen kann. Allein schon dieser kleine Anfang hat für den Schüler viel Anregendes.

Daß sich jenes Verhältniß der Schritte bei ihm in einigen Jahren ändern kann, wird er leicht merken. Indessen kommt man bei spätern Messungen im Freien wieder darauf zurück.

Noch wichtiger als das Vorige ist die Uebung des Blickes im Schätzen von Entfernungen. Wiederholte Uebung auf verschiedenem Platze leistet hierin das Meiste. Im Anfange werden die Schüler oft fehlschießen; nach

und nach, besonders in Verbindung mit dem wirklichen Messen werden sie mit mehr Sicherheit treffen.

Man gehe zuerst natürlich von kürzeren Distanzen aus. Die Schüler können mit ziemlicher Sicherheit die Länge eines Fußes, einer Ruthe angeben; man lasse sie Längen von 2, 3, 4, 5 Ruthen angeben, bis sie es ordentlich treffen; alsdann lasse man sie 5^0 oder $50'$ (die gewöhnliche Länge einer Meßkette) als Ganzes wiederholen u. s. f. bis einige Uebung erzielt ist. Dann umgekehrt: Schätzen von beliebig anzunehmenden kürzeren Distanzen.

Es werden z. B. zwei Ziele in nicht gar zu weiter Entfernung gesteckt, worauf alsdann die Schüler deren Entfernung in Fußen, Klaftern, Ruthen ꝛc. schätzen. Dann Entfernungen zwischen beliebigen nicht allzuweit von einander abstehenden Punkten.

Alle diese Meßübungen im Freien haben für die Schüler um so mehr Reiz, als sie fast in gleicher Weise wie freie Turnübungen betrieben werden können.

Eine ebenfalls gute Uebung ist die Absteckung von Linien nach bestimmter Richtung und deren Eintheilung in mehrere gleiche Theile u. s. f.

Hat man z. B. eine Linie abgesteckt, oder ist sie sonst irgendwie bezeichnet, und man soll dieselbe in 3 gleiche Theile theilen, so kann man sie etwa zunächst ausmessen, von dem Ergebniß den dritten Theil nehmen und diesen 3 Mal auf die Linie abzutragen suchen. Wäre die Linie z. B. $105' 7''$ lang, so hätte man $105' 7'' : 3 = 35' 2'' 3'''$ (der Rest kann nun füglich vernachläßigt werden). Dieses Ergebniß sucht man 3 Mal auf die ausgesteckte Länge abzutragen.

Oder auch dasselbe auf einem andern Wege!

Endlich mögen die Umfänge einzelner Grundstücke gemessen werden. Kommen krumme Gränzlinien vor, so sucht man sie sorgfältig in kleinere Stücke zu zerlegen, die von geraden Linien nicht merklich abweichen.

Es versteht sich wohl von selbst, daß bei allen diesen Uebungen gar nicht weit gegangen werden kann; dazu würden die Lehrer auch keine Zeit finden. Wo aber hierin gar nichts geschieht, geschieht doch wohl zu wenig. Man findet mit Recht etwa Zeit, ein harmloses Spiel mit den Schülern zu treiben; die obigen Uebungen halten die Mitte zwischen Spiel und Ernst und wären so auch bloß zur Abwechslung schon empfehlenswerth.

§ 14.

Verbindung von Linien durch Umdrehung. Winkel und damit zusammenhängende Konstruktionen und Messungen.

Nr. I. Lektionen.*

Der vorliegende Theil ist einer der wichtigsten im entwickelnd geometrischen Lehrstoffe; er ist aber zugleich auch für die Schüler einer der anziehendsten.

Die erste Lektion wird sich wohl am besten darauf beziehen, dem Schüler auf geeignete Weise zur Anschauung zu bringen, was man eine Umdrehung, eine Kreislinie, einen Kreis nennt, wie man Umdrehung und Kreislinie theilen und so beliebige Winkel bilden kann.

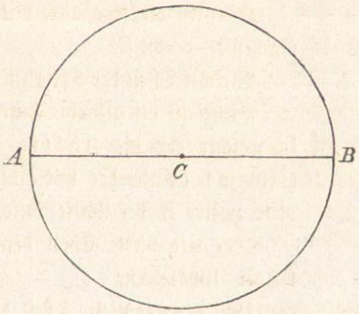
Erste Lektion.

Der Lehrer dreht z. B. ein schmales, ziemlich langes Lineal um seine Mitte in der Tafelfläche ein ganzes Mal um (d. h. so, daß jeder Endpunkt desselben eine volle Kreislinie, deren Durchmesser gleich der Länge des Lineals ist, beschreibt). Hierauf:

Seht Schüler, ich habe das Lineal um seine Mitte ein ganzes Mal umgedreht. — Wir könnten uns statt des Lineals auch eine gerade Linie in der ebenen Fläche so gedreht denken, und dieß würde man dann auch eine ganze Umdrehung der geraden Linie heißen.

Habt ihr bemerkt, was für einen Weg oder was für eine Linie die Endpunkte durchlaufen, eine gerade oder eine krumme?

Statt um die Mitte, kann man auch um einen andern Punkt umdrehen, z. B. um einen Endpunkt. (Er dreht das Lineal um das eine Ende herum und bewegt mit dem andern die Spitze der Kreide auf der Tafelfläche fort.) — Was für einen Weg macht das andere Ende? — Ja, diese



* Der Lehrer kann aus einer der Lektionen, wie sie hier in der Anleitung nur zur Aufführung des Hauptinhaltes immer gegeben sind, natürlich auch zwei oder drei machen. Ueberhaupt wird er abtheilen und abgränzen oder auch zusammenziehen, je nach seinen besonderen Verhältnissen.

krumme Linie rings um den Drehungspunkt, das ist eine Kreislinie.

Das Flächenstück, das von der Kreislinie umgeben ist, wird Kreis genannt.

Dieß hier heißt der Mittelpunkt, wir wollen ihn mit C bezeichnen und die Länge der um C gedrehten geraden Linie mit AC.

Warum heißt der Punkt C wohl der Mittelpunkt? — Gut, weil alle Punkte der Kreislinie von C gleich weit, nämlich um AC abstehen, denn so hat man ja die Kreislinie gemacht.

Endlich nennt man noch AC einen Halbmesser und das Doppelte davon in gerader Linie, wie AB, Durchmesser. Warum wohl die Namen Halbmesser und Durchmesser?

Seht, eine Kreislinie kann ich auch mit einer Schnur und der Kreide ziehen! So. —

Aber am allerbesten geht das mit dem Zirkel. — So.

Hier muß man sich aber den herumlaufenden Halbmesser bloß denken und zwar von einer Zirkelspitze zur andern (Abstand der Zirkelspitzen gleich Zirkelöffnung). Kannst du nun an der Tafel auch eine Kreislinie mit diesem Zirkel ziehen? — Und nun einen Halbmesser? — Einen Durchmesser? — Gibt es noch viele? — Wie lang sind sie? (Maßstabzirkel mit einer Seitenspitze und verschiebbarem Kreidehalter.)

Was für eine Drehung macht der Halbmesser, wenn man mit ihm einen Kreis beschreibt? — Gut, eine ganze Umdrehung.

Könntest du jetzt auch mit dem Zirkel eine halbe Umdrehung machen? — Wie?

Welcher Theil der Kreislinie deutet also die halbe Umdrehung an?

Hiebei ist die gedrehte Linie auch einmal in die Lage gekommen, in welcher erst die Hälfte der halben Umdrehung gemacht war. Seht so! (Entweder mit Hülfe des Zirkels oder eines Stäbchens, oder zweier in der Mitte durch einen Stift verbundenen Stäbchen.)

Der wie vielte Theil der Umdrehung ist wohl die Hälfte der halben Umdrehung?

Und der wie vielte Theil der Kreislinie deutet diese Drehung an?

Wie stark habe ich hier diese Linie gedreht, wenn das eine Ende derselben den dritten, achten Theil einer ganzen Kreislinie beschreibt?

Nun merkt euch: durch jede solche Drehung bildet man einen **Winkel.**

Mache ich eine ganze Umdrehung, so kann man das einen vollen Winkel nennen. Eine halbe Umdrehung macht den gestreckten oder flachen Winkel. Seht so! (Der Lehrer macht dieselben mit Lineal, Schnur oder Zirkel.)

Der vierte Theil der ganzen Umdrehung bildet aber den rechten Winkel, das ist der merkwürdigste und wichtigste aller Winkel.

Ich will euch denselben noch ein Mal sorgfältig an der Tafel vormachen. (Der Lehrer thut es.)

Die Linie in ihrer ersten Lage und die Linie in ihrer letzten Lage, wo man zu drehen aufhört, nennt man auch die Schenkel des Winkels.

Hier beim rechten Winkel heißen diese Linien oder diese Schenkel auf einander senkrecht.

Wann sind also zwei gerade Linien auf einander senkrecht?

Wenn wir eine Drehung machen, die weniger als eine Viertelsumdrehung beträgt, so heißt ein solcher Winkel ein spitzer. Seht so!

Hierauf der stumpfe Winkel: mehr als ein rechter und weniger als ein gestreckter, der erhabene: mehr als ein gestreckter u. s. f.

Der Lehrer läßt alle diese Winkel anschaulich entstehen, gibt die nöthige Anleitung zum freien Zeichnen derselben und zur Benennung durch Buchstaben.

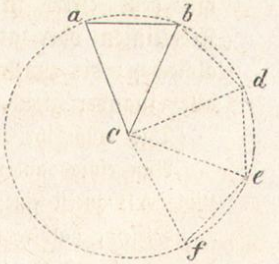
Die Schüler ziehen von Aug rechte, spitze, stumpfe Winkel an die Wandtafel und suchen solche auch an Gegenständen im Schulzimmer auf.

Zweite Lektion.

Genaue Zeichnung der Winkel mit dem Zirkel und Messung derselben.

Der Lehrer: Nun will ich euch zuerst zeigen, wie man mit Hülfe des Zirkels gleiche Winkel genau zeichnen, oder wie man auch sagt, konstruiren kann.

Ich ziehe hier eine Kreislinie:



Von derselben nehme ich einen beliebigen Theil, etwa vom Punkte a bis zum Punkt b; das heißt man einen Kreisbogen und die gerade Linie von a bis b seine Sehne.

Dieser Bogen deutet den Winkel aCb oder die Größe der Drehung des Halbmessers aC (nach rechts) bis zum

Halbmesser bC an. (Er macht mit dem Lineal diese Drehung.) Wäre der Bogen ab der achte Theil der Kreislinie, wie groß wäre dann der Winkel aCb?

Gut, der achte Theil des vollen Winkels, oder der vierte Theil eines gestreckten (oder flachen) Winkels oder die Hälfte eines rechten.

Um nun von bC an genau noch eine solche Drehung anzudeuten, könnte man sich auch das Stück aCb (Kreisausschnitt) ausgeschnitten und dann um C gedreht denken.

(Der Lehrer hat einen solchen Kreisausschnitt aus etwas festem Papier schon bereit und dreht denselben um den Punkt C weiter bis auf bCd u. s. f., um den Schülern zu zeigen, daß der Bogen ab so immer in der Kreislinie fortlaufen muß, weil ja alle Punkte desselben vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind.)

Nun seht Schüler, wie sich beim Umdrehen des Ausschnittes der Bogen ab auf bd angelegt, also legt sich auch mit demselben stets eine gleich große Sehne wie ab an, und umgekehrt; es ist nämlich bd = ab; de = ab u. s. f. Man kann daher ganz einfach, um gleiche Bogen in der Kreislinie oder gleiche Drehungen anzudeuten, nur gleiche Sehnen mit dem Zirkel abtragen. Seht so! (Der Lehrer thut es.)

Welche Winkel sind jetzt also einander gleich?

Gut, die Winkel, aCb, bCd, dCe, eCf u. s. f.

Warum? — Antwort: Weil bei jedem durch die gleiche Sehne ein gleich großer Bogen, also auch eine gleich große Drehung angedeutet ist.

Wir wollen uns also den Satz merken:

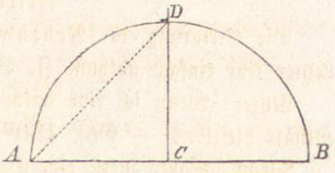
Um genau gleiche Winkel zu zeichnen kann man nur mit dem Zirkel in einer Kreislinie (oder in gleich großen Kreislinien oder auf den Bogen derselben) gleiche Sehnen abstechen; die zugehörigen Winkel am Mittelpunkt sind dann alle einander gleich.

Das müßt ihr dann üben.

Nun einige andere Zeichnungen. Ich ziehe auf dieser geraden Linie AB zuerst eine halbe Kreislinie.

Dieselbe halbire ich, indem ich den Punkt in derselben suche, der von A und B gleich weit entfernt ist. (Der Lehrer zeigt durch

allmäliges Probiren, wie man die Sehne AD findet, die zweimal in den Halbkreis ADB als solche paßt.)



Da nun die Bogen AD und DB einander gleich sind; wie groß sind daher die Winkel ACD und DCB?

So kann man also genau einen rechten Winkel konstruiren, oder auf einander senkrecht stehende Linien ziehen.

Unter der Leitung des Lehrers werden nun auf gerade Linien von verschiedener Richtung und in beliebige Punkte derselben Senkrechte (Perpendikel) gezogen.

Hierauf zeigt dann der Lehrer die Theilung der halben Kreislinie in die 180 Grade. Es wird z. B. die Viertelskreislinie AD nochmals halbirt, dann jede Hälfte noch in 3 gleiche Theile und jeder derselben noch in 5 gleiche Theile getheilt, alsdann läßt man die Schüler rechnen, wie viele der letztern Theilchen auf AD gehen. Sie werden finden, 30 solcher Theilchen. Wird endlich jedes der letztern noch in 3 gleiche Theilchen (etwa von Auge) getheilt, so fallen auf AD 90 und auf die halbe Kreislinie 180 derselben. Da alle gleich groß sind, so deuten sie auch gleich große Drehungen am Mittelpunkte an, jede ist der 90ste Theil von einem rechten Winkel oder der 360ste von der ganzen Umdrehung.

Dieser 90ste Theil des rechten Winkels oder 360ste Theil der ganzen Umdrehung wird 1 Winkelgrad und der zugehörige Theil der Kreislinie 1 Bogengrad (1^0) genannt.

Der Lehrer weist hierauf den Schülern einen fertigen Transporteur vor, ungefähr so wie er sich auf Seite 23 des I. Heftes der geometrischen Aufgabensammlung gezeichnet findet.

Ueber das Nachzählen der Grade an diesem Instrumente und den Gebrauch desselben zum Messen von Winkeln nach Graden gibt der Lehrer hierauf den Schülern noch die nöthige Anleitung.

Eine Anzahl von kleineren Exemplaren solcher Winkelmesser sollte sich in jeder Schule zum Gebrauche für die Schüler beim Unterrichte vorfinden; es gibt solche Gradbogen auf festem Papier, auf Pergament, Horn oder Messing, die sehr wohlfeil für diesen Zweck angeschafft werden können.

Sachbezügliche Fragen, Messungs-, Rechnungs- und Zeichnungsaufgaben finden sich in der Aufgabensammlung genugsam.

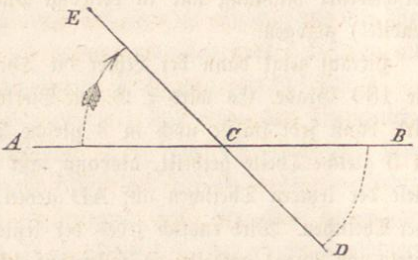
Dritte Lektion.

Die Erklärung der Nebenwinkel und Scheitelwinkel wird der Lehrer sehr einfach abthun. Z. B.

Lehrer: Wenn ich eine halbe Umdrehung darstelle, wie viele Grade enthält dieselbe? — Gut, 180°.

Wenn ich aber zuerst eine Drehung von 50° machen würde, um wie viele Grade müßte ich dann noch weiter drehen, bis die Gesammtdrehung 180° oder einen gestreckten Winkel ausmachen würde? — Antwort: 130°.

Ich zeichne zwei sich durchschneidende gerade Linien:



Was für eine Gesammtdrehung stellen die beiden Winkel ACE und ECB dar? — Antwort: Eine halbe Umdrehung, oder einen gestreckten Winkel, oder 180°, oder 2 Rechte.

Welche Winkelpaare machen ebenfalls so viel aus? — Gut, ECB und BCD; BCD und ACD; ACD und ACE.

Solche Winkelpaare nennt man Nebenwinkel. Merkt euch:

Zwei an einem Punkte (dem Drehungspunkt, Scheitelpunkt) auf einander folgende, oder an einander liegende Winkel, die zusammen eine halbe Umdrehung, d. i. 2 Rechte oder 180° bilden, heißen Nebenwinkel.

Denkt man sich die Gerade AB nach ED gedreht, so: (der Lehrer veranschaulicht diese Drehung um C mit einem Lineal), dann machen die beiden Schenkel AC und CB ganz die gleichen Winkel ACE und BCE; denn so wie z. B. der eine Schenkel eine Viertelsumdrehung macht, thut dieß auch der andere, und wie der erste die halbe Umdrehung vollendet, vollendet auch der zweite eine solche. Dergleichen Winkelpaare nennt man nun Scheitelwinkel.

Also merkt euch:

Scheitelwinkel sind die gleichen Winkel, welche beim Umdrehen einer geraden Linie (um einen in ihr liegenden Punkt) ihre beiden einander entgegengesetzten Schenkel beschreiben.

„Zeichnet hier ein paar Nebenwinkel an die Wandtafel!"

„Nun ein paar Scheitelwinkel."

„Wenn ein Winkel 108° mißt, wie viel beträgt dann sein Nebenwinkel?"

„Und sein Scheitelwinkel?"

„Wenn einer von zwei Nebenwinkeln 1 R ist, wie groß ist dann der andere?"

Der Lehrer unterlasse hier nicht zu zeigen, wie ein Blatt so zusammengefaltet werden kann, daß genau gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel entstehen; hieran schließe er die Anleitung, wie man z. B. einen Brief ordentlich zusammenlegt. Die kleine Nutzanwendung wird den Schülern wohl zu Statten kommen. Es ist ärgerlich, wenn besonders jüngere Leute sich in einer so einfachen Verrichtung doch so ungeschickt benehmen. Wir halten es ganz angemessen, wenn der Lehrer auch in solchen Punkten Ordentlichkeit und Genauigkeit strenge verlangt; darum entsprechende Uebung!

Vierte oder Schlußlektion über die Winkel.

Endlich gibt der Lehrer noch die nöthigen Belehrungen über das Verhältniß der drei Ausdehnungen an Körpern oder im Raume zu einander.

Er kann z. B. anführen, indem er auf einen bestimmten Gegenstand oder einen bestimmten Raum hinweist, daß, wenn man hier eine gewisse Hauptrichtung die Länge nennt, alsdann eine zweite Hauptrichtung, welche mit der erstern gleiche Nebenwinkel bildet, die Breite (Dicke), und eine dritte, welche wieder mit jeder der beiden ersten gleiche Nebenwinkel bildet, die Höhe (Tiefe) genannt werden kann.

An manchen Gegenständen (Ofen, Kasten, Wandtafel ꝛc.) sind diese Richtungen schon durch die rechtwinklig zu einander stehenden Kanten angedeutet, an andern zeigt er, wie durch den Rechtwinkel diese Ausdehnungen aufgefunden werden können.

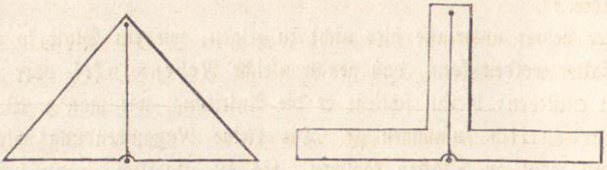
Wird hierauf noch das Loth oder Senkel (die Linie der Schwere) mit diesen Richtungen in Verbindung gebracht, so lernt der Schüler genau bestimmen, was eine wagrechte (wasserrechte) Richtung ist, nämlich eine solche, die mit der Lothlinie gleiche Nebenwinkel bildet, oder auf derselben senkrecht steht.

Der Lehrer thut nicht übel, mit zwei auf einander senkrecht stehenden Stäbchen, von denen er das eine lothrecht hangen läßt, zu zeigen, daß

die ruhige Wasserfläche eines Beckens voll Wasser nach allen Seiten die Richtung des wagrechten Stäbchens hat.

Nun genaue Unterscheidungen durch Fragen und Antworten; siehe Uebung 24, Heft I der geometrischen Aufgabensammlung.

Dann Erklärung der gewöhnlichen Setz- oder Bleiwage und einfache



Anwendung derselben, um zu untersuchen, ob gewisse Richtungen wagrecht seien oder nicht. Die Hinweisung auf die Wasserwage mag noch auf später verspart bleiben.

Die Messung des Neigungswinkels schiefer Linien oder Flächen nach Graden mag ebenfalls noch auf spätere Zeit verschoben werden. Deßwegen kann aber der größere Schultransporteur, wie er auf Seite 30 des I. Heftes der geometrischen Aufgabensammlung gezeichnet ist, gleichwohl als einfache Setzwage gebraucht werden.

Nr. II. Anmerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorige Abtheilung, betreffend die Winkel 2c.

A. Die erste Lektion in voriger Nr. I enthält die Hauptpunkte zum bessern Verständniß der Uebungen 16 und 17 der Aufgabensammlung. Nach jeder Lektion, die der Lehrer gibt, haben die Schüler die betreffenden Aufgaben in der Sammlung zu lösen.

Uebung 16 I wird von ihnen schriftlich gelöst. Es ist gut, wenn sie den Kreis in ihrem Aufgabenhefte mit dem Zirkel zeichnen, und dabei die in der Figur angedeuteten Hauptlagen des gedrehten Durchmessers ebenfalls ausziehen.

Die Fragen mögen das erste Mal ohne weitere Erklärung des Lehrers auf der Schiefertafel gelöst und erst nachher ins Heft eingetragen werden.

Z. B. zu Frage 6. Der Schüler schreibt entweder kurz: „Die Drehung beträgt auch den dritten, fünften, sechsten Theil der ganzen Umdrehung. Der Bogen deutet daher immer die Größe der Drehung an.“ Oder er schreibt etwas ausführlicher: „Wenn bei der Umdrehung eines Schenkels

einer seiner Punkte den dritten Theil einer Kreislinie durchläuft, so ist die gemachte Drehung auch der dritte Theil einer ganzen Umdrehung."

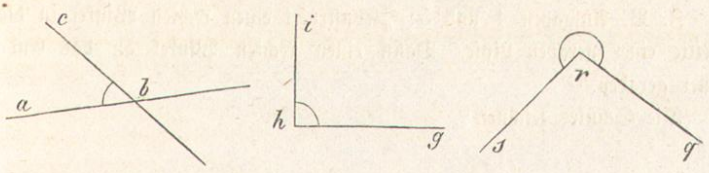
Zu 9. „Von zwei Winkeln ist derjenige der größere, bei welchem die Schenkel weiter von einander weg gedreht sind."

Wenn auch bisweilen eine ungeschickte Antwort kommt, hat dieß gar nichts zu sagen; die Schüler sind im sprachlichen Ausdruck noch nicht sehr geübt, allein nach und nach kommt's immer besser. Zum Korigiren der Antworten können ganz gut mitunter auch ältere Schüler verwendet werden.

Die Fragen unter II können mündlich oder schriftlich gelöst werden, das erste Mal am besten mündlich. Die Antworten sind leicht. Es gibt etwa noch Schüler von diesem Alter, die nicht sicher die Stunde von der Uhr ablesen können, oder, wie man sagt, „die Zeit nicht kennen". Bei diesen Fragen II, die sich auf die Uhr beziehen, wird der Lehrer diejenigen, die in dem genannten Punkte noch zurückstehen, besonders ins Auge fassen und sie bei diesem Anlasse die Zeit genau von der Uhr ablesen lehren.

Von Uebung 17 können die meisten Fragen entweder schriftlich oder mündlich gelöst werden. Die Abhörung der Antworten kann hier wie noch in manchen Uebungen leicht durch einen der geschicktern ältern Schüler geschehen. Da die Antworten sehr leicht sind, so setzen wir bloß beispielsweise diejenigen für die Fragen 7: „Zu einem rechten Winkel braucht es wenigstens zwei spitze Winkel, zu einem stumpfen ebenfalls wenigstens zwei spitze (aber nicht gleiche wie vorhin), zu einem gestreckten wenigstens drei spitze, zu einem erhabenen ebenfalls wenigstens drei spitze, und zu einem vollen wenigstens fünf spitze Winkel.

Die Zeichnungsaufgabe 15 kann zuerst auf der Schiefertafel gelöst werden. Die Schüler setzen z. B.



Der Winkel abc ist ein spitzer Winkel, weil die Drehung weniger als eine Viertelsumdrehung beträgt.

Der Winkel ihg ist ein rechter Winkel, weil er eine Viertelsumdrehung anzeigt.

Der Winkel srq ist ein erhabener Winkel, weil die angedeutete Drehung mehr als eine halbe Umdrehung ausmacht. U. s. f.

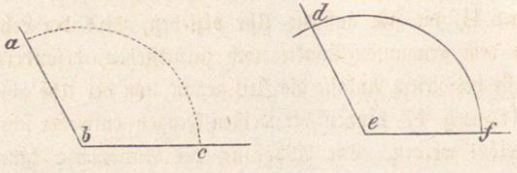
B. Der Inhalt der zweiten Lektion gilt für die Uebungen 18, 19, 20 und 21.

Hier muß der Schüler fast durchgehends den Zirkel benutzen und die Konstruktionen also auf Papier, am besten im „Heft für geometrische Aufgaben" ausführen.

Die Uebung 18 ist nach den Anleitungen, die der Lehrer gegeben hat, nur eine Wiederholung durch den Schüler.

Beispiel: Aufgabe 8. „Gebt euch einen stumpfen Winkel und zeichnet hierauf denselben zum zweiten Mal."

Der Schüler zeichnet etwa:



und schreibt dazu: Gegeben der Winkel abc.

Demselben gleich gezeichnet ist der Winkel def,

weil Bogen df gleich gemacht ist dem Bogen ac.

Oder auch kurz so: Gegeben ∢ abc.

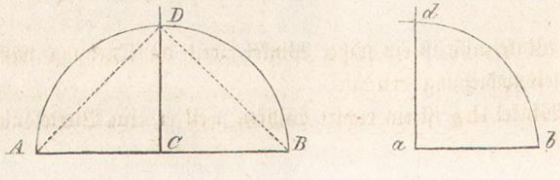
Gefunden ∢ def = ∢ abc,

weil) df =) ac.

In Uebung 19 bildet die genaue Konstruktion des rechten Winkels das Wichtigste. Die Aufgaben 1 bis 6 werden daher von allen Schülern gelöst.

Z. B. Aufgaben 4 und 5: „Konstruirt einen rechten Winkel in die Mitte einer geraden Linie. Dann einen rechten Winkel an das Ende einer geraden."

Die Schüler zeichnen:



und schreiben dazu: Die Gerade AB ist in C halbirt.

Die Halbkreislinie ist in D halbirt, daher ist:

$$\sphericalangle \text{ ACD} = \sphericalangle \text{ DCB} = 1 \text{ R}.$$

Ferner ist db = der Viertelskreislinie DB, also

$$\sphericalangle \text{ dab} = 1 \text{ R} \text{ oder da} \perp \text{ab}.$$

In Beziehung auf Uebung 20 ist es zunächst bloß wünschenswerth, daß der Schüler im Aufgabenheft die halbe Kreislinie ordentlich in 18 oder 36 gleiche Theile eintheilen lernen, später werden sie bei etwas mehr Uebung die weitere Theilung leicht fortsetzen können.

Die Fragen sind nicht schwierig, z. B.

„Könnte ein Winkel auch kleiner als 1^0 sein?" Antw. Ja, wenn die Drehung weniger beträgt als den 90sten Theil des rechten Winkels oder weniger als den 360sten Theil der ganzen Umdrehung.

„Was für Winkel sind Winkel von 30^0, 50^0, 93^0, 123^0, ꝛc.?" — Antw. Ein Winkel von 30^0 ist ein spitzer, von 93^0 ein stumpfer, von 123^0 ebenfalls ein stumpfer Winkel u. s. f.

Ebenso ähnlich die Aufgaben in Uebung 21. Z. B.

„Wie kann man durch Rechnung finden, wie manchmal ein Winkel in einem andern enthalten ist?" — Antw. Man sieht nach, wie viele Grade auf jeden Winkel gehen, und mißt die eine Zahl durch die andere, d. h. sucht, wie manchmal die eine in der andern enthalten ist" u. s. f.

„Zeichnet von Aug einen Winkel von 45^0, von 30^0 ꝛc."

Hier müssen die Schüler bloß nach dem Blicke eintheilen und schätzen; durch einige Uebung bringen sie es hierin bald zu einer ganz ordentlichen Fertigkeit.

Die Fragen und Aufgaben von Uebung 22 eignen sich zur mündlichen oder schriftlichen Behandlung. Da das Einzelne hier durchweg keine Schwierigkeiten bietet, so kann die Uebung auch durch einen vorgerückteren Schüler in examinatorischer Weise mit der Klasse durchgenommen werden.

Die beiden letzten Uebungen 23 und 24 kann der Lehrer ziemlich kurz abthun. Sobald er sieht, daß die Schüler eine richtige Vorstellung von dem haben, was man Länge, Breite, Höhe ꝛc. nennt und wie sich diese drei Richtungen zu einander stellen; daß die Schüler ferner die Richtungen lothrecht und wagrecht genau aufgefaßt haben und die gewöhnlichste Anwendung des Lothes und der Bleiwage kennen, so mag er damit sich vorderhand wohl begnügen.

Wem mehr Zeit zu Gebote steht, der mag Uebungen, wie sie im Lehrmittel Seite 31 angegeben sind, noch weiter ausführen.

II. Fünftes Schuljahr.

(Vom zurückgelegten 10. bis 11. Altersjahre.)

§ 15.

Aufgabe.

Bildung und Konstruktion des Dreiecks und Verarbeitung der hieraus sich ergebenden Beziehungen. — Parallellinien; Nutzanwendung davon auf Dreiecke, Vierecke. Konstruktion regelmäßiger und unregelmäßiger Vielecke. — Einleitung zum Flächenmessen; Flächenmaße.

§ 16.

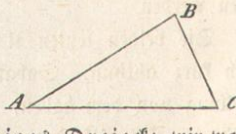
Das Dreieck.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

Die Dreieckskonstruktion bildet für den Schüler einen sehr wichtigen Theil seiner ersten geometrischen Verrichtungen; hier soll er schon mit einiger Gewandtheit den Zirkel handhaben lernen; hier soll er in einer Reihe von verschiedenen Fällen namentlich erkennen, wie in der Geometrie die Größen von einander abhängig seien und wie aus einzelnen gegebenen Größen (Stücken) andere davon abhängige gefunden werden können. Was er in dieser Beziehung bei der Zeichnung der Winkel im vorigen Jahre schon begonnen, wird hier stufenweise weiter geführt. Der Lehrer bildet vor den Augen der Schüler zuerst auf verschiedene Weise einzelne Dreiecke z. B. A.

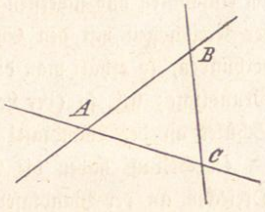
Lehrer: Ihr habt früher schon Flächenstücke mit geraden und krummen Linien umzogen. Wir wollen jetzt lauter *solche* Flächenstücke bilden, die von drei geraden Linien umschlossen sind. Ich zeichne hier an der Tafel drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen:

Von A bis B ziehe ich eine gerade Linie, dann von B bis C eine solche, dann von C bis nach A zurück wieder eine solche.



Ein solches von drei geraden Linien begränztes ebenes Flächenstück heißt ein *geradliniges Dreieck*; wir wollen es hier ohne weiters bloß *Dreieck* nennen. — Wie viele *Eckpunkte*, wie viele *Winkel* im Innern hat das Dreieck? — Was sind die *Seiten*?

Aus jeder ebenen Fläche kann man solche Dreiecke herausschneiden: aber wenn man bloß nach zwei geraden Linien schneidet, so erhält man kein Dreieck, seht so! (Der Lehrer zieht zwei und zwei gerade Linien, die sich durchschneiden, und zeigt, daß so kein Dreieck umschlossen werden kann.)



Man muß zu den Geraden AB und AC noch ein dritte Gerade BC haben, alsdann kann man nach ihnen ein Dreieck herausschneiden. Dieses Dreieck wird hier ABC genannt. — Gut!

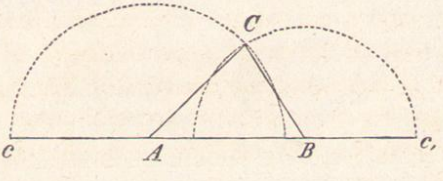
Um also ein Stück einer ebenen Fläche mit geraden Linien zu umgränzen, bedarf es mindestens deren drei.

B. Aber wie kann man nun mit drei geraden Linien von bestimmter Länge ein Dreieck umschließen? — Und wie werden alsdann die Winkel herauskommen?

Das wollen wir jetzt zuerst vornehmen und untersuchen.

Die geraden Linien nehmen wir wieder so, daß wir sie gegen einander drehen können wie die Schenkel der Winkel. Mit geraden Stäbchen kann man diese Drehungen leicht veranschaulichen. Seht so:

Ich nehme hier drei gerade Linien AB, Ac und Bc_1; die beiden letztern denke ich mir um A und B einander entgegengedreht, wie diese beiden Stäbchen.



(Der Lehrer dreht an der Wandtafel zwei Stäbchen wie Bc_1 und Ac um B und A gegen einander, bis ihre andern Endpunkte sich in C vereinigen.) Hier umgränzen sie nun mit AB, die wir die Grundlinie nennen wollen, ein Dreieck ABC. AC und CB sind dessen Seitenlinien.

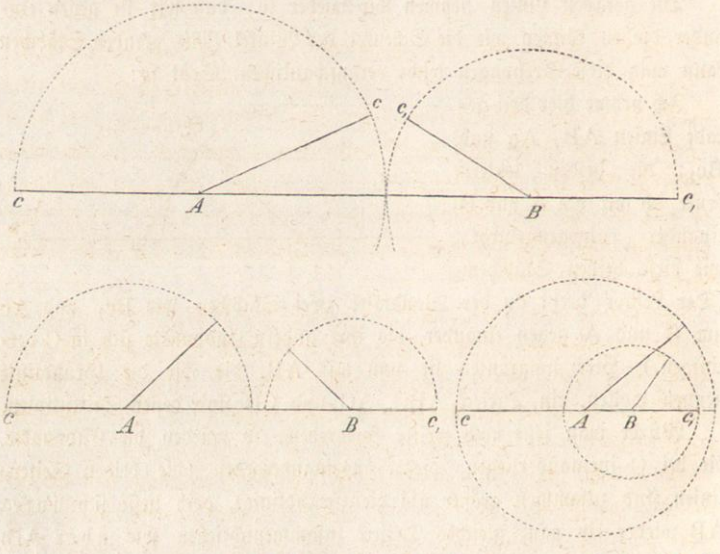
Würde man jetzt noch weiter fortdrehen, so würden die Endpunkte, die bei C ineinanderliegen, wieder auseinandergehen (die beiden Seitenlinien sind zusammen größer als die Grundlinie), doch ließe sich unter AB wieder ein ganz gleiches Dreieck zusammenschließen wie über AB. (Der Lehrer zeigt das mit den beiden Stäbchen, oder mit einem entsprechend geschnittenen Blatt Papier.)

Aber auf diese Weise ausgeführt, würde sich doch die Bildung (Konstruktion) von Dreiecken zu schwerfällig und zu ungenau machen; man

kann dieß auf andere Weise besser ausführen; seht, diese Endpunkte der gegen einander gedrehten Schenkel beschreiben ja Kreislinien und wo diese zusammentreffen, gerade da schließen sich auch jene Enden an einander an. Man kann darum nur diese Kreislinien ziehen und zwar am einfachsten und sichersten mit dem Zirkel. Werden die Durchschnittspunkte der Kreisbogen mit den Endpunkten der Grundlinie durch gerade Linien verbunden, so erhält man die beiden gleichen Dreiecke über und unter der Grundlinie; seht so (der Lehrer führt das aus und läßt das Gleiche die Schüler an der Wandtafel nachkonstruiren).

C. Hierauf haben die Schüler weitere Versuche in der Bildung von Dreiecken an der Wandtafel mit Hülfe des Zirkels zu machen. Der Lehrer gibt zwei Seitenlinien, die zusammen gerade so groß sind wie die Grundlinie, dann zwei, die zusammen kleiner sind als die Grundlinie, dann eine Grundlinie, die mit einer Seitelinie zusammen noch nicht so groß ist, wie die andere Seitenlinie.

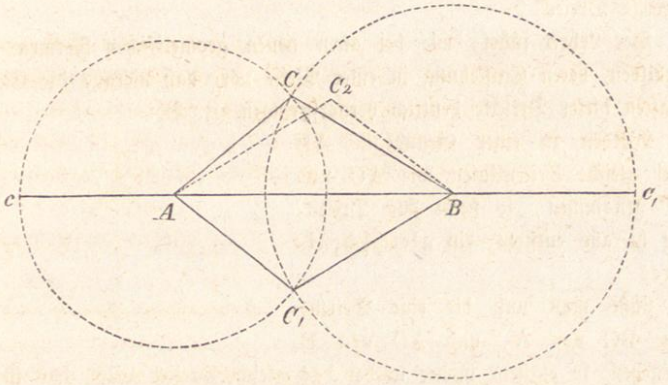
Die Schüler gelangen ungefähr zu folgenden belehrenden Zeichnungen:



Hieraus werden die Schüler durch die That finden, daß, sobald zwei Seiten zu einem Dreieck zusammen nicht größer sind, als die dritte gegebene Seite, aus diesen Stücken kein Dreieck verzeichnet werden kann.

Nun folgt für sie die wiederholte Uebung, aus drei Seiten, von denen je zwei zusammen größer sind als die dritte, ein Dreieck zu konstruiren; daraus sollen sie zunächst lernen, daß man aus den nämlichen drei Seiten nur lauter gleiche Dreiecke bilden kann, oder daß ein Dreieck durch seine drei Seiten völlig bestimmt ist.

D. Es dient zur Befestigung dieser Einsicht bei den Schülern, wenn ihnen der Lehrer auf einem größern Blatte folgende Konstruktion ausführt und vorlegt.



Wird das Blatt nach der Geraden cc_1 umgebogen, so können die obern Halbkreise auf die untern so herabgelegt werden, daß sie einander decken (d. h. genau zusammenpassend aufeinanderfallen; der Punkt C fällt dann auf den Punkt C_1 und beide Dreiecke ABC und ABC_1 decken einander vollständig (sie sind ganz gleich), nur sieht man durch dieses Umlegen, daß ABC_1 die Rückseite von ABC darstellt.

Der Lehrer kann das Dreieck ABC_1 ausschneiden und über AB so legen, daß die größere Seitenlinie von A und die kleinere von B ausgeht, wodurch es dann die Lage von ABC_2 einnimmt und man also sieht, daß man dennoch ein ganz gleiches Dreieck bekommt, man mag die Seitenlinien vom einen oder andern Endpunkte der Grundlinie aus abtragen.

Der Schüler sieht hier also in Wirklichkeit, daß über derselben Grundlinie aus den entsprechenden Seiten wohl zwei Dreiecke gezeichnet werden können, daß dieselben aber ganz gleich sind und das eine nur die Rückfläche des andern darstellt.

Der Lehrer zeigt, daß durch wiederholte Zeichnung des nämlichen Dreiecks auch dessen Winkel wiederholt gezeichnet werden. Um daher einen

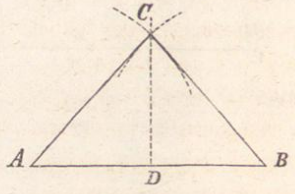
Winkel genau abzuzeichnen, kann man auch nur ein Dreieck aufs Neue zeichnen, das diesen Winkel enthält, d. h. man zieht durch die Schenkel des gegebenen Winkels eine dritte Seite, die mit jenen Schenkeln ein Dreieck einschließt und konstruirt dieses Dreieck noch einmal.

Die Schüler haben hierauf in geeigneten Aufgaben sich zweckmäßig zu üben (siehe die nachfolgenden Bemerkungen zu den Uebungen der Aufgabensammlung).

E. Nun folgen das gleichschenklige, gleichseitige und ungleichseitige Dreieck.

Der Lehrer führt, wie bei allen neuen geometrischen Formen und Gebilden, deren Entstehung in einer Weise vor, daß hieraus die Eigenschaften dieser Dreiecke deutlich hervorspringen. Z. B.:

Werden zu einer Grundlinie AB zwei gleiche Seitenlinien wie AC und BC genommen, so heißt das Dreieck, das hieraus entsteht, ein gleichschenkliges.



Läßt man nun die eine Seitenlinie BC von A, und AC von B ausgehen, so entsteht immer wieder das gleiche Dreieck ABC, das ist ein Zeichen, daß der Winkel B genau dem Winkel A gleich ist. (Das Dreieck nach seiner Vorderfläche und Rückfläche über AB gezeichnet gibt nur die eine Gestalt ABC.) Der Lehrer kehrt wirklich ein auf Papier gezeichnetes gleich großes Dreieck wie ABC um, so daß B auf A und A auf B kommt und läßt die Schüler in der That sehen, daß der Winkel A den Winkel B deckt und umgekehrt.

Oder: Der Lehrer kann auch die Mitte der Grundlinie D mit der Spitze C gerade verbinden und darauf hinweisen, daß nun die Dreiecke ADC und DBC aus einzeln ganz gleich großen Seiten gebildet seien. Wird hierauf das Dreieck CDB um CD umgebogen und auf ADC hinüber gelegt, so zeigt sich ebenfalls, daß der Winkel B ganz auf den Winkel A fällt, aber überdieß noch, daß Winkel CDB den Winkel ADC und Winkel DCB den Winkel ÄCD deckt, daß also nicht bloß die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, sondern daß auch die gerade Linie aus der Spitze in die Mitte der Grundlinie senkrecht auf dieser steht und zugleich den Winkel an der Spitze halbirt.

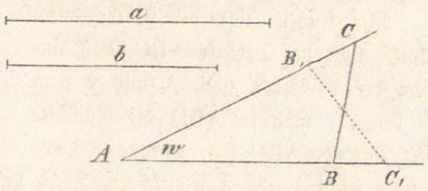
Die Folgerung fürs gleichseitige Dreieck ist nun leicht; es wird hier an jeder Seite dasselbe Statt finden, was an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks.

Die nöthigen Aufgaben werden nach einzelnen Winken von Seite des Lehrers leicht von den Schülern gelöst werden können. (Siehe die entsprechenden Aufgaben im Lehrmittel über das gleichschenklige, gleichseitige und ungleichseitige Dreieck.)

F. Zeichnung des Dreiecks aus zwei seiner Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Die hieher gehörende Konstruktion, sowie die nächstfolgende kann der Lehrer ganz kurz vorführen.

Sind zwei Seiten a und b und ein Winkel w gegeben: so kann man auf den einen Schenkel des Winkels w die Länge a = AC und auf den andern b = AB abtragen, die Endpunkte B und C mit einander verbinden und man erhält das Dreieck ABC.



Ob man nun aus den 3 Stücken a, b und w stets ein gleiches Dreieck erhält?

Zunächst bekommt man, indem man a auf AC_1 und b auf AB_1 trägt, das Dreieck AB_1C_1.

Es ist nun leicht einzusehen, daß dieses Dreieck AC_1B_1 nur die Rückseite von ABC darstellt, was der Lehrer ganz einfach zeigt, indem er ein gleich großes Dreieck wie ABC, das aus einem Blatt Papier ausgeschnitten ist, umgekehrt auf AB_1C_1 legt, wodurch man beide als sich deckend, oder ganz gleiche Dreiecke erkennt.

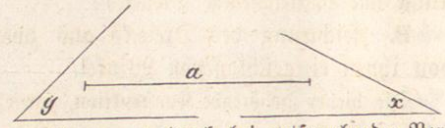
Durch weitere Zeichnungsaufgaben (siehe das Lehrmittel) sollen sich nun die Schüler die Thatsache, daß ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel in allen seinen Theilen völlig bestimmt werden kann, ganz sicher einprägen, und auch die nöthige Fertigkeit in diesen Konstruktionen erlangen.

G. Zeichnung des Dreiecks aus einer Seite und den beiden Winkeln, die an derselben liegen sollen.

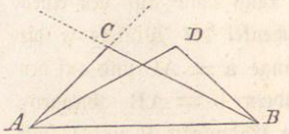
Die Schüler werden bei dieser Aufgabe bald finden, daß man die beiden Winkel, die an der Seite liegen sollen, nicht beliebig groß an-

nehmen kann, wenn man doch ein Dreieck erhalten will. (Es soll dieß dann im nächsten Abschnitt auf einen Gränzfall des Dreiecks, die Parallelen führen.) Bis dahin sagt der Lehrer den Schülern bloß, daß sie die beiden anliegenden Winkel nicht gar groß (jedenfalls kleiner als 2 Rechte) annehmen sollen, um desto besser ein Dreieck zu bekommen.

Der Lehrer zeichnet z. B. an die Wandtafel die Stücke:



und läßt hierauf die Seite a auf eine Gerade AB, den Winkel y auf dieselbe vom Punkte A aus und den Winkel x vom Punkte B aus abtragen, wodurch bei entsprechender Verlängerung der Seitenschenkel das Dreieck ABC geschlossen wird.



Wie früher zeigt der Lehrer durch Umkehrung des Dreiecks ABC, daß, indem der Winkel x nach A und y nach B kommt, man in ABD die Rückseite des Dreiecks ABC hat, woraus sich wie früher leicht ergibt, daß durch eine Seite und die beiden Winkel, die daran liegen sollen, nur lauter gleiche Dreiecke verzeichnet werden können.*

Hierauf Aufgaben zur Selbstbeschäftigung der Schüler (siehe Aufgabensammlung).

Nr. 2. Spezielle Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über das Dreieck.

Je nachdem es der Lehrer für angemessen findet, in seinen Lektionen etwas schneller oder weniger schnell vorwärts zu schreiten, je nachdem wird er durch eine Lektion entweder schon für ein paar Uebungen, oder dann bloß für eine Uebung die nöthige Entwicklung geben.** Es kommt natürlich ganz auf die Umstände an; bald ist ein mehr gedrängtes, übersichtliches, bald ein etwas einläßlicheres Verfahren besser am Platze; der richtige Takt des Lehrers hat dieß je nach den Verhältnissen herauszufinden.

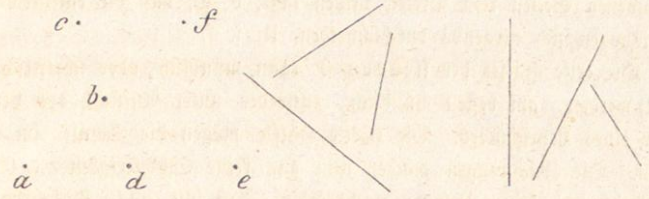
Die Uebung 1 wird von den Schülern nach der entsprechenden Lektion auf der Schiefertafel gelöst. Die Andeutungen zu den Drejecken zeichnen die Schüler bloß von Aug.

---

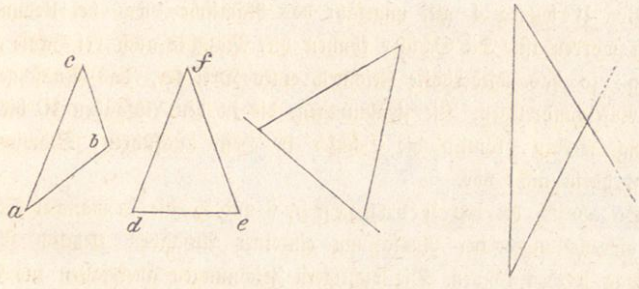
* Es ist auf dieser Stufe nicht nöthig, noch aus weiteren gegebenen Stücken das Dreieck zu konstruiren. Die drei betrachteten Fälle genügen vorderhand ganz.

** Also z. B. in einer Lektion die vorigen Theile A, B, C aus Nr. 1 vereinigen, oder nur A und B, oder nur A allein nehmen ꝛc.

Wenn sie z. B. gezeichnet haben:



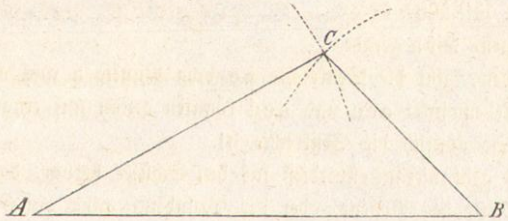
so machen sie hieraus nach Anleitung der Aufgaben 5 und 6 die Dreiecke:



U. s. f.

Die Uebung 2 soll für die Schüler hauptsächlich ein Leitfaden sein zur Repetition der Dreieckskonstruktion (mittelst des Zirkels aus 3 Seiten zum Dreieck). Ein vorgerückterer Schüler kann statt des Lehrers diese Repetition auch mündlich mit der Klasse vornehmen. Alsdann übergeht er bloß die Zeichnungsaufgaben 4, 9, 12. Die Antworten können indessen durch die Schüler auch auf die Tafel geschrieben werden.

Die Aufgabe 4 zeichnen die Schüler mittelst des Zirkels ins Heft. Sie erhalten:



und schreiben darunter: Grundlinie AB = 2″

Seite BC = 1″

Seite AC = 1″ 5‴

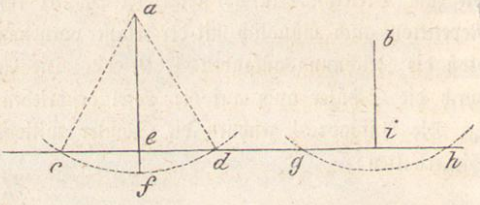
die kleinern Seiten zusammen = 2″ 5‴ > 2″.

Bei Aufgabe 9 werden die Schüler finden, daß sich aus den angenommenen Seiten kein Dreieck bilden läßt, d. h., daß die entsprechenden Kreisbogen sich nirgends durchschneiden. U. s. f.

Die erste Hälfte der Uebung 3 kann mündlich oder schriftlich gelöst werden, am besten mündlich, entweder unter Aufsicht des Lehrers oder eines Lehrschülers. Die zweite Hälfte mögen die Schüler im Hefte lösen. Die Zeichnungen machen nun gar keine Schwierigkeiten. Es ist natürlich bei keiner Uebung nothwendig, daß just alle Aufgaben gelöst werden.

Von Uebung 4 gilt ungefähr das Nämliche, was bei Uebung 2 gesagt worden ist. Die Schüler können hier Manches auch bei Hause ausführen: so das wiederholte Zeichnen eines Dreiecks, das Ausschneiden und Aufeinanderlegen. Die Zeichnungen, die in den Aufgaben 10 bis 14 verlangt werden, können die Schüler im Hefte ausführen; Schwieriges kommt darin nicht vor.

So ähnlich bei den Uebungen 5, 6 und 7, die in mancher Schule mit abwechslungsweiser Auslassung einzelner Aufgaben ziemlich schnell abgethan werden können. Die wichtigern Zeichnungen aber fallen ins Aufgabenheft, z. B. Uebung 6, Aufgabe 5: „Nehmt außerhalb einer geraden Linie verschiedene Punkte an und errichtet so von einem jeden aus eine Senkrechte auf die Gerade." Die Schüler zeichnen:



und schreiben etwa dazu: Vom Punkte a aus ist der Zirkel unter die Grundlinie geöffnet und dann der Bogen cd gezogen worden. Die Mitte f dieses Bogens mit a gerade verbunden, gibt die Senkrechte ae vom Punkte a aus auf die Gerade. (Die Nebenwinkel aec und aed könnten genau auf einander gelegt werden.) So ähnlich die Senkrechte bi.

Es geht hieraus überdieß für den Schüler hervor, daß, weil es nur eine Mitte des Bogens oder der Grundlinie gibt, auch nur ein Perpendikel vom Punkte auf die Linie möglich ist.

Ueber die Uebungen 8 und 9 sind nun kaum weitere Bemerkungen nöthig.

Die nach dieser Abtheilung zusammengestellten Sätze sollen natürlich

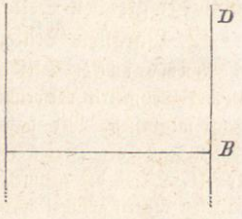
wie die frühern und nachfolgenden nicht mechanisch auswendig gelernt werden. Die Schüler müssen dieselben durch die Erfahrungen, die sie beim Konstruiren gemacht haben, nunmehr thatsächlich kennen und verstehen und müssen nun schon eine ziemlich ordentliche Fertigkeit in der Handhabung des Zirkels bei den einfachsten geometrischen Konstruktionen erworben haben.

§ 17.

Die Parallelen als ein Gränzfall des Dreiecks. Winkelsumme im Dreieck. Anwendung auf regelmäßige und unregelmäßige Vier- und Vielecke.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

A. 1. Wenn man aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, von denen jeder gleich einem rechten Winkel wäre, ein Dreieck bilden wollte, so würde man finden, daß die beiden Seitenlinien nie zusammenträfen.

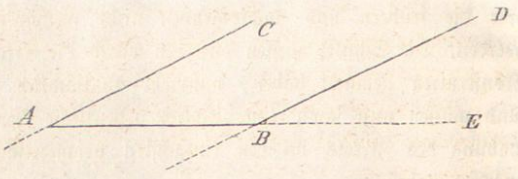


Bilden z. B. CA und DB rechte Winkel mit der Grundlinie AB, so ist es unmöglich, daß AC und BD bei beliebiger Verlängerung mit einander zusammentreffen können; denn würde dieß geschehen, so gäbe es von einem Punkte zwei Senkrechte auf eine Gerade (siehe vorige Seite).

Ueberdieß kann man, um die Sache frisch einzusehen, das Flächenstück zwischen CABD um AB auf das unter AB liegende herablegen (der Lehrer veranschauliche dieß durch ein Stück steifes Papier), man sieht alsdann, daß die obern Senkrechten in den untern fortlaufen müssen, und daß also, wenn die einen zusammentreffen, dieß auch mit den andern geschehen muß. Allein wenn das herabgelegte Stück wieder hinaufgelegt wird, so hätte man zwei gerade Linien (CA und DB), die sich in ihrer Verlängerung über AB und unter AB durchschneiden, was unmöglich ist, da zwei Gerade sich nur in einem Punkte begegnen können.

2. Wenn ferner die Winkel an der Grundlinie verschieden wären, zusammen aber doch gerade 2 Rechte betragen würden, so z. B. wie zwei Nebenwinkel, dann könnten die Seitenlinien ebenfalls nie zusammentreffen und es würde sich so wieder kein Dreieck bilden. Man hätte z. B.

Der Lehrer kann wieder durch Herablegung des oberen Stücks CABD (aber umgekehrt) auf das untere zeigen, daß wenn



die Linien über AB zusammenträfen, dieß auch bei den untern geschehen müßte, wodurch sich dann wieder ergibt, daß auch in diesem Falle die Geraden (AC und BD) sich bei beliebiger Verlängerung nicht durchschneiden können.

Solche Linien nennt man parallele Linien.

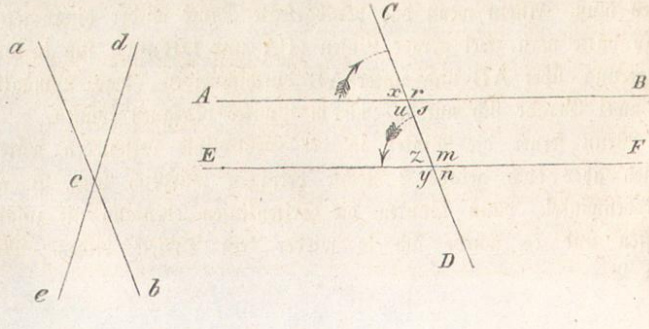
In beiden Fällen bilden die zwei Geraden mit der dritten nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel; es ist z. B. der Winkel CAB gleich dem Winkel DBE, weil jeder mit dem dritten Winkel ABD zwei Rechte ausmacht. Man kann daher sagen:

1. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene mit einer dritten geraden nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel bilden, so sind sie parallel.

2. Parallele Linien können sich nirgends durchschneiden.

Anmerkung. Diejenigen Lehrer, welche etwas wenig Zeit für Lektionen in der Geometrie verwenden können, mögen die vorausgegangene Lektion auch ganz weglassen. Wir haben sie vorangeschickt, um zu zeigen, daß man beim letzten Falle der Dreieckskonstruktion (s. Seite 146, oder Uebung 9, Seite 10 des II. Heftes der geometrischen Aufgabensammlung) naturgemäß auf die parallelen Linien geführt wird und daß also die hierauf folgende Behandlung ganz am Platze ist.

B. Auf die gleichen Ergebnisse wird man geführt, wenn man von dem Grundsatze ausgeht, daß eine gerade Linie, die um einen Punkt vorwärts und darauf wieder gleich stark rückwärts gedreht wird, wieder die nämliche Richtung hat wie im Anfang.



Der Lehrer weist dieß mit einem geeigneten Stäbchen oder einem schmalen Lineal nach, das er z. B. in der Richtung von ab um c nach ed und dann wieder gleich viel rückwärts nach ab dreht.

Wird AB um x nach CD gedreht, hierauf um z wieder gleich viel rückwärts, so kommt die Linie (veranschaulicht durch das Lineal) nach EF und muß wieder die gleiche Richtung haben wie im Anfang. (Die Schüler begreifen dieß leicht, wenn der Lehrer ein Stäbchen wie EF, befestigt an einem zweiten wie CD, längs der Linie CD bis nach AB hinaufzieht, wo dann beide Richtungen EF und AB wegen der gleichen Winkel bei x und z wieder zusammenfallen müssen.)

Hieraus folgen aber die ganz gleichen Resultate wie oben bei A. Man hat zunächst:

1. Die Linien AB und EF, die mit der dritten CD nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel x und y bilden, sind parallel.

2. Solche parallele Linien können sich nirgends durchschneiden.

3. Folgende Winkelpaare an Parallellinien sind gleich:

$x = z$, daher $u = y$, $r = m$, $s = n$. Warum? — Die Schüler werden sehr leicht den Grund finden.

Ferner: $x = n$, $r = y$, $u = m$, $z = s$.

Ist eben so leicht aus dem vorigen zu finden.

Die ersten Winkelpaare heißt man gleichliegende (korrespondirende) Winkel, die zweiten Wechselwinkel.

4. Jedes der folgenden Winkelpaare bildet Gegenwinkel, die Summe von je zwei Gegenwinkeln ist so groß wie die zweier Nebenwinkel, also = 2 Rechten,

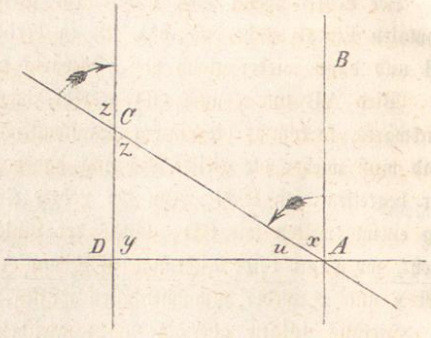
nämlich: $u + z = 2\,R$; $s + m = 2\,R$; $r + n = 2\,R$; $x + y = 2\,R$.

Wie läßt sich das leicht erklären?

Hierauf lehrt der Lehrer in ein paar Beispielen das Zeichnen von Parallellinien mit Hülfe des Zirkels oder des verschiebbaren rechtwinkligen Dreiecks (Equerre). Siehe die entsprechenden Uebungen der Aufgabensammlung.

C. Anwendung der Parallelen zu Bestimmung der Summe der Winkel eines Dreiecks.

1. Wenn man AB senkrecht auf AD zieht, alsdann AB um den Winkel x vorwärts nach AC und hier wieder um den Winkel z = x nach CD dreht, so muß (wie oben) CD wieder die gleiche Richtung haben wie AB, also der Winkel CDA oder y ein Rechter sein wie DAB oder u + x.



Wie groß sind also y + u + x? — Antwort 2 R.

Also, da z so groß gemacht wurde wie x, so ist auch

u + y + z = 2 R.

Das Dreieck CDA heißt ein rechtwinkliges, weil es einen rechten Winkel (y) enthält, DC und AD heißen die Katheten, AC die Hypotenuse.

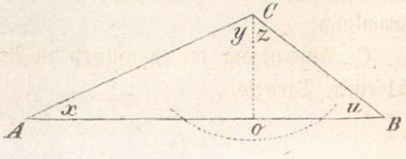
Wie groß sind die beiden Winkel (u und z) an der Hypotenuse zusammen? — Antwort: Gerade 1 R.

Das kann bei jedem rechtwinkligen Dreieck so gezeigt werden. Der Lehrer läßt das an ein paar andern Beispielen durch einzelne Schüler wiederholen. Die verschiedenen Drehungen versinnlichen sie mittelst eines schmalen Lineals.

Also mit dieser Entstehung des rechtwinkligen Dreiecks ist die Eigenschaft nothwendig verknüpft, daß die zwei Winkel an der schiefen Seite oder der Hypotenuse zusammen 1 R. ausmachen. Was der rechte Winkel DAB bei der Drehung von BA gegen AC verliert, setzt sich als gleich großer Winkel (z) bei C an.

2. Wie groß sind nun die Winkel in einem beliebigen Dreieck zusammen?

Es läßt sich dieß leicht finden, da jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Dieß geschieht am besten, wenn man auf die größte Seite vom gegenüber stehenden Eckpunkt aus eine Senkrechte zieht. Es sei z. B. das Dreieck ABC vorgelegt:

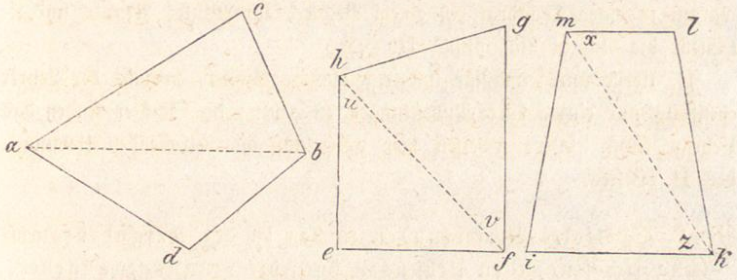


Wie vom Punkt C aus eine Senkrechte auf AB gezogen werden kann, haben die Schüler in den vorausgegangenen Uebungen erlernt.

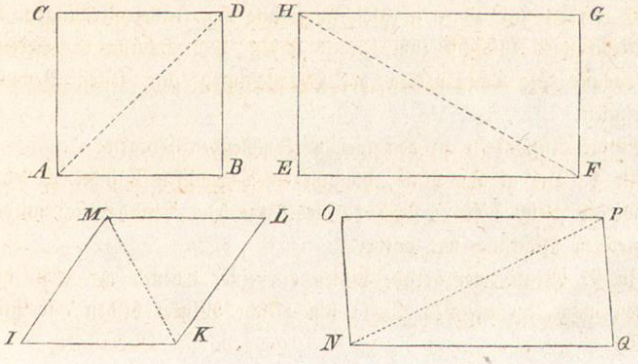
Sie wissen aber auch, daß die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen 1 R ausmachen. Also haben sie $x + y = 1R$ und $z + u = 1R$, daher alle 4 Winkel zusammen $= 2$ R, und da y und z zusammen einen Dreieckswinkel bilden, so sind alle drei Winkel des Dreiecks zusammen 2 R.

Hierauf einige Erläuterungen und Fragen über stumpfwinklige und spitzwinklige, über gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke ꝛc.

D. In Hinsicht auf die Konstruktion von Vierecken hat der Lehrer den Schülern bloß einige Winke zu ertheilen. Die Schüler setzen die Vierecke aus Dreiecken zusammen und leiten aus den ihnen nunmehr bekannten Eigenschaften der letztern, diejenigen der erstern ab. Es werden besonders betrachtet: das unregelmäßige Viereck und das Trapez:



Dann die Parallelogramme: nämlich das Quadrat, das Rechteck, die Raute, die längliche Raute.



Das unregelmäßige Viereck wird gezeichnet, indem an eine Seite eines beliebigen Dreiecks (wie abc) ein von diesem ganz verschiedenes Dreieck (wie abd) gefügt wird.

Wird an ein Dreieck wie efh oder ikm ein zweites so gezeichnet, daß an der gemeinschaftlichen Seite (Diagonale) zwei gleiche Wechselwinkel u = v oder z = x entstehen, so bilden die beiden Dreiecke zusammen ein Trapez.

Das Quadrat entsteht, indem an die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks ABD ein gleiches Dreieck ACD angefügt wird.

So ähnlich das Rechteck EFGH, die Raute IKLM, und die längliche Raute NOPQ.

Die Schüler finden leicht, wie groß die Summe der Winkel in einem Viereck ist; wie viele Diagonalen in einem solchen gezogen werden können; wie sich in einem Parallelogramm je zwei gegenüberstehende Seiten, je zwei kreuzweise gegenüberstehende Winkel zu einander verhalten müssen; warum in einem Quadrat, in einem Rechteck alle Winkel Rechte sind ꝛc. (Siehe die Aufgabensammlung II. Heft.)

E. Ueber unregelmäßige und regelmäßige Vielecke braucht der Lehrer ebenfalls nur einige kurze Andeutungen zu geben; die Schüler finden das Uebrige selbst. Wir verweisen hier ganz auf die betreffenden Uebungen des II. Heftes.

Nr. 2. Spezielle Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorausgegangene Abtheilung.

Die Uebung 10 kann zur mündlichen oder schriftlichen Repetition benutzt werden und zwar in gleichem Sinne wie frühere Uebungen. Diese Repetition wird zunächst zum Zwecke haben, dem Schüler die Herleitung und sodann die Konstruktion der Parallellinien zum festen Bewußtsein zu bringen.

Einige Antworten zu den hier vorkommenden Fragen:

Zu 1. Die gerade Linie, die um einen gewissen Winkel vorwärts und wieder gleich viel rückwärts gedreht wird, befindet sich wieder in der gleichen Richtung wie vorher.

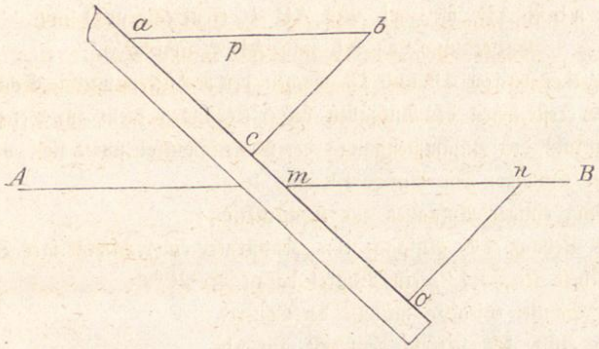
Zu 2. Wenn zwei gerade Linien (in einer Ebene) mit einer dritten geraden nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel bilden, so sind sie parallel.

Zu 4, 5 und 6. Wenn jeder der zwei gleichliegenden Winkel x und $z = 70^0$ ist, so sind die Winkel DzF und DxB ebenfalls $= 70^0$. Jeder ihrer Nebenwinkel macht 110^0. Also sind die Winkel CxB und CzF, AxD und EzD einander gleich, weil jeder $= 110^0$. U. s. f.

In Uebung 11 sind besonders diejenigen Aufgaben fest einzuüben, die sich auf das Ziehen von Parallellinien mittelst des verschiebbaren Dreiecks beziehen.

Z. B. Aufgabe 12.

„Durch einen Punkt außer einer Geraden eine Parallele mit derselben zu ziehen."



Der Schüler legt das verschiebbare Dreieck mno (das im Nothfall auch bloß aus steifem Papier geschnitten werden kann*) an die Gerade AB an und hält das Lineal ao an die Seite von mo fest, worauf das Dreieck längs dem Lineal aufwärts geschoben wird, bis die aufwärtsrückende mit AB parallele Seite durch den gegebenen Punkt p geht. Hier wird durch apb die verlangte Parallele gezogen. Der Schüler kann die Richtung des Lineals amo punktiren und unter die Figur schreiben:

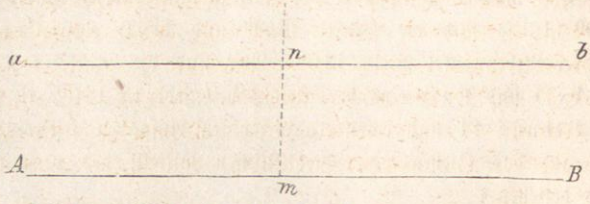
apb || (parallel mit) AB

weil $\sphericalangle$ bam $=\sphericalangle$ Bmo gemacht wurde.

Aufgabe 14. „Zu einer Geraden eine Parallele in 5‴ Entfernung zu ziehen.

---

* Die Schüler sollen im Stande sein, mittelst des Zirkels einen rechten Winkel, daher auch ein rechtwinkliges Dreieck genau zu zeichnen.



Der Schüler verschiebt das rechtwinklige Dreieck von AB an so, daß er zunächst die Senkrechte nm und hierauf nach Abtragung von mn = $^1/_2$″ oder 5‴ durch n die Parallele ab ziehen kann. Unter die Zeichnung kann er schreiben:

ab ∥ AB, weil ab und AB ⊥ (senkrecht auf) mn.

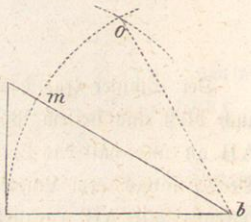
Entfernung von ab und AB = mn = 5‴

Die Uebungen 12 und 13 machen den Schülern wenige Schwierigkeit. Der erste Theil der Aufgaben beider Uebungen dient zur Befestigung der Kenntniß des Zusammenhangs der Dreieckswinkel unter sich, namentlich ihrer Summe. Die Antworten sind leicht.

Lösung einiger Aufgaben zur Konstruktion:

Aus Uebung 12, Aufgabe 8: „Konstruirt ein rechtwinkliges Dreieck, eine Kathete sei = 1″, ein Winkel daran = 30°".

Der Schüler wird ac mittelst der Equerre oder mit Hülfe des Zirkels senkrecht auf ab errichten. Der Durchschnittspunkt o wird erhalten, indem ao = ab = bo genommen wird; deßwegen mißt abo = 60° als Winkel in einem gleichseitigen Dreieck abo.* Nimmt man nun m als Mitte des Bogens ao, so ist ∢ abc = 30°, daher ∢ acb = 60°. Der Schüler kann unter die Zeichnung kurz bemerken:



ab = 1″.

ao = ab = bo, daher ∢ abo = 60°.

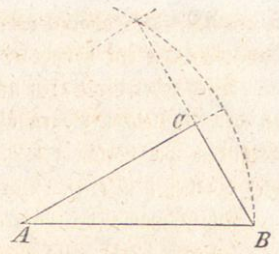
am = mo, daher ∢ abm = 30°.

ca ⊥ ab, daher noch ∢ acb = 60°.

---

* Wäre das gleichseitige Dreieck in der vorangegangenen Lektion nicht schon betrachtet worden, so würde der Schüler den Winkel abc = 30° mit Hülfe des Transporteurs abtragen.

Aus Uebung 13, Aufgabe 17. „Zeichnet an die Endpunkte und über einer Seite AB einen Winkel von 60° und einen Winkel von 30°, welche Lage haben dann die beiden letzten Seiten zu einander?"



$\sphericalangle$ ABC = 60°; $\sphericalangle$ CAB = 30°;
daher $\sphericalangle$ ACB = 90°, also CB $\perp$ AC.

Die Aufgaben in den Uebungen 14 bis 18 über Vierecke und Vielecke sind leicht ausführbar. Zu wünschen ist vorzüglich, daß die Schüler die Parallelogramme und die einfachern regelmäßigen Vielecke geschickt und genau zeichnen lernen. In mechanischer Beziehung soll hier der Schüler allmälig zur fertigen Handhabung von Zirkel und Equerre gelangen.

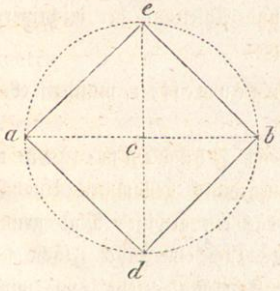
Als Beispiele mögen hier bloß ein paar Aufgaben aus der letzten Uebung (18) gelöst werden.

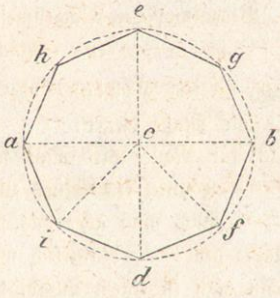
Aufgabe 4. „Ziehet einen Kreis und konstruirt in denselben das regelmäßige Viereck".

Aufgabe 5. „Wie läßt sich dann leicht in den gleichen Kreis das regelmäßige Achteck zeichnen?"

Aufgabe 8. Konstruirt in einen Kreis, dessen Halbmesser = 4‴ ist, ein regelmäßiges Sechseck. Wie groß ist der ganze Umfang desselben (alle Seiten zusammen)? Wie groß ist mindestens diese Kreislinie?

Lösung zu 4 und 5.





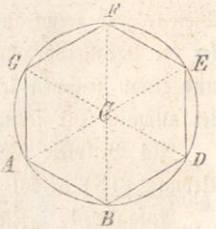
Wenn man ed $\perp$ ab zieht, so sind die 4 Bogen ae, eb, bd und ad einander gleich, also auch die 4 Seiten ae, eb, bd und ad; aber aus dem gleichen Grunde sind auch die 4 Winkel um c einander gleich, also Rechte. In jedem der gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke wie acd ist ein Winkel an der Hypotenuse = 45°, also zwei solche z. B.

$a = 90^0$, also auch $d = 90^0$ und $b = 90^0$ und $e = 90^0$. Es ist daher a d b e ein Quadrat.

Wird jeder der Bogen ad, db, be und ae noch halbirt, so bekommt man zu den 8 gleichen Bogen auch 8 gleiche Seiten und es sind aus ähnlichen Gründen wie vorhin die 2 Winkel bei i so groß wie die 2 Winkel bei d, wie die bei f u. s. w. Darum ist a i d f b g e h ein regelmäßiges Achteck.

Die Summe der Winkel des regelmäßigen Achtecks macht $8 \cdot 2\,R - 4\,R = 12\,R$, also ist einer der 8 gleichen Winkel $^{12}/_{8}\,R = 135^0$.

Lösung zu 8.



Da sich um C herum 6 gleiche gleichseitige Dreiecke aneinander zeichnen lassen, weil ein Winkel eines solchen Dreiecks $= 60^0$ ist; so sieht man, daß die Kreislinie, deren Halbmesser eine solche Seite ist, denselben auch 6mal als Sehne einschließt. Es ist nämlich $AB = BD = DE = EF = FG = GA =$ dem Halbmesser. Die Kreislinie ist also mindestens 6 mal so groß als der Halbmesser. Da derselbe hier $= 4'''$ ist, so mißt die Kreislinie jedenfalls mehr als $4 \cdot 6'''$. Der Umfang des Sechsecks ist aber gerade $= 4 \cdot 6'''$ oder $24'''$.

§ 18.

Einleitung zum Flächenmessen: Flächenmaße.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

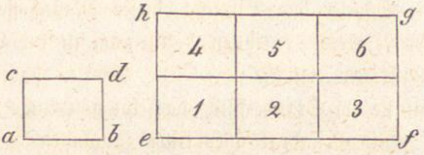
A. Bedeutung des Flächenmessens und Ableitung der wichtigern Flächenmaße.

Lehrer: Beim Linien- oder Längenmessen mußten ebenfalls Linien als Maße dienen.

Was für Maße wird man nun beim Flächenmessen nöthig haben? — Könnte ein Stück Linie mehrmals genommen eine Fläche geben? — Was muß aber das sein, das ein gewisses Mal genommen eine Fläche gibt? — Natürlich muß das auch ein Stück Fläche sein.

Wenn man in einem Quadrat eine Diagonale zieht, wie wird dadurch das Quadrat getheilt? — Wie manchmal ist also eines dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke im Quadrat enthalten? — Richtig, 2 Mal. Würde man aber die Mitte einer Seite mit der Mitte der gegenüberstehenden Seite des Quadrates verbinden, wie würde dann das Quadrat getheilt? — Also wäre eines dieser gleichen Rechtecke im Quadrate auch 2 Mal enthalten.

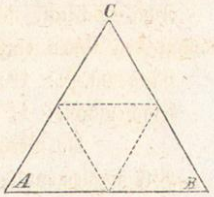
Das eine Mal hätte man also das Quadrat durch ein Dreieck, das andere Mal durch ein Rechteck gemessen. Wir wollen nun zwei Rechtecke mit einander vergleichen, das eine sei zweimal so breit und dreimal so lang als das andere; wie manchmal wird das letztere im erstern enthalten sein? (Zunächst Erklärung von Länge und Breite eines Rechtecks.)



Denkt man sich das Rechteck **abcd** von **e** an über **ef** angelegt oder angezeichnet und dann so fortgefahren, wie 2, 3, 4, 5 und 6 andeuten (der Lehrer mag das Anlegen wirklich veranschaulichen) so sieht man durch einfaches Abzählen, daß das Rechteck **abcd** im Rechteck **efgh** sechsmal liegt. Hier hat man also ein Rechteck durch ein Rechteck gemessen. Ihr könnt nun selbst solche Eintheilungen, Vergleichungen und Messungen verschieden geformter Figuren vornehmen.

Beim Messen der Längen hatte man sich nur über die Größe des Maßes zu entscheiden, denn die Länge, als gerade Linie gedacht, hat nur eine Form. Hier ist aber außer der Größe noch die Form des Flächenmaßes auszumachen. Es ist die Frage: Soll das Maß ein Drei- oder Viereck ꝛc. und zwar was für eines sein?

Weil nun rechteckige Figuren fast am häufigsten und gewöhnlichsten bei Flächenbestimmungen vorkommen, so hat man das Quadrat als Form des Flächenmaßes festgesetzt. — Bei mancher Figur wäre zwar ein anders geformtes Maß geeigneter. Z. B. ließe sich das gleichseitige Dreieck, das regelmäßige Sechseck am besten wieder durch ein gleichseitiges Dreieck ausmessen. Hätte man etwa ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Seite = 2″ ist, so ließe sich dasselbe am leichtesten wieder durch ein gleichseitiges Dreieck, z. B. durch ein solches von 1″ Seite messen. Man sieht, ABC wäre gleich 4 solchen Dreiecken von 1″ Seite. — Wie manchmal würde im regelmäßigen Sechseck ein gleichseitiges Dreieck enthalten sein, dessen Seite gleich der des Sechsecks wäre?



Dessenungeachtet hat das quadratförmige Maß sowohl bei der Messung als bei der Rechnung, wie ihr bald sehen werdet, seine entschiedenen Vorzüge.

Unsere Flächenmaße haben zur Grundlage die gesetzlichen Längenmaße. Zu jedem Längenmaße kann nämlich ein Quadrat als Flächenmaß gebildet werden.

Errichtet man über einer geraden Linie von 1′ Länge ein Quadrat, so stellt dasselbe einen Quadratfuß (1 □′) dar. (Der Lehrer führt schnell an der Wandtafel die Konstruktion dieses Quadrates aus, damit die Schüler die Bildung dieses Maßes sich fest einprägen. Die gleiche Größe weist er ihnen dann auch in der Quadratfläche einer Platte des künstlichen Kubus vor. Die Schüler haben dieses Maß so aufzufassen, daß sie im Stande sind, dasselbe von Auge annähernd richtig darzustellen.)

Ein Quadrat über einer zolllangen Seite gibt einen Quadratzoll (1 □″). (Darstellung und Auffassung desselben wie vorhin.)

Was hat man sich nun unter einer Quadratlinie (1 □‴) zu denken? — Bezeichnet schnell auf euern Tafeln die Größe dieses Maßes von Auge. Wie wäre dieses Maß genau darzustellen?

Was wird endlich eine Quadratelle sein? — Was ein Quadratklafter, eine Quadratruthe? (Veranschaulichung derselben an der Wand oder auf dem Zimmerboden.)

Was wäre eine Quadratstunde, eine Quadratmeile?*

Besonders zu merken ist noch die Juchart als die Größe eines Quadrats über einer 200′ langen Seite.

Ihr habt hieraus gesehen, daß zu jedem Längenmaß ein Quadrat als Flächenmaß gebildet werden kann; nun muß man sich aber hüten, Längenmaße und Flächenmaße mit einander zu verwechseln. Kann man sagen: Die Vorderfläche der Wandtafel hält oder mißt 12 Fuße? — Die Länge der Bank beträgt 12 □Fuße? — Wie müßte man richtig sagen?

Zum Schlusse schreiben wir noch die gewöhnlichsten Quadratmaße sammt den ihnen entsprechenden Längenmaßen auf:

Längenmaße: 1^0; 1′; 1″; 1‴; 1 Elle; 1 Klafter ꝛc.

Flächenmaße: $1\square^0$; 1□′; 1□″; 1□‴; 1□Elle; 1□Klftr. ꝛc.

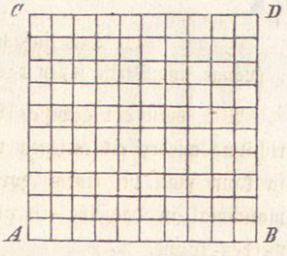
B. Verhältnisse der Quadratmaße zu einander.

Wir wollen nun die angeführten Flächenmaße ihrer Größe nach mit einander vergleichen. (Der Lehrer zeichnet am besten den Quadratfuß noch

---

* Die Meile = $1/15$ des Grades vom Aequator = $7420{,}_{44}$ Metres = 24735 Schweizerfuß (genauer = $24734{,}_{8}$ Schweizerfuß).

einmal an die Wandtafel und zwar in wirklicher Größe, zieht aber die Querlinien noch nicht.)



Ueber AB = 1′ oder 10″ kann man gerade 10 □″ anlegen oder anzeichnen; die bilden zusammen einen rechteckigen 10″ langen und 1″ breiten Streifen. Wie viele solche Streifen kann man jetzt über diesem noch anbringen, bis der ganze Quadratfuß ausgefüllt ist? — Gut, also ins ganze Quadrat gehen 10 Streifen, von denen jeder 10 □″ hält; wie viel halten daher alle 10 Streifen oder der ganze Quadratfuß? — So, der Quadratfuß enthält also 100 □″. Das sieht man auch gut auf dieser Platte unsers Kubus. (Vorweisung.)

Wie der Quadratfuß, so kann ganz ähnlich auch der Quadratzoll eingetheilt werden und man erhält auf ähnliche Art: 1 □″ = 100 □‴.

Und eben so würden in größerem Umfang folgen: 1 □⁰ = 100 □′.

Wenn also ein Längenmaß aus 10 Längentheilen besteht, so hat das zugehörige Quadratmaß 10 mal 10 oder 100 entsprechende Quadrattheile.

Die Seite eines Quadratklafters mißt 6′. Wie viele Quadratfuß hätten also über dieser Seite zunächst in einer Reihe Platz? — Und in wie viele solche Reihen könnte das ganze Quadratklafter eingetheilt werden?

Daher hält ein Quadratklafter 6 mal 6 □′ oder 36 □′.

In gleicher Weise würde folgen: 1 □Elle = 2 . 2 □′ = 4 □′, 1 □Stab = 16 □′.

Eine Quadratjuchart = 200 . 200 □′ = 40000 □′.

Wie würde man die Größe einer Quadratstunde in □′ finden? ꝛc.

Man hat demnach allgemein:

Wenn ein Längenmaß irgend eine Anzahl Längentheile enthält, so hat das entsprechende Quadratmaß diese Zahl mal die Zahl Quadrattheile.

Zusammenstellung:

1 □⁰ = 100 □′;

1 □′ = 100 □″,

1 □″ = 100 □‴;

1 □Klafter = 36 □′; 1 □Elle = 4 □′;

1 Quadratjuchart = 40000 □′.

Hierauf folgen geeignete Rechnungsbeispiele über diese Maße (siehe Aufgabensammlung Heft II, Uebung 22).

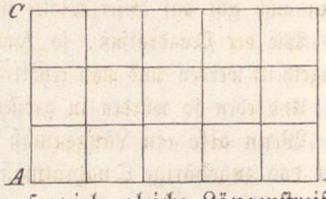
C. Die einfachste Ausmessung des Rechtecks.

(Länge und Breite sollen das Längenmaß eine ganze Zahl mal enthalten.)

Wie man ein gewisses Quadratmaß nach der Längen- und Breitenrichtung wiederholt anlegen und so verschiedenartige Rechtecke bilden kann, so kann man bei einem vorgelegten Rechteck umgekehrt untersuchen, wie manchmal in dasselbe ein gewisses Quadratmaß in gleicher Weise gelegt werden könne.

Dieß geht ohne alle Schwierigkeit, sobald in Länge und Breite des vorgelegten Rechtecks das entsprechende Längenmaß eine ganze Zahl mal liegt.

Wenn die Länge AB des vorgelegten Rechtecks 5″, die Breite AC 3″ mißt, so hält der erste zollbreite Streifen über AB 5 □″, das ganze Rechteck aber 3 solche Streifen, folglich 3 . 5 □″ oder 15 □″.



Ein Rechteck läßt sich immer in so viele gleiche Längenstreifen theilen, als die Maßzahl der Breite angibt und jeder Streifen hält so viele Quadratmaße als die Maßzahl der Länge bezeichnet, woraus durch einfache Schlußrechnung der Inhalt des ganzen Rechtecks folgt.

Kennt man den Inhalt des Rechtecks und die Zahl der Maßtheile einer Seite desselben, so kann man, um die Größe der anstoßenden Seite zu finden, das ganze Rechteck in so viele gleiche Streifen zerlegen, als jene erstere Seite Maßtheile hat; daraus ist leicht der Inhalt eines Streifens zu finden. So viele Quadrattheile dann dieser Streifen enthält, so viele Längentheile mißt die gesuchte Seite des Rechtecks.

Ist z. B. bei obigem Rechteck der Inhalt = 15 □″, die Länge = 5″, so kann das Rechteck in 5 gleiche Breitenstreifen zerlegt werden; auf einen fallen dann 3 □″, also ist dieser Streifen 3″ breit und somit auch das ganze Rechteck.

Oder: So manchmal der Längenstreifen von 5 □″ im Rechteck über einander gelegt werden kann, d. h. so manchmal 5 □″ in 15 □″ enthalten sind, so viele Zoll mißt die Breite des Rechtecks.

Man erkennt hieraus leicht folgende etwas allgemeinern Ergebnisse

(natürlich muß der Lehrer noch durch ein paar anschauliche Beispiele darauf überleiten):

a. Ein Rechteck, dessen Länge und Breite das Längenmaß eine ganze Zahl mal enthalten, enthält das entsprechende Quadratmaß so manchmal, als die Anzahl Maßtheile der Länge mal die der Breite angibt. (Kurz: der Inhalt ist gleich der Länge mal der Breite.)

b. Eine Seite eines solchen Rechtecks enthält so viele Maßtheile, als in der Anzahl Quadrattheile des Rechtecks diejenige der Maßtheile der andern Seite liegt. (Oder kurz in bildlichen Worten: Eine Seite des Rechtecks ist gleich dem Inhalt dividirt durch die anstoßende Seite.)

Endlich mag noch am Platze sein, einzelne einfache Bruchtheile von Quadratmaßen ꝛc. zu bilden, z. B. $\frac{1}{2}\square'$, $\frac{1}{3}\square'$, $\frac{1}{4}\square'$ u. s. f.

Wie ein Rechteck in 3 gleiche Theile getheilt werden kann, hat der Schüler schon im Eingange zum Flächenmessen gelernt, also wird er auch leicht z. B. den $\square''$ in drei gleiche Theile theilen können, wodurch er in einem derselben $\frac{1}{3}\square''$ erhält. Wie er sodann durch Zusammensetzung $\frac{2}{3}\square''$, $\frac{5}{3}\square''$ ꝛc. bilden kann, leuchtet ein.

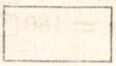
Zu Repetitionen und Examinatorien bietet die Aufgabensammlung hinreichenden Stoff. Wie hiezu mitunter auch einer der geschicktesten ältern Schüler verwendet werden kann, haben wir schon angedeutet.

Nr. 2. Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorausgegangene Abtheilung.

Die Uebungen 19 und 20 bieten dem Schüler zweckmäßigen Stoff zu den Anfängen der Theilung, Größenvergleichung und Messung von Flächenstücken. Die Lösung der einzelnen Aufgaben fällt dem Schüler hier nicht schwer, da er die hiezu nöthigen einfachen Konstruktionen bereits fertig ausführen kann.

Beispiele: Uebung 20, Aufgabe 3. „Zeichnet zwei Rechtecke, die Länge sowohl als die Breite des einen seien doppelt so groß als diejenigen des andern, wie manchmal so groß ist das erste als das zweite?"

Die Schüler zeichnen in ihrem Aufgabenhefte:



und schreiben etwa dazu: Jede Seite des größern Rechtecks ist

das Doppelte von der entsprechenden Seite des kleinern. Verbindet man beim größern Rechtecke die Mitten von je zwei gegenüberstehenden Seiten durch gerade Linien, so wird dasselbe in 4 Rechtecke getheilt, von denen jedes gleich dem ersten Rechtecke ist. Also ist das zweite Rechteck 4 mal so groß als das erste.

Aufgabe 8. „Von zwei Rechtecken, die gleich lang sind, ist das eine 8′, das andere 1′ 6″ breit; wie verhalten sie sich? — Wenn aber das eine 126′ und das andere 18′ lang wäre, wie würden sie sich verhalten, wenn beide gleiche Breite hätten?"

Antwort: Von den beiden ersten ist das eine 5mal so groß als als das andere; von den beiden letzten ist das eine der 7te Theil vom andern.

Aufgabe 18. „Drei Brüder haben einen rechteckigen Acker von 480′ Länge und 80′ Breite, wie können sie ihn auf die einfachste Weise in 3 gleiche Theile theilen?"

Antwort: Sie theilen die Länge von 480′ in 3 gleiche Theile, dann ist einer derselben = 160′, die gegenüberstehende Seite wird eben so getheilt. Dann sind die Theilungspunkte 1 mit 1 und 2 mit 2 etwa durch gerade Furchen zu verbinden, wodurch 3 gleiche Rechtecke, jedes von 160′ Länge und 80′ Breite abgegränzt werden.

Die Uebung 21 dient bloß zur Wiederholung; die Schüler werden nach der Lektion des Lehrers die Antworten leicht finden.

Aus Uebung 22 mögen hier einige Rechnungsbeispiele folgen.

1. $1\,\square' = 100\,\square''$ und $1\,\square'' = 100\,\square'''$, also $1\,\square' = ?\,\square'''$

   Da $1\,\square'' = 100\,\square'''$ ist,

   so sind $100\,\square'' = 100 . 100\,\square''' = 10000\,\square'''$,

   also $1\,\square' = 10000\,\square'''$.

4. $1\,\square$ Elle $= ?\,\square'' = ?\,\square'''$

   Es ist $1\,\square$ Elle $= 4\,\square'$

   und $1\,\square' = 100\,\square''$,

   also $4\,\square' = 400\,\square''$

   $= 400 . 100\,\square''' = 40000\,\square'''$,

   oder $1\,\square$ Elle $= 400\,\square'' = 40000\,\square'''$.

6. Ebenso $1\,\square$ Klftr. $= 36\,\square' = 3600\,\square'' = 360000\,\square'''$.

7. Daher $5\,\square$ Klftr. $= 180\,\square' = 18000\,\square'' = 1800000\,\square'''$.

13. $1\,\square' = ?\,\square$ Klftr.; $7\,\square' = ?\,\square$ Klftr.
Es ist $1\,\square$ Klftr. $= 36\,\square'$,
also $1\,\square' = {}^{1}/_{36}\,\square$ Klftr.
und $7\,\square' = {}^{7}/_{36}\,\square$ Klftr.

16. $25987\,\square'' = ?\,\square^0 = ?\,\square$ Klftr.
$1\,\square'' = {}^{1}/_{100}\,\square' = {}^{1}/_{10000}\,\square^0$,
also $25987\,\square'' = {}^{25987}/_{10000}\,\square^0 = 2^{5987}/_{10000}\,\square^0$
oder $= 2\,\square^0,\ 59\,\square'\ 87\,\square''$.
Da ferner $1\,\square$ Klftr. $= 36\,\square' = 3600\,\square''$,
so ist $1\,\square'' = {}^{1}/_{3600}\,\square$ Klftr.
also $25987\,\square'' = {}^{25987}/_{3600}\,\square$ Klftr.
$= 7^{787}/_{3600}\,\square$ Klftr.
$= 7\,\square$ Klftr. $7\,\square'\ 87\,\square''$.

17. $12345\,\square''' = 1\,\square'\ 23\,\square''\ 45\,\square'''$.
$31240\,\square'' = 312\,\square'\ 40\,\square''$.

21. $1{}^{1}/_{4}\,\square$ Klftr. $= ?\,\square'$; $3{}^{1}/_{5}\,\square' = ?\,\square''$,
${}^{1}/_{4}\,\square$ Klftr. $= {}^{36}/_{4}\,\square' = 9\,\square'$,
also $1{}^{1}/_{4}\,\square$ Klftr. oder ${}^{5}/_{4}\,\square$ Klftr. $= 45\,\square'$,
Ferner ${}^{1}/_{5}\,\square' = {}^{100}/_{5}\,\square'' = 20\,\square''$
und $3{}^{1}/_{5}\,\square'$ oder ${}^{16}/_{5}\,\square' = 20 . 16\,\square'' = 320\,\square''$
oder kurz:

$$3\,\square' = 300\,\square''$$
$$\underline{{}^{1}/_{5}\,\square' = \ 20\,\square''}$$
also $3{}^{1}/_{5}\,\square' = 320\,\square''$

26.

$31\,\square^0$	$90\,\square'$	$26\,\square''$	$\times\ 49$
279	810	234	
124	360	104	
44	12		
$1563\,\square^0$	$22\,\square'$	$74\,\square''$.	

27. $120\,\square$ Klftr. : $2\,\square^0\ 40\,\square' = ?$
Es sind $120\,\square$ Klftr. $= 120 . 36\,\square' = 4320\,\square'$
und $2\,\square^0\ 40\,\square' = 240\,\square'$
also $120\,\square$ Klftr. : $2\,\square^0\ 40\,\square' = {}^{4320}/_{240}\,\square' = 18$.
In $120\,\square$ Klftrn. sind also $2\,\square^0\ 40\,\square'$ gerade 18 mal enthalten.

28. Ein Bauer hat 2 Aecker, der eine mißt $1{}^{1}/_{4}$ Juchart und der andere 1 Juchart und $9870\,\square'$. Von jedem Acker verkauft

er nun $^1/_5$ Juchart; wie viel bleibt ihm also im Ganzen noch übrig?

Lösung: 1 Juchart $= 200 . 200 \square' = 40000 \square'$

$^1/_5$ " $= \frac{40000}{5} \square' = 8000 \square'$

der erste Acker hält $1^1/_4$ Juchart $= 50000 \square'$

der zweite " " 1 Juch. $9870 \square' = 49870 \square'$

zusammen: $99870 \square'$

davon $^2/_5$ Juchart oder $16000 \square'$

bleiben im Ganzen: $83870 \square'$

Das sind: 2 Juchart und $3870 \square'$.

29. Ein Stück Land, welches 3 Juchart und $20700 \square'$ mißt, soll unter 4 Brüder gleich vertheilt werden, wie viele $\square'$ kommen auf einen?

Lösung: Es sind 3 Juch. $20700 \square' = 140700 \square'$;

ein Bruder bekommt den 4ten Theil, also:

$140700 \square' : 4 = 35175 \square'$.

Aus Uebung 23.

6. Die Vorderfläche einer Wandtafel ist 6′ lang und 4′ 5″ breit; wie viel $\square''$ Inhalt hat sie?

Lösung: 1. Ueber die Länge von 6′ gehen zunächst $6 \square'$.

Bei der Breite von 4′ hat man diesen Streifen 4 mal, also $24 \square'$.

Nun bleibt noch ein 6′ langer Streifen von $^1/_2$′ Breite, der hält 6 halbe $\square'$,

also hält die Fläche der Tafel zusammen $(24 + 3) \square' = 27 \square'$.

2. Ueber der Länge von 60″ paßt ein zollbreiter Streifen von $60 \square''$,

derselbe hat im Rechteck von 45″ Breite 45 mal Platz, also ist das Rechteck $= (60 . 45) \square'' = 2700 \square'' = 27 \square'$.

Oder 3. Ueber 1 Fuß Länge liegt ein Breitenstreifen von $4^1/_2 \square'$, also liegen über 6′ Länge $(4^1/_2 . 6) \square' = 27 \square'$. U. s. f.

8. Eine rechteckige Wand ist 30′ lang und 21′ hoch; wie viele $\square'$ Laden nöthig, um dieselbe damit zu decken?

Kurze Lösung: Der Inhalt des Rechtecks $= (30 . 21) \square' = 630 \square'$.

Also bedarf man $630 \square'$ Laden.

12. Eine 24′ breite Straße zieht sich durch eine rechteckige Wiese parallel mit der Länge derselben. Wie viele $\square'$ nimmt die Straße von der Wiese weg, wenn diese 97′ lang ist?

Lösung: Die Straße schneidet ein Rechteck aus von 24′ Breite und 97′ Länge.

Die Fläche dieses Rechtecks beträgt (97 . 24) □′ = 2382 □′.

Also werden von der Wiese 2328 □′ für die Straße gebraucht.

Aus Uebung 24.

7. Von einer Wiese, die 62′ breit ist, soll in der Breitenrichtung ein rechteckiges Stück abgeschnitten werden, das 9920 □′ hält; welche Länge muß man dem abzuschneidenden Stücke geben?

Lösung: Ueber 1 Fuß Länge hat im Rechteck ein Breitenstreifen von 62 □′ Platz.

So viele solche Streifen auf 9920 □′ gehen, so lang muß das Rechteck sein.

Darum der Dreisatz: 62 □′ = 1 Streifen.

9920 □′ = ?

Hieraus folgt: $9920\ \square' = \frac{9920}{62}$ Streifen = 160 Streifen.

Wenn 160 Breitenstreifen erforderlich sind, so wird das Rechteck 160′ lang.

8. Die Länge eines Ackers mißt 507′, die Breite desselben soll neu ausgemittelt werden, da die Marke, welche die Breite angeben sollte, nicht mehr aufgefunden wird. Man weiß aber, daß der ganze Acker 1 Juchart und 36050 □′ Flächeninhalt hat; wie läßt sich hieraus nun die Breite bestimmen?

Lösung: Der Acker hält 1 Juchart und 36050 □′ = 76050 □′.

Ein fußbreiter Längenstreifen hält 507 □′,

daher gehen ins ganze Rechteck (76050 : 507) Längenstreifen, dieß macht 150 solche Streifen.

Da jeder 1′ breit ist, so sind alle aneinander gereiht zusammen 150′ breit.

Die Breite muß also genau 150′ betragen.

Anmerkung: Natürlich können auch von diesen Aufgaben wie von den frühern beliebige, je nach Gutfinden des Lehrers, weggelassen werden. Dieß wird bei den einen Schulen mehr nöthig sein als bei andern. Indessen wird auch derjenige Lehrer, dem weniger Zeit für diesen Unterricht zu Gebote steht, gerne das eine Jahr die, das andere Jahr die andern Aufgaben lösen lassen. Auch wird er nicht ermangeln, den Schülern die geeigneten Aufgaben zur Lösung bei Hause zu bezeichnen.

III. Sechstes Schuljahr.

Vom zurückgelegten 11. bis 12. Altersjahre.

§ 19.

Aufgabe.

Ausmessung beliebiger Rechtecke, rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke (auch mit Voraussetzung einfacher gebrochener Maßzahlen). Ausmessung der aus beliebigen Dreiecken zusammengesetzten Vier- und Vielecke. Mannigfaltige leichtere Anwendungen hiezu. Anfänge in Vermessungen im Freien und Aufnahme und Zeichnung der leichtesten Grundplänchen.

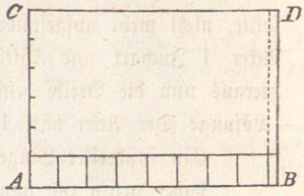
§ 20.

Ausmessung beliebiger Rechtecke, rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke. (Mit Zuziehung ganz einfacher Brüche.)

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

A. Ausmessung beliebiger Rechtecke.

Lehrer: Ich zeichne hier an die Tafel ein Rechteck, das $8\frac{1}{3}$″ lang und 6″ breit ist:



Ueber die Länge AB kann man von A an zunächst 8 ganze □″ legen, die bilden einen rechteckigen Streifen, der bis nach BD verlängert noch $\frac{1}{3}$□″ zuerhält. Der ganze Längenstreifen faßt also $8\frac{1}{3}$ □″. Da das Rechteck aber gerade 6″ breit ist, so passen 6 solche Streifen über einander genau ins Rechteck.

Also 1 Längenstreifen $= 8\frac{1}{3}$ □″

und 6 " $= (8\frac{1}{3} \cdot 6)$□″ $= 50$□″.

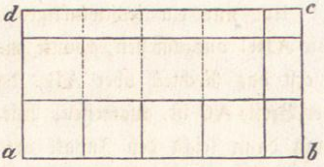
Das ganze Rechteck mißt demnach 50 ganze □″.

Wie ist das nun möglich, da doch in einen Längenstreifen nicht eine ganze Anzahl □″ gehen?

Antwort: Es gehen zwar wirklich nur 48 ganze □″ ins Rechteck; dann bleibt aber noch der schmale Streifen rechts übrig, der 6″ breit und $\frac{1}{3}$″ lang ist; diesen kann man aber gerade in 6 gleiche Rechteckchen theilen, wovon jedes $= \frac{1}{3}$□″ ist. Diese $\frac{6}{3}$□″ ließen sich aber zu 2 ganzen □″ zusammensetzen; also mißt das Rechteck wirklich 50□″.

Wir wollen noch ein Beispiel machen:

a. Wir messen die Länge und die Breite des Rechtecks, das ich hier gezeichnet habe, und finden ab $= 4^2/_3$″, ad $= 2^1/_2$″.



Wie viel mißt nun der zollbreite Streifen über ab? — Gut, $4^2/_3$ □″.

Wie viele solche Streifen enthält das ganze Rechteck? — Zwei und einen halben. Daraus folgt die Dreisatzrechnung:

1 Längenstreifen $= 4^2/_3$ □″ $= {}^{14}/_3$ □″

$2^1/_2$ = = ?

Lösung: $^1/_2$ Längenstreifen $= {}^7/_3$ □″

und $^5/_2$ = $= {}^{35}/_3$ □″ $= 11^2/_3$ □″.

b. Dasselbe Ergebniß würde man auf etwas weitläufigerm Wege durch bloßes Abzählen der Stücke finden. Zunächst hat man nämlich über ab 4 ganze □″ und dann noch ein Stück, das $^2/_3$ □″ ist. Unmittelbar darüber hat man wieder so viele Stücke, die machen zusammen 8 □″ und $^4/_3$ □″ $= 9^1/_3$ □″. Dann kommen in der obersten Reihe 4 halbe □″ und noch ein Stück, das die Hälfte des darunterliegenden Rechteckchens von $^2/_3$ □″ ist. Das macht alles zusammen:

$$9^1/_3 \text{ □″} + {}^4/_2 \text{ □″} + {}^1/_3 \text{ □″} = 11^2/_3 \text{ □″}.$$

Man sieht, daß dieses Abzählen der Quadrattheile bei großen Zahlen für Länge und Breite nicht gut ginge, sondern daß in diesem Falle der erste Weg des Dreisatzes (später bloß zusammengesetzte Multiplikation gemischter Zahlen) viel geeigneter ist.

c. Dieselbe Dreisatzrechnung läßt sich auch nach Breitenstreifen so machen:

1 Breitenstreifen hält $2^1/_2$ □″ $= {}^5/_2$ □″

$4^2/_3$ = halten ?

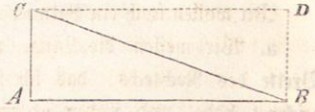
Lösung: $^1/_3$ Breitenstreifen $= {}^5/_2$ □″ : $3 = {}^5/_6$ □″

$^{14}/_3$ = $= ({}^5/_6 \cdot 14)$ □″ $= 11^2/_3$ □″.

Hierauf Auflösung eines Beispiels mit größern Zahlen; dann Fragen und Uebungen in praktischer Richtung (siehe die Aufgabensammlung.)

B. Ausmessung der rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecke.

a. Jedes rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks, dessen Länge gleich der einen Kathete und dessen Breite gleich der andern ist, denn so habt ihr ja das Rechteck mit dem Zirkel konstruiren gelernt.



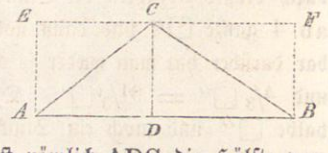
Um nun ein rechtwinkliges Dreieck wie ABC auszumessen, könnte man nur zuerst das Rechteck über AB, das von der Breite AC ist, ausmessen. Wie würde man dann leicht den Inhalt von ABC finden? — Gut, derselbe macht die Hälfte von demjenigen des Rechtecks.

Wäre AB = 12″ und AC = $5^1/_2$″, so hätte man:

$$ABCD = 5^1/_2 \square'' \times 12 = 66 \square'',$$

daher $ABC = {}^{66}/_2 \square'' = 33 \square''$. U. s. f.

b. Ein beliebiges Dreieck läßt sich stets durch ein Perpendikel (von dem der größten Seite gegenüberliegenden Eckpunkt auf diese gezogen) in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Werden dieselben einzeln ausgemessen, wie vorhin, so findet man den Inhalt des ganzen Dreiecks. Hat man das Dreieck ABC, so nennt man das Perpendikel CD die Höhe und AB die Grundlinie dieses Dreiecks. Statt nun die rechtwinkligen Dreiecke ADC und CDB einzeln auszumessen, ist leicht zu sehen, daß ABC die Hälfte von ABEF ist. Es ist nämlich ADC die Hälfte von welchem Rechteck? — und CBD die Hälfte von welchem? — Also?



Wäre AB = $8^1/_4$′ und CD = 5′ so wäre
das Rechteck ABEF = $(8^1/_4 . 5) \square' = 40^5/_4 \square'$
daher ABC als Hälfte = $20^5/_8 \square'$.

Es geht auf diese Weise schneller, als wenn man die einzelnen rechtwinkligen Dreiecke berechnet, obwohl auch so das Gleiche herauskommt. Man hätte nämlich, wenn AD = 3′ und DB = $5^1/_4$′ mißt:

$$ADC = 3 . 5 \square' : 2 = {}^{15}/_2 \square' = 7^1/_2 \square'$$

und $CDB = (5^1/_4 . 5) \square' : 2 = 26^1/_4 \square' : 2 = 13^1/_8 \square'$

zusammen $ABC = 7^1/_2 \square' + 13^1/_8 \square' = 20^5/_8 \square'$.

Welche Lösungsweise war nun die kürzere?

Schaut also: **Man kann sich bei der Ausmessung eines Dreiecks über dessen Grundlinie nur ein Rechteck denken, das eben so breit oder hoch ist, wie das Dreieck. Rechnet man dann den Flächeninhalt dieses Rechtecks aus, so ist derjenige des Dreiecks die Hälfte des erstern.**

Hierauf geeignete Fragen und Uebungen, besonders auch mit Hinleitung auf praktische Beispiele. (Siehe Heft III der Aufgabensammlung.)

Ist aus dem Flächeninhalt und einer Seite des Dreiecks dessen Höhe zu suchen, so denke man sich über dieser Seite ein Rechteck von gleicher Breite oder Höhe wie das Dreieck. Da dieses Rechteck doppelt so groß ist als das Dreieck, so bestimme man nur wie früher die Breite dieses Rechtecks. Dieselbe ist dann auch die gesuchte Höhe des Dreiecks. (Siehe ein Beispiel unten.)

Der Lehrer kann indessen diesen Fall noch ein wenig versparen, da er schon etwas schwieriger ist und später noch behandelt werden kann.

Nr. 2. Hierauf bezügliche Aufgaben.

(Siehe Heft III der Aufgabensammlung)

Aus Uebung 1. Aufgabe 12. „Wie viele □″ mißt ein rechteckiger Karton, der 2′ $5^1/_4$″ lang und 1′ 8″ breit ist?

Lösung: Die Länge ist $= 25^1/_4$″, die Breite $= 15$″.

Ein zollbreiter Längenstreifen hält $25^1/_4$ □″.

15 solche Streifen halten $25^1/_4$ □″ $\times 15 = 375^{15}/_4$ □″.

Also hält auch der ganze Karton $378^3/_4$ □″.

Aufgabe 13. „Ein Hofplatz in Form eines Rechtecks ist 14 Klftr. lang und $10^1/_5$ Klftr. breit; wie viele Quadratklafter mißt er?"

Antw. Sein Inhalt beträgt $10^1/_5$ □ Klftr. $\times 14 = 140^{14}/_5$ □ Klftr. $= 142^4/_5$ □ Klftr. $= 5140^4/_5$ □′.

Aufgabe 16. „Eine Zimmerdecke, die $25^2/_3$′ lang und 14′ breit ist, soll getäfelt werden; wie viele □′ Täfel sind nöthig, um sie zu decken?"

Antw. $25^2/_3$ □′ $\times 14 = 359^1/_3$ □′.

Aufgabe 18. „Ein Hausgang, der 12′ lang und $5^3/_5$′ breit ist, soll mit gebrannten Steinen belegt werden, wovon jedes Stück 8″ in die Länge und 4″ in die Breite mißt; wie viele Stücke solcher Steine hat man zum mindesten nöthig?"

Lösung 1. Der Flächeninhalt des Ganges ist $= 5^3/_5$ □′ $\times 12 = 67^1/_5$ □′ $= 6720$ □″.

Die Fläche, die durch einen der Steine bedeckt wird, ist $= 32$ □″.

So viel mal nun 32 □″ in 6720 □″ enthalten sind, so viele Steine sind nothwendig;

dieß macht aber $\frac{6720}{32}$ Steine $= 210$ Steine.

Lösung 2. Bei der Länge von 12′ enthält ein 4″ breiter Streifen ein Rechteck von 8″ Länge und 4″ Breite gerade 15 mal. Dieser Streifen wird also durch 15 Steine gedeckt. Nun enthält aber der

Gang, der $5^3/_5'$ oder 56″ breit ist, 14 solche Streifen, daher sind auch (15 . 14) solche Decksteine oder 210 Steine nothwendig.

Aus Uebung 2. Aufgabe 8. „Ein rechteckiger Platz ist $12^0\ 1^1/_2'$ lang und $10^1/_4$ Klftr. breit; wie viele □′ Inhalt hat er? — Verwandelt diese Anzahl □′ in Quadratklafter."

Lösung: Um die rechteckige Fläche in leicht meßbare Streifen zu zerlegen, müssen Länge und Breite in einem und demselben Maße ausgedrückt werden.

Nun sind $10^1/_4$ Klftr. $= 61^1/_2'$ und $12^0\ 1^1/_2' = 121^1/_2'$.

Bei der Länge von $121^1/_2'$ hält ein fußbreiter Streifen $121^1/_2$ □′, und in einer Breite von $61^1/_2'$ gibt es $61^1/_2$ solche Streifen.

Nun ist $^1/_2$ solche Streifen $= 121^1/_2$ □′ : 2 $= 60^3/_4$ □′

und $61^1/_2$ oder $\frac{123}{2}$ derartige Streifen $= 60^3/_4$ □′ × 123 $= 7472^1/_4$ □′.

Endlich sind

$7472^1/_4$ □′ $= (7472^1/_4 : 36)$ □ Klftr. $= 207^9/_{16}$ □ Klftr.

$= 207$ □ Klftr. und $20^1/_4$ □′.

Aufgabe 11. „Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $54^3/_4'$ mißt?"

Lösung: 1 Längenstreifen von 1 Fuß Breite $= 54^3/_4$ □′ $= \frac{219}{4}$ □′

$^1/_4$ " " " " $= \frac{219}{16}$ □′

$\frac{219}{4}$ " " " " $= \frac{219 \cdot 219}{16}$ □′ $= \frac{47961}{16}$ □′

Also das Quadrat $= 2997^9/_{16}$ □′.

Aus Uebung 3. Aufgabe 6. „Wie viele Quadratellen Tapeten bedarf man, um damit eine 20′ lange $9^1/_2'$ hohe Wand zu tapeziren?"

Lösung: Die Flächengröße der Wand ist $= 9^1/_2$ □′ × 20 $= 190$ □′

Also bedarf man $47^1/_2$ □ Ellen.

Aufgabe. „Eine große Tischfläche von $18^1/_2'$ Länge und 5′ Breite ist mit doppelt (2 Ellen) breitem Tuch überzogen; wie viele Ellen sind es?"

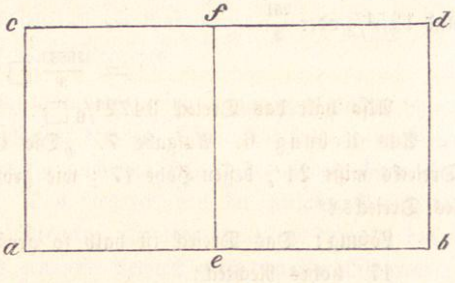
Lösung. Die Tischfläche mißt $18^1/_2$ □′ . 5 $= 92^1/_2$ □′.

1 Elle doppelt breit hält 8 □′; also hat man $(92^1/_2 : 8)$ Ellen $= 11^9/_{16}$ Ellen.

Aus Uebung 4. Aufgabe 3. „Zeichnet ein Rechteck, welches 1″ 8‴ lang und 1″ breit ist; davon ist ein eben so breites abzuschneiden,

das gerade 95 □‴ hält; wie groß muß also dessen Länge genommen werden? — Wie viel größer ist das ganze als das abgeschnittene Rechteck?"

Die Schüler zeichnen ein Rechteck wie:



und schreiben hiezu etwa:

Das Rechteck **abcd** ist 18‴ lang und 10‴ breit.

1 Breitenstreifen von 1‴ Länge mißt genau 10 □‴.

Soll man nun 95 □‴ haben, so bedarf man 9 solcher Streifen und noch einen halben.

Die Länge des abzuschneidenden Rechtecks ist also $9\frac{1}{2}$‴.

Ich mache also **be** und **df** $= 9\frac{1}{2}$‴, dann ist **ebdf** $= 95$ □‴.

Das ganze Rechteck hält 180 □‴, also ist es um 85 □‴ größer als das abgeschnittene.

Aufgabe 5. „Jemand verkauft von einer Wiese, die ein $40\frac{1}{2}$′ breites und 125′ langes Rechteck bildet, ein ebenfalls rechteckiges Stück von gleicher Breite aber 1215 □′ Inhalt. In welcher Länge ist dieses Stück von der Wiese abzuschneiden?

Lösung: 1 Breitenstreifen von 1′ Länge $= 40\frac{1}{2}$ □′.

Also zu 81 □′ bedarf man 2 solcher Streifen,

zu 1215 □′ = = ? = =

zu 1 □′ = = $\frac{2}{81}$ = =

zu 1215 □′ = = $\frac{2430}{81}$ = = = 30 Streifen.

30 solche Streifen neben einander gehen auf eine Länge von 30′. Das rechteckige Stück ist also in einer Länge von 30′ von der Wiese abzuschneiden, damit es dann 1215 □′ hält.

Probe: Ein Rechteck von $40\frac{1}{2}$′ Breite und 30′ Länge hält $40\frac{1}{2}$ □′ × 30 = 1215 □′.

Aus Uebung 5. Aufgabe 7. „Von einem Stück Land wird ein rechtwinkliges Dreieck abgeschnitten. Bei der Messung ergibt es sich, daß die eine Kathete $125\frac{1}{2}$′ und die andere $55\frac{1}{3}$′ mißt; wie groß ist das abgeschnittene Dreieck?"

Lösung: Das Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks von $55\frac{1}{3}'$ Breite und $125\frac{1}{2}'$ Länge.

1 fußlanger Breitenstreifen des Rechtecks $= 55\frac{1}{3}\ \square'$

$\frac{1}{2}$ " " " " $= \frac{83}{3}\ \square'$

und $125\frac{1}{2}$ oder $\frac{251}{2}$ " " " $= \frac{83}{3}\ \square' \times 251$

$= \frac{20831}{3}\ \square' = 6944\frac{1}{3}\ \square'$.

Also hält das Dreieck $3472\frac{1}{6}\ \square'$.

Aus Uebung 6. Aufgabe 7. „Die Grundlinie eines beliebigen Dreiecks mißt 21', dessen Höhe 17'; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?"

Lösung: Das Dreieck ist halb so groß als ein 21' langes und 17' hohes Rechteck;

also die Hälfte von $(21 \cdot 17)\ \square' = \frac{357}{2}\ \square' = 178\frac{1}{2}\ \square'$.

Aufgabe 10. „Eine dreieckige Giebelseite mißt in der Grundlinie 42' und in der Höhe $20\frac{1}{2}'$; mit wie viel $\square'$ Laden kann dieselbe bekleidet werden?"

Lösung: Die dreieckige Fläche hält die Hälfte von $20\frac{1}{2}\ \square' \times 42$

$= 861\ \square' : 2 = 430\frac{1}{2}\ \square'$.

Also braucht man $430\frac{1}{2}\ \square'$ Laden.

Aufgabe 13. Wie weit ist die Spitze eines gleichschenkligen $22\ \square'$ messenden Dreiecks von der Mitte der Grundlinie entfernt, wenn diese $= 10'$ ist.

Lösung: Ein Rechteck über der Grundlinie von 10' und von der gleichen Höhe wie das Dreieck würde $44\ \square'$ fassen, also muß diese Höhe $\frac{44}{10}' = 4\frac{2}{5}'$ betragen.

Probe: Das Rechteck hält so $4\frac{2}{5}\ \square' \times 10 = 44\ \square'$,

daher das Dreieck $22\ \square'$.

Anmerkung. Es ist ganz zweckmäßig, daß der Schüler auf dieser Stufe die einzelnen Flächenberechnungen stets noch nach „Schlußweise" und nicht nach einer fertigen Regel löst. Er muß es hier machen gerade wie beim Rechnungsunterricht, wo er jeden Dreisatz auch auf einzelne Schlüsse gestützt ausrechnet. Eine bloße Regel, wenn auch anfänglich verstanden, würde ihn im Laufe der Uebungen wieder zum gedankenlosen mechanischen Operiren führen. Ueberdieß wäre hier die Multiplikation und Division von Bruchzahlen mit Bruchzahlen für die Schüler ebenfalls noch zu schwierig; sie ist hier durch Zurückführung der Messungsrechnung auf den Dreisatz umgangen.

§ 21.

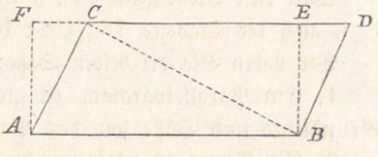
Ausmessung der aus beliebigen Dreiecken zusammengesetzten Vier- und Vielecke.*

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

B. Ausmessung des schiefwinkligen Parallelogramms und des Paralleltrapezes.

Lehrer: Das schiefwinklige Parallelogramm ist aus zwei gleichen schiefwinkligen Dreiecken zusammengesetzt worden. Könnet ihr nun eines dieser Dreiecke ausmessen, so findet ihr auch den Inhalt des ganzen Parallelogramms als das Doppelte. Das Rechteck von der gleichen Grundlinie und Höhe wie eines dieser Dreiecke, ist aber auch das doppelte dieses Dreiecks; daher ist auch das genannte Rechteck gleich dem Parallelogramm.

Die einfache Zeichnung zeigt dasselbe.



Der Flächeninhalt des Dreiecks CBD kann leicht gefunden werden, wenn man die Länge von CD und die Höhe von EB kennt. Ist z. B. CD = 12′, EB = 5′,

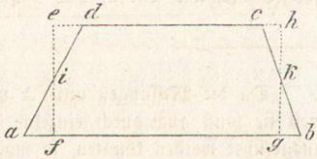
so ist das Dreieck CBD = 30 □′

und das Parallellogramm ABCD = 60 □′.

Wird das rechtwinklige Dreieck EBD abgeschnitten und bei ACF angefügt, so erkennt man, daß das Rechteck ABEF so viel ausmacht wie das Parallelogramm ABCD.

Wenn CD oder AB wieder = 12′ und EB = 5′, so ist auch das Rechteck wie das Parallelogramm = 60 □′.

Wir nehmen nun ein Paralleltrapez.



Die Seiten ab und dc sollen einander parallel sein, die beiden andern aber nicht. Nun wollen wir wieder ein Rechteck suchen, das so groß wie das Trapez ist. Wie könnte man das wohl am leichtesten finden? — Senkrechte Linien von i und k (als den Halbirungspunkten von ad und cb) auf die Grundlinie gezogen, führen am besten dazu. Man bekommt so in Verlängerung der oberen Parallelen dc

* Siehe die Schlußbemerkung in dieser Abtheilung.

das Rechteck efgh. Ist nun dasselbe so groß wie das Trapez? — Ja, denn die rechtwinkligen Dreiecke, die unten abgeschnitten sind, finden sich oben als gleich große angefügt. Aber wie groß ist die Grundlinie dieses Rechtecks?

Zunächst sind fg und eh zusammen so groß als ab und dc, denn ab ist um eben so viel größer als fg, um so viel cd kleiner ist als eh.

Wenn nun fg und eh oder $2\,fg = ab + dc$ ist, so ist fg allein die Hälfte von $ab + dc$, d. i. das Mittel aus den beiden parallelen Seiten des Trapezes.

Wäre $ab = 23'$, $dc = 13'$, so wäre $fg = \frac{23 + 13'}{2} = 18'$.

Das Rechteck, das man sich statt des Trapezes denken kann, oder das so groß ist wie das Trapez, ist also 18′ lang und von gleicher Breite wie das Trapez.

Wäre diese Breite gleich 10′, so würde der Flächeninhalt des Rechtecks, d. i. auch des Trapezes $18\,\square' \times 10 = 180\,\square'$ betragen.

Wir haben also die beiden Sätze:

1. Ein Parallelogramm ist gleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe wie das Parallelogramm.

2. Ein Trapez ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Mittel aus den parallelen Seiten und dessen Höhe gleich derjenigen des Trapezes ist.

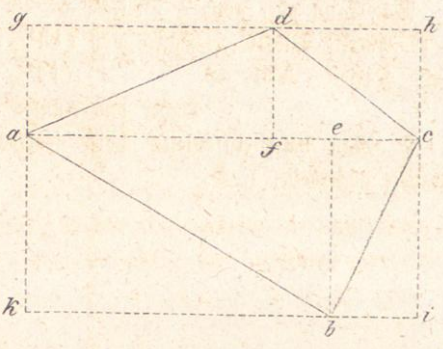
Nun weitere Beispiele und praktische Uebungen (siehe die Aufgabensammlung).

B. Ausmessung beliebiger Vier- und Vielecke.*

Für das unregelmäßige Viereck kann man ebenfalls leicht ein gleich großes Rechteck finden, das bequemer auszumessen ist, als jenes.

---

* Da die Messungen unter A und B bloß Abkürzungen zum Zwecke haben, weil sie sonst auch durch einzelne Dreiecksmessungen (nur etwas weitläufiger) ausgeführt werden könnten, so mag der Lehrer, wenn er die Schüler wirklich jetzt schon auf diese Abkürzungen führen will, ihnen vor den Lektionen etwa auch die Aufgabe stellen: „ein Rechteck zu suchen, das so groß wie ein gegebenes schiefes Parallelogramm, oder so groß wie ein Trapez, oder wie ein unregelmäßiges Viereck sei; ferner welche Vereinfachungen man daher beim Messen von Vielecken eintreten lassen könne?“ Einige der bessern Schüler finden so vielleicht aus sich selber etwas Rechtes.



Die Diagonale ac theilt das Viereck abcd in zwei ungleiche Dreiecke; aber jedes ist gleich der Hälfte eines Rechtecks von der Grundlinie ac und der Höhe des betreffenden Dreiecks, also adc die Hälfte des Rechtecks acgh und acb die Hälfte von acik, daher das ganze Viereck gleich der Hälfte des umgebenden Rechtecks ghik.

Dieses Rechteck hat eine Länge gleich der Diagonale und eine Breite gleich der Summe der beiden Dreieckshöhen (df und eb).

Ist ac = 20′; df = $6^1/_2$′; eb = $9^1/_2$′, also auch hc + ci = 16′; so ist das Rechteck ghik = (20 . 16) □′ = 320 □′, also das Viereck abcd die Hälfte oder = 160 □′.

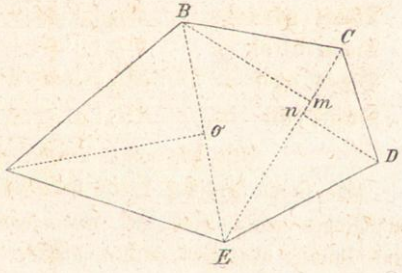
Es ergibt sich hieraus der Satz:

Ein unregelmäßiges Viereck ist halb so groß als ein Rechteck, das so lang ist, wie eine Diagonale des Vierecks und so breit, als die auf sie gezogenen Dreieckshöhen zusammen angeben.

(Beispiele und Uebungen in der Aufgabensammlung.)

Ferner: Messung von Vielecken.

1. Wenn in dem Fünfeck ABCDE, das auf geeignete Weise durch Diagonalen in Dreiecke getheilt wird, BE = 16′; Ao = $14^1/_2$′; EC = $15^1/_2$′; Bm = 10′ und Dn = 7′ ist; so könnte man jedes Dreieck einzeln ausmessen, z. B.



ABE = Hälfte von $(14^1/_2 . 16)$ □′ = $\frac{232}{2}$ □′ = 116 □′

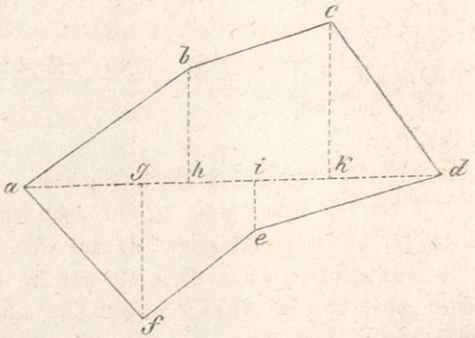
BEC = " " $(15^1/_2 . 10)$ □′ = $\frac{155}{2}$ □′ = $77^1/_2$ □′

ECD = " " $(15^1/_2 . 7)$ □′ = $108^1/_2$ □′ : 2 = $54^1/_4$ □′

Daher Fünfeck ABCDE = $247^3/_4$ □′.

Man kann aber auch 2 Dreiecke als ein Viereck zusammenberechnen, z. B. Viereck BEDC = Hälfte von $(15\frac{1}{2} \cdot 17)$ □′ = $131\frac{3}{4}$ □′
und Dreieck ABE = = $(14\frac{1}{2} \cdot 16)$ □′ = 116 □′.
Daher das Fünfeck ABCDE = $247\frac{3}{4}$ □′

2. Man habe ein Vieleck durch senkrechte Linien in Dreiecke und Trapeze abgetheilt, z. B.



in diesem Vieleck sei ag = 4′; gi = $3\frac{3}{4}$′; ah = $5\frac{1}{2}$′; hk = 5′
und gf = $4\frac{1}{2}$′; ie = $2\frac{1}{2}$′; hb = 4′; ck = $5\frac{1}{4}$′
und id = 6′; kd = 4′.

so ergibt sich nach dem Vorausgegangenen leicht:

Dreieck ahb	= halb $5\frac{1}{2}$ □′ × 4 = $\frac{22}{2}$ □′	= 11	□′
Dreieck agf	= = $4\frac{1}{2}$ □′ × 4 = $\frac{18}{2}$ □′	= 9	□′
Trapez gief	= = $3\frac{3}{4}$ □′ × 7 = $26\frac{1}{4}$ □′ : 2	= $13\frac{1}{8}$	□′
Trapez hbck	= = $9\frac{1}{4}$ □′ × 5 = $46\frac{1}{4}$ □′ : 2	= $23\frac{1}{8}$	□′
Dreieck ckd	= = $5\frac{1}{4}$ □′ × 4 = 21 □′ : 2	= $10\frac{1}{2}$	□′
Dreieck ied	= = $2\frac{1}{2}$ □′ × 6 = $\frac{15}{2}$ □′	= $7\frac{1}{2}$	□′

Also das ganze unregelmäßige Flächenstück = $74\frac{1}{4}$ □′.

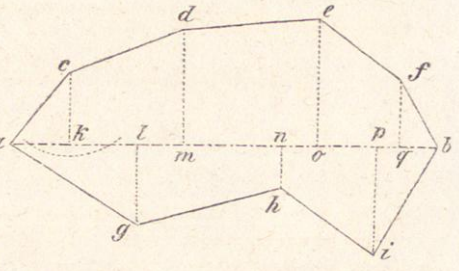
Und so in ähnlicher Weise bei Vielecken, die etwa durch ein Rechteck umschlossen worden sind und wobei vom ganzen Rechteck dann Dreiecke und Trapeze abgezogen werden müssen.

Nr. 2. Bemerkungen und Ausführungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorigen Sätze. (Siehe Heft III der Aufgabensammlung.)

Die Uebung 7 in diesem Hefte verlangt keine vorausgehende Lektion. Wenn auch nur die wichtigern Aufgaben zur Konstruktion im zweiten

Hefte gelöst worden sind, so werden die Schüler im Stande sein, die hier verlangten Zeichnungsaufgaben zu lösen. Daß alle gelöst werden, ist natürlich so wenig wie in den übrigen Uebungen nothwendig. Man hat Abwechslung und Auswahl.

Als Beispiele: Aufgabe 7. „Zeichnet ein ganz unregelmäßiges Vieleck wie das folgende, und theilt dasselbe in lauter Trapeze und rechtwinklige Dreiecke, indem ihr z. B. auf die gerade Linie von a nach b die Perpendikel von allen übrigen Endpunkten aus errichtet. — Wie viele Trapeze und wie viele einzelne rechtwinkliche Dreiecke entstehen so?"



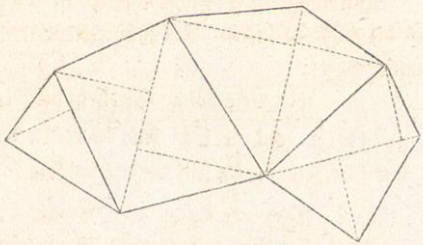
Der Schüler zeichnet zunächst die Figur acdefbihg, zieht dann ab und alsdann, am schnellsten mit der Equerre, die Perpendikel ck, gl, dm, nh, eo, pi, fq. Er kann aber dieselben auch mit dem Zirkel konstruiren durch Bogen wie bei k, wobei stets die Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit dessen Spitze verbunden wird.

Der Schüler schreibt bloß etwa darunter:

„Durch die senkrechten Linien und die Durchschnittslinie ab wird die ganze Figur in 4 Dreiecke und 5 Trapeze getheilt; die Dreiecke sind akc, alg, fqb und pib; die Trapeze ckmd, dmoe, eoqf, glnk und nhpi.

Die Zeichnung geschieht am besten bloß mit Bleistift.

Aufgabe 8. „Zerlegung derselben Figur in Dreiecke durch Diagonalen und Ausziehung der Höhen der Dreiecke."



Der Schüler schreibt hiezu eine ähnliche Erläuterung wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 11. „Was wird man bei jeder noch so unregelmäßigen Figur, die man in Dreiecke eingetheilt hat, noch thun müssen, um den Flächeninhalt dieser Figur zu finden?"

Antwort: Man kann jedes einzelne Dreieck ausmessen, dann ist die Summe aller Flächeninhalte gleich dem Flächeninhalt der ganzen Figur.

Zu Uebung 8. Hier, wie beinahe in jeder Uebung, sind einzelne leichtere und einzelne schwierigere Aufgaben. Wenn der Lehrer nur wenige Zeit für das Fach verwenden kann und vielleicht dazu noch eine schwächere Klasse hat, so kann er zunächst nur die leichtesten Aufgaben lösen lassen, z. B. 1, 2, 3, dann etwa 8, 9, 10 u. s. f.

Z. B. Aufgabe 8. „Konstruirt ein Parallelogramm, das 2″ lang, 1″ breit und bei welchem ein Winkel = 120° ist; wie groß ist dasselbe?"

Der Schüler schreibt hiezu: DC || (parallel mit) AB

DC = AB = 2″ und DE = 1″

∢ DAE = 60° als Winkel von einem gleichseitigen Dreieck.

Fl. ABCD = 2 . 1 □″ = 2 □″.

Lösung einer Aufgabe für vorgerücktere Schüler, z. B. Aufgabe 12. „Wenn der Flächeninhalt einer Raute $12\frac{1}{4}$ □′ und eine Seite derselben 4′ beträgt, wie weit ist dann jede Seite von der ihr gegenüberstehenden entfernt?"

Auflösung. Der Flächeninhalt ist $12\frac{1}{4}$ □′, die Grundlinie 4′; es ist die Höhe zu suchen. Ein fußbreiter Streifen über der Grundlinie von 4′ mißt 4 □′;

wie viele solche Streifen gibt es zu $12\frac{1}{4}$ □′?

Zu 4 □′ hat man 1 Streifen

= $\frac{1}{4}$ □′ = = $\frac{1}{16}$ =

= $\frac{49}{4}$ □′ = = $\frac{49}{16}$ = = $3\frac{1}{16}$ Streifen.

Da 1 Streifen 1 Fuß breit ist, so sind $3\frac{1}{16}$ Streifen über einander $3\frac{1}{16}$ Fuß breit. Wenn daher die Grundlinie = 4′, so ist die Höhe = $3\frac{1}{16}$′, und da alle Seiten der Raute einander gleich sind, so sind je zwei $3\frac{1}{16}$′ von einander entfernt.

Die Uebungen 9, 10, 11, 12 darf der Lehrer, der in der Ergänzungsschule (Repetirschule) auch noch etwas für die Geometrie thun kann, ziemlich kurz behandeln; er mag dort dann noch diese Messungen nachholen, die schon etwas zusammengesetzter sind.

Auflösung einiger Beispiele aus diesen Uebungen:

a. Aufgabe 12, Uebung 9. „Ein gwisses Landstück bildet genau ein Paralleltrapez; man mißt die Seiten, welche das eben so große Rechteck bestimmen und findet die eine der parallelen Seiten = 104′, die andere $72\frac{1}{2}$′ und die Höhe = $30\frac{1}{4}$′; wie groß ist nun das Landstück?"

Antwort: Der Inhalt ist gleich demjenigen eines Rechtecks von halb (104 + $72\frac{1}{2}$)′, d. i. $88\frac{1}{4}$′ Länge und $30\frac{1}{4}$′ Breite. Nun ist

1 fußbreiter Längenstreifen = $88\frac{1}{4}$ □′

$\frac{1}{4}$ = = = $22\frac{1}{16}$ □′

$\frac{121}{4}$ = = = $22\frac{1}{16}$ □′ × 121

= (2662 + $\frac{121}{16}$) □′ = $2669\frac{9}{16}$ □′

Das Stück Land hält also $2669\frac{9}{16}$ □′.

b. Aufgabe 11, Uebung 10. „Man soll den Flächeninhalt eines viereckigen Platzes bestimmen, von welchem man weiß, daß bei jeder Ecke zwei und zwei zusammenstoßende Seiten gleich lang sind. Da mißt man die eine Diagonale und findet sie = 213′ und die andere = 197′; wie groß ist nun der Platz?"

Lösung: In einem solchen Viereck sind die Diagonalen auf einander senkrecht; darum ist das zu messende Viereck gleich dem halben Rechteck von 213′ Länge und 197′ Breite;

also = (213 . 197) □′ : 2 = $\frac{41961}{2}$ □′ = $20980\frac{1}{2}$ □′.

c. Aufgabe 5 b, aus Uebung 11. Lösung nach den in der Aufgabe enthaltenen Angaben:

Das dort beschriebene Rechteck fgkl ist = (70 . 56) □′ = 3920 □′.

Die abzuziehenden Stücke sind:

fHO	= halb	$22\frac{1}{2}$ □′ × 20	= 225	□′
HJh	= =	$8\frac{1}{2}$ □′ × 38	= $161\frac{1}{2}$	□′
JhlK	= =	$43\frac{1}{2}$ □′ × 12	= 261	□′
Klk	= =	$16\frac{1}{2}$ □′ × 21	= $173\frac{1}{4}$	□′
NML	= =	$5\frac{7}{8}$ □′ × 69	= $202\frac{11}{16}$	□′
OgN	= =	$33\frac{1}{2}$ □′ × 19	= $318\frac{1}{4}$	□′

Die Summe der abzuziehenden Stücke = $1341\frac{11}{16}$ □′

Also ist das Vieleck HJKLMNO = 3920 □′ − $1341^{11}/_{16}$ □′ = $2578^{5}/_{16}$ □′ = 2578 □′ $312^{1}/_{2}$ □′.

Die Aufgaben in Uebung 12 sind eben so leicht als nützlich und der Lehrer läßt daher jedenfalls eine Anzahl derselben lösen.

Uebung 13. „Vermischte angewandte Rechnungsaufgaben."

1. Eine Wand von $22^{1}/_{2}$′ Länge und 7′ Höhe soll angemalt werden, wie viel hat man zu bezahlen, wenn für den □′ 13 Rappen gefordert wird?

2. Ein Schreiner liefert 40 Stück Gesimse, jedes 12″ breit und auf der längern Seite 6′ auf der kürzern 5′ 2″ lang; wie viel Inhalt hat eines und und wie viel alle 40 Stück?

3. Was kosten dieselben, wenn man für den Quadratfuß $1^{1}/_{2}$ Batzen bezahlen muß?

4. Ein Zimmerboden ist 24′ lang und 16′ breit. Wie viel Flächenraum würde er mehr halten, wenn er bei demselben Umfange quadratförmig wäre?

5. Bei einem rechteckigen Acker, der 351′ Länge und 20000 □′ Inhalt haben muß, soll die Breite neu ausgemittelt werden; wie groß wird sie sein?

6. Wenn von diesem Acker ein rechteckiges Stück von 250′ Länge und von der nämlichen Breite, die der ganze Acker hat, à 17 Rappen per □′ verkauft wird, wie groß ist dann der Erlös, und wie viel wäre dann das Uebrige zu gleichem Preise noch werth?

7. Wie viele Stücke Laden (Bretter) von 3⁰ Länge und $1^{1}/_{4}$′ Breite braucht es, um damit einen Zimmerboden von 30′ Länge und $21^{1}/_{4}$′ Breite zu legen?

8. Wie viele Ziegel bedarf es auf ein viereckiges Dach von 36′ Länge und 17′ Breite, wenn angenommen wird, ein Ziegel decke 36 □″?

9. Ein Hausgang von 27′ Länge und $6^{1}/_{2}$′ Breite soll mit gebrannten Steinen von 9″ Länge und $1^{1}/_{2}$′ Breite belegt werden; wie viele Steine bedarf es?

10. Wie viel kostet die Bekiesung einer 1500′ langen geraden Straßenstrecke, wenn für das □ Klafter $1^{1}/_{2}$ Batzen bezahlt wird und die Straße 20′ breit ist?

11. Um eine rechteckige Wiese von 230′ Länge und 167′ Breite zieht sich eine Hecke, die durchschnittlich $1^{1}/_{2}$′ breit ist; wie viel Flächenraum bedeckt dieselbe?

12. Wie viele Rebstöcke bedarf es in ein rechteckiges Stück von 180′ Länge und 105′ Breite, wenn die Stege nach beiden Seiten $2\frac{1}{2}$′ Breite haben sollen?

13. Ein Zimmer von 20′ Länge, 12′ Breite und $8\frac{1}{2}$′ Höhe soll an den Wänden und an der Decke getäfelt werden. Wie viel □′ Getäfel bedarf es, wenn wegen der Thüre ein Rechteck von 3′ Breite und 6′ Höhe abzuziehen ist? Für die Fenster soll kein Abzug Statt finden, da die Einfassungen um dieselben ungefähr so viel Fläche als die Fenster einnehmen werden. Wie groß ist dann der Kostenbetrag, wenn 1 □′ zu 2 Batzen gerechnet wird?

14. Wie viel kostet noch das Anmalen dieses Zimmers, wenn man für den □′ 14 Rappen zahlen muß?

15. Wie viel Kupferblech ist nothwendig, um ein achtseitiges zugespitztes Thurmdach, das aus 8 gleichen Dreiecken besteht, von denen ein jedes eine Grundlinie von 7′ und eine Höhe von 26′ hat, zu belegen?

16. Eine neue Straße nimmt von einem Garten ein dreieckiges Stück von 35′ Grundlinie und 9′ Höhe weg. Als Entschädigung wird für den □′ 3 Batzen bezahlt, wie viel bringt es im Ganzen?

17. Eine andere 24′ breite neue Straße durchzieht eine Wiese so, daß sie von derselben ein Trapez herausschneidet, bei dem die eine der parallelen Seiten (das sind die beiden Seitenlinien der Straße) 205′, die andere 198′ lang ist. Wie viel erhält der Eigenthümer dieser Wiese, wenn ihm für Abtretung dieses Landes das □ Klafter mit 5 Frkn. 3 Btzn. bezahlt wird?

18. Von einem fünfeckigen Stück Land wird ein Dreieck abgeschnitten, dessen Grundlinie 81′ und dessen Höhe 15′ beträgt. Wie groß ist das noch übrig bleibende Viereck, wenn vorher das Fünfeck $1123\frac{1}{3}$ □′ betrug?

19. Drei Brüder wollen einen rechteckigen Acker von 507′ Länge und 221′ Breite unter sich theilen; der eine soll davon 308 □⁰, der andere 508 □⁰ und der dritte das Uebrige erhalten: Wie muß die Theilung geschehen, wenn der Antheil eines jeden ein rechteckiges Stück von der ursprünglichen Breite des Ackers bilden soll?

§ 22.

Anfänge in Vermessungen im Freien. Aufnahme und Zeichnung der leichtesten Grundplänchen.

Vorbemerkung. Wenn einmal die Ergänzungsschule so eingerichtet ist, daß auch sie noch etwas für die praktische Richtung des Messens

zu thun vermag; so dürfte der nachfolgende Abschnitt, sowie schon einzelne der zusammengesetzteren Theile des Vorausgegangenen noch bis zu dieser Schulstufe verspart bleiben, weil in dem hierauf bezüglichen Lehrgange schon manche Verrichtungen nothwendig werden, die der 12jährige Schüler nicht so leicht bemeistert wie der 14- oder 15jährige, bei welch letzterem zugleich eine reifere und haltbarere Erfassung dieser Punkte möglich ist als bei ersterem. Bis dahin möge der Lehrer die nachfolgenden Erläuterungen und die darauf folgenden Uebungen so benutzen und in Anwendung bringen, wie er es für zweckmäßig und möglich erachtet, besonders auch mit Hinsicht auf die besonderen Verhältnisse seiner Schule.

A. Allgemeine Erläuterungen durch den Lehrer: Ueber einige geometrische Verrichtungen im Freien (auf dem Felde).*

Lehrer: Die geometrischen Verrichtungen, die man im Freien vornimmt, können hier nicht ganz in der gleichen Weise ausgeführt werden, wie wir dieselben in der Schulstube auf dem Papier, auf der Tafel oder dem Zimmerboden bis jetzt vorgenommen haben. Zwar werden im Freien auch Linien, Winkel, Flächen und Körper gemessen und man wendet hiebei ebenfalls die euch bekannten Maße an, aber dieß geschieht wegen der bedeutendern Ausdehnung der zu messenden Größen meist in einer andern Weise, und zudem muß man sich hier das zu Messende oft erst besonders denken, während dasselbe bei den Messungen auf dem Papiere gewöhnlich schon angezeichnet oder ausgezeichnet ist.

Auf dem Felde zieht man z. B. keine Linien, sondern man deutet sie durch Punkte an, in die man etwa Stäbe oder Stangen oder Marken steckt, und zwischen denen man sich die betreffenden Linien dann denkt. Deßwegen hier die Redensart: eine Linie aus- oder abstecken, statt: eine Linie ziehen.

Die Flächenstücke, die im Freien vermessen werden, sind die Grundstücke, Stücke Landes von verschiedener Form und Größe, z. B. Wiesen, Aecker, Wälder, Rieter u. s. f. Die Gränzen der Grundstücke sind entweder wirkliche oder bloß gedachte. Im ersten Falle sind es etwa Wege, Zäune, Mauern, Gräben, Bäche ꝛc., im

* Der Lehrer mag diesen Erläuterungen, die wir absichtlich kurz geben, passende Veranschaulichungen beifügen, mag dieselben im Schulzimmer halten oder die Knaben schon bei dieser Einleitung ins Freie führen.

zweiten Falle sind sie durch Pfähle, Marksteine u. dgl. bestimmt, wobei jedesmal die gerade Richtung von einem Eck- oder Markpunkte zum nächstfolgenden als Gränzlinie dient. Die Wiese des Nachbars N. (vor dem Schulhause) ist z. B. von derjenigen des Herrn M. durch zwei Marksteine abgegränzt, wovon der eine oben beim Fußwege, der andere unten bei der Straße steht, und die Gränze muß man sich von der einen Marke zur andern als gerade Linie denken. Wie weit darf daher bei der Heuernte der Herr M. das Gras abmähen lassen?

Was nun die auszumessende Fläche eines Grundstückes anbetrifft, so ist diese meistens nicht die Oberfläche, sondern die wagrechte, ebene Durchschnittsfläche, welche zwischen den ausgesteckten Eckpunkten gedacht werden kann, und die immer kleiner ist, als eine unebene oder schiefe Oberfläche. Man kann sich das etwa durch folgendes Beispiel veranschaulichen.

Denkt man sich z. B. den Tisch mit einer Menge Erde bedeckt und diese nach der einen Seite hin angehäuft, nach der andern aber vertieft, so wäre die Oberfläche dieser Erdmasse offenbar größer als die wagrechte Tischebene, auf der sie ruht. Die Tischebene stellt aber gerade das vor, was bei einem Grundstücke die wagrechte Durchschnittsfläche und diese gibt die wahre Flächenausdehnung an, da sie stets gleich bleibt, man mag die Oberfläche des Grundstückes erhöhen oder vertiefen, wo und wie man will.

Oder wenn man sich ferner z. B. auf einem wagrechten, ebenen Platze Hügel von Erde, Sand ꝛc. angehäuft denkt, so wäre die hügelige, schiefe oder abgedachte Oberfläche der angehäuften Masse wieder größer als die wagrechte Oberfläche des Platzes, die daher wieder als die eigentliche Flächenausdehnung des Platzes betrachtet werden muß.

Wie wird sich die Fläche des Seegrundes zur Oberfläche des Wassers verhalten? — Welche gibt also die wagrechte Flächenausdehnung des Sees an? — Seht, so sind auch die Landkarten gemacht; diese stellen auch nur die wagrechte (oder wasserrechte, horizontale) Durchschnittsfläche des Landes dar: ein Berg nimmt nicht mehr Flächenausdehnung ein, als der wagrechte Boden, auf dem man ihn ruhend denken kann.

Wollte man dieses nicht so halten, sondern die auf- und absteigende Oberfläche der Grundstücke messen, so hätte man keine bestimmte Messung mehr. Jeder könnte so durch Erhöhung und Vertiefung die Oberfläche eines Landstückes vergrößern. — Wer ein Haus bauen will, so daß die

Grundfläche desselben 1200 □' einnehmen soll, der könnte nicht zum Ziele kommen, wenn man ihm ein Landstück von 1200 □' schief aufsteigender Oberfläche hiezu anweisen wollte.

Im Allgemeinen hat auch auf einer wagrechten Fläche eine größere Pflanzenmenge Platz, als auf einer schiefansteigenden, deren schiefe Oberfläche gleichen Inhalt hat wie die wagrechte.

Um den Inhalt des wagrechten Durchschnittes eines Grundstückes zu finden, muß man sich also merken, daß die Linien, aus denen diese Flächengröße zu bestimmen ist, stets wagrecht zu messen sind, d. h., daß der Abstand eines Punktes von einem andern als wagrechter und nicht als schiefer Abstand genommen werden muß. Ich werde euch dieß an einem besonderen Beispiele später zeigen, wobei ihr dann auch näher sehen werdet, was eine auf unebenem Boden abgesteckte gerade Linie bedeutet.

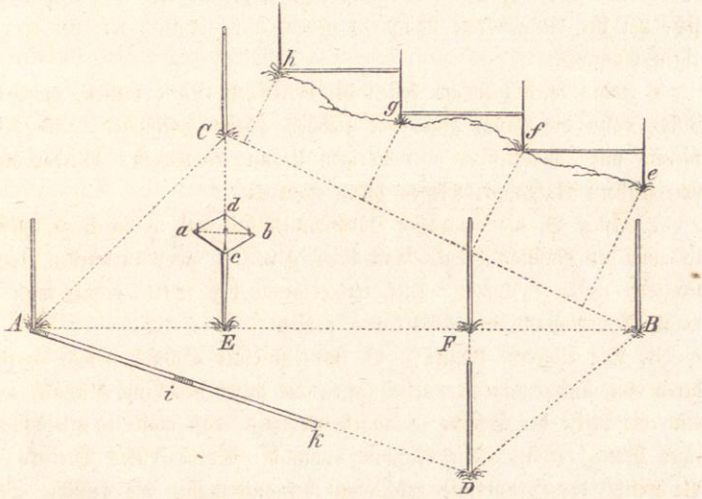
Natürlich wird man auch hier die Figuren zum Zwecke der Messung in Dreiecke ꝛc. zerfällen und dann jedes einzelne Stück ausmessen. Die Höhen der Dreiecke könnten hier aber nicht mehr leicht durch Kreisbogen oder vermittelst der Equerre gefunden werden; daher wird hiebei ein anderes Mittel angewendet, das besser aushilft und das ich euch bei den nächsten Uebungen vorweisen, erklären und gebrauchen lassen will.

B. Hauptaufgaben zu Meßübungen im Freien.

1. Von einem Punkte aus, in welchen man einen Stab lothrecht stellt, eine gerade Linie auszustecken.
2. Eine aus- oder abgesteckte Linie zu verlängern.
3. Zwischen zwei lothrecht stehenden Stäben einen dritten in gerade Linie zu bringen.
4. Eine ausgesteckte Linie zu messen.
5. Eine gerade Linie von bestimmter Länge abzustecken.
6. Eine abgesteckte Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.
7. Auf an- oder absteigendem Boden eine wagrechte Durchschnittslinie zu messen.
8. Auf eine gerade Linie eine senkrechte auszustecken.
9. Die Senkrechte von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie auf diese auszustecken, oder die Höhe eines Dreiecks zu bestimmen.
10. Eine abgesteckte Figur auszumessen.

11. Von derselben ein einfaches Plänchen aufzunehmen oder ein Kärtchen zu entwerfen.

Erläuterungen zu diesen Aufgaben mit Hinweisung auf die nachfolgende Zeichnung.



1. Ist der betreffende Punkt durch den Stab bei A bezeichnet, so ist durch Annahme eines zweiten Punktes F in den man ebenfalls einen Stab steckt, die gerade Linie AF bestimmt. So AC, AD u. s. f. Zu merken ist, daß die Stäbe schön lothrecht stehen müssen.

2. Um z. B. AF zu verlängern, wird man von A aus nach F und darüber hinausschauen (visiren) und sich in dieser Richtung einen dritten Stab z. B. in B stecken lassen.

3. Wird durch Visiren wie in der vorigen Aufgabe bewerkstelligt.

4. Man wird sich hiezu in Ermanglung einer Meßkette am besten eines möglichst langen Maßstabes bedienen. Eine Meßschnur aber ist nicht zu empfehlen, da eine solche sich zu sehr ausdehnen und zusammenziehen kann.

Soll nun z. B. von A nach D gemessen werden, so wird der Maßstab von A aus, indem man nach D visirt, in dieser Richtung angelegt, dessen Ende (bei i) gemerkt und der Stab von da an neuerdings in die Richtung gebracht u. s. f. Das Uebrige geht wie gewöhnlich. Genauer noch wird die Messung, wenn man zwei gleich lange Stäbe hat. Der

eine wird alsdann jedesmal an das Ende des andern gelegt (wie i k an A i), dieser hierauf weggenommen, ohne jenen zu verrücken, und hierauf (von k aus) das gleiche wie vorhin wiederholt, bis man zu Ende ist. Dieß bildeß eine Repetition einer schon früheren Uebung.

5. Wenn die Linie der Richtung nach abgesteckt ist, so benimmt man sich, um ihr die gehörige Länge zu geben, ganz ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe.

6. Man wird hier am besten die betreffende Linie messen, durch Division dann die Größe eines der gleichen Theile bestimmen, und diesen hierauf mit Hinzuziehung der vorigen Uebung abtragen. Wiederholung von frühern Aufgaben. Messen durch Schritte.

7. Ist z. B. die wagrechte Durchschnittslinie von e bis h zu messen, so muß der Maßstab bei e, dann bei f, g u. s. f. gehoben werden, bis er wagrecht zu liegen kommt. Dieß immer genau beobachtet, erhält man den wagrechten Abstand des Punktes e von h.

8. Die Aufgabe könnte z. B. mittelst einer Schnur gelöst werden, deren Endpunkte man in zwei Punkten der gegebenen Linie festhält, während die Mitte der Schnur so angestreckt wird, daß man ein gleichschenkliges Dreieck erhält. Die Richtung von der Spitze dieses Dreiecks auf die Mitte der Grundlinie gibt dann bekanntermaßen die gesuchte Senkrechte.

Besser jedoch geht die Sache mit Hülfe eines Meßkreuzes (Kreuzscheibe). Dieses Instrument, auf welches in den allgemeinen Erläuterungen hingedeutet wurde, kann man sich einfach etwa auf folgende Art verfertigen:

Man zeichnet ungefähr in der Mitte eines ebenen, viereckigen Brettchens, wie abcd, zwei genau auf einander senkrecht stehende Linien (ab und cd) und steckt in jeder, nicht ganz zu äußerst, eine Nadel oder sonst ein feines Stiftchen senkrecht auf. Im Durchschnitte der beiden Linien wird das Brettchen durchbohrt und dann auf einen geraden Stab möglichst senkrecht gesteckt; so ist das Meßkreuz fertig

Durch dieses Hülfsmittel kann nun die vorgesetzte Aufgabe, wie folgt, gelöst werden: Man stellt, wenn die Senkrechte z. B. auf AB in den Punkt E errichtet werden soll, das Meßkreuz daselbst so auf, daß die Stifte a und b nach den Stäben F und B zeigen; dann visirt man nur noch über cd hin und läßt sich in dieser Richtung einen Stab, etwa in C, stecken, so ist EC die gesuchte Senkrechte.

Das Instrument selbst läßt sich auf folgende Weise prüfen: Man

dreht es in E um, bis cd nach EB hinweist, alsdann muß ba genau nach C zeigen, oder das Meßkreuz ist nicht richtig. Der Grund hievon erhellt aus der Erklärung des rechten Winkels.

(Da die Schüler senkrechte Linien konstruiren gelernt haben, so kann jeder für sich ein Meßkreuz verfertigen, das, wenn im Ganzen auch unvollkommen gearbeitet, doch ausreicht, insofern die beiden Richtungen gut senkrecht sind.)

9. Diese Aufgabe läßt sich mit Zuzug des Meßkreuzes ebenfalls leicht lösen. Sei z. B. von C, der Spitze des Dreiecks ABC die Senkrechte auf AB zu bestimmen, so gehen Zwei mit dem Meßkreuze in der Richtung von A nach B vorwärts. Der Eine visirt über ab nach FB, der Andere behält die Richtung cd im Auge und läßt halten, so bald diese Richtung den Stab C trifft. Geschieht dieß in E, so ist dann CE die gesuchte Senkrechte, oder die Höhe des Dreiecks ABC. Gerade so wird die Höhe jedes andern Dreiecks, z. B. DF im Dreieck ABD gefunden. Daß hier das Meßkreuz ähnlich wie eine Equerre gebraucht wird, fällt in die Augen.

10. Theilt man die Figur in Dreiecke ein, bestimmt aldann die Höhe eines jeden nach der vorigen Aufgabe und mißt hierauf die nothwendigen Linien, so bleibt nur noch die gehörige Berechnung zu machen übrig. Findet man z. B. nach obiger Zeichnung CE = 180′, AB = 751′ und DF = 121′, dann ist:

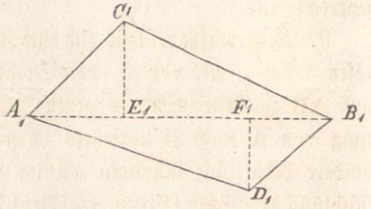
$$\text{Fl. von ADBC} = \frac{(180+121).751}{2} \square' = 113025\,{}^1/_2 \square'.$$

Natürlich muß obiges Verfahren nur mehrmals wiederholt werden, wenn die Figur viele Ecken hat.

Um die Aufgabe ohne weitere Hülfsmittel zu lösen, kann man etwa so verfahren: Man geht, um z. B. die Höhe des Dreiecks ABC bloß von Auge zu finden, von A gerade gegen F, und bleibt auf der Stelle stehen, von wo aus man die Richtung nach C senkrecht auf AB findet. Dieß wird ungefähr in E eintreffen. Werden dann die Linien EC und AB durch Schritte gemessen, so hat man nur noch die bekannte Rechnung zu machen. — Solche ungefähre Messungen können indessen nur auf einem nicht gar unebenen oder ansteigenden Boden ordentlich ausgeführt werden, da die betreffenden Linien immer wagrecht zu messen sind.

11. Werden die Stücke AB, AE, EF, CE und FD, nachdem man sie gemessen hat, in kleinern (verjüngten) Maßeinheiten zu Papier gebracht und zwar in derselben Lage und Aufeinanderfolge, die sie in

Wirklichkeit haben; so erhält man durch gehörige Verbindung der Eckpunkte eine Figur, deren einzelne Theile ähnlich zu einander stehen, wie in der wirklichen, und deren Fläche eben so viele Quadrate des verjüngten Maßes enthält, als das Grundstück ADBC nach wahrem Maße mißt. Diese Figur ist alsdann ein Kärtchen oder Plänchen des vermessenen Grundstückes.



War z. B. AB = 751', AE = 250', EF = 329' u. s. f., so würde man 751 der zu Grunde gelegten, verjüngten Maßtheile auf A_1B_1 abtragen, und davon 250 auf AE, und 329 auf EF vertheilen, dann würden aus den Punkten E_1 und F_1 die beiden Perpendikel E_1C_1, F_1D_1 gezogen und auch diese nach dem verjüngten Maße entsprechend lang gemacht. Die Punkte $A_1D_1B_1C_1$ geben dann mit einander verbunden das Plänchen des Grundstückes ADBC.

Es ist nicht nöthig — bisweilen auch nicht möglich — die Perpendikel von allen Eckpunkten auf eine Standlinie wie AB zu fällen. Man kann in diesem Falle eines der schon bestimmten Perpendikel, wie CE oder auch eine bereits gefundene schiefe Linie, wie CB, als neue Standlinie annehmen und auf dieselbe die übrigen Eckpunkte (wie z. B. e, f, g, h) durch senkrechte Linien beziehen; das Verfahren bleibt stets das gleiche.

C. Bemerkungen und Ausführungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über Messungen im Freien.

(Siehe Heft III der Aufgabensammlung.)

Die Uebungen 14, 15 und 17 finden durch das Vorausgegangene ihre Erläuterung.

Die Uebung 16 dient zu Examinatorien, die in schriftlicher oder mündlicher Weise gehalten werden können. — Zu Aufgabe 7 dieser Uebung ist zu bemerken, daß in der Gränzlinie ab ein Stab so gesteckt werden muß, daß er sich zugleich in der verlängerten Richtung ed befindet. (Dieß kann Einer oder können Zwei leicht durch Visiren bewerkstelligen. Man bringt z. B. einen Stab zwischen a und b in die gleiche Richtung von ab und sieht dann nach, ob derselbe gerade in der Richtung ed ist oder

nicht. Ist dieses nicht der Fall, so rückt man mit einem neuen Stabe entweder gegen a oder gegen b hin, bis derselbe endlich mit e und d ebenfalls in der gleichen Richtung ist.) Die übrigen Fragen sind leicht zu beantworten.

Die Uebung 18 mag von den Schülern hauptsächlich zu Wiederholungen benutzt werden, etwa auch in einer für das Messen bestimmten Stunde, wo das Wetter keine Uebungen im Freien erlaubt.

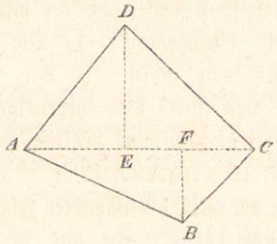
Beispiele: Aufgabe 8. „Beschreibet das Verfahren, wie man mittelst des Meßkreuzes ein Quadrat ausstecken kann, dessen Seite $120^1/_2{}'$ mißt." — Antwort. Man steckt eine gerade Linie von $120^1/_2{}'$ Länge ab und errichtet mittelst des Meßkreuzes in die Endpunkte derselben nach der nämlichen Seite hin Perpendikel, denen man ebenfalls die Länge von $120^1/_2{}'$ gibt. Die andern Endpunkte der Perpendikel müssen, wenn alles genau gemacht worden ist, ebenfalls $120^1/_2{}'$ von einander abstehen.

So ähnlich die Aufgabe 10.

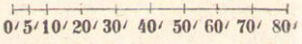
Die Aufgaben unter 16 sollen die ältern Schüler zur nützlichen Selbstthätigkeit im Messen bei Hause veranlaßen.

Aus Uebung 19. Aufgabe 8, d. „Es ist das Plänchen eines unregelmäßigen Vierecks zu verzeichnen und dessen Flächeninhalt zu bestimmen. Die Diagonale desselben sei $= 69'$, das Stück der Diagonale bis zur Höhe des einen Dreiecks $= 31'$, von hier bis zur Höhe des zweiten Dreiecks $= 17'$, die erstere Höhe selbst $= 37^1/_2{}'$ und die zweite $= 22'$."

Der Schüler zeichnet:



Verjüngter Maßstab.



und bemerkt dazu:

$AC = 69'$; $AE = 31'$; $EF = 17'$

$ED = 37^1/_2{}'$; $BF = 22'$ verjüngtes Maß.

Dreieck $ADC = \frac{37^1/_2 \square' \cdot 69'}{2} = 2587^1/_2 \square' : 2 = 1293^3/_4 \square'$

Dreieck $ACB = \frac{69 \square' \cdot 22'}{2} = 759 \square' = 759 \square'$

Also $ABCD = 2052^3/_4 \square'$.

So viele □′ die Fläche in Wirklichkeit enthält, so viele verkleinerte Quadrätchen enthält das Plänchen nach dem beigezeichneten Maßstabe.

Ganz ähnlich gehen die übrigen verwandten Aufgaben dieser Uebung.

Zu Aufgabe 13. Antwort. Man könnte zunächst das Rechteck **achd** abstecken; die Seiten würden so viele Fuß lang gemacht, als diejenigen auf dem Plänchen verjüngte Maßtheile enthalten. Aus der Mitte der Seite **ac** würde mit Hülfe des Meßkreuzes ein Perpendikel von der wahren Länge **ib** nach oben abgesteckt, ebenso aus der Mitte von **hd** das Perpendikel **lf** nach unten, endlich noch aus den entsprechenden Abständen von **h** und **d** die beiden Perpendikel **kg** und **me** in wahrer Länge, worauf alle abgesteckten Punkte **a b c d e f g h** in gehöriger Verbindung das wirkliche Vieleck darstellen würden, dessen Plänchen in der Aufgabe gezeichnet ist.

§ 23.

Schlußbemerkung zur dritten Abtheilung mit Rücksicht auf die drei Hefte der Aufgabensammlung dieser Schulstufe.

Was den Umfang des geometrischen Lehrstoffes anbetrifft, den wir den drei Jahresklassen der mittleren Schulstufe zugewiesen haben, so ist zunächst zu bemerken, daß derselbe **im Allgemeinen** auch bei dem künftigen Ausbau der Volksschule, beziehungsweise der obern Abtheilung derselben, nicht als zu ausgedehnt betrachtet werden kann.

Wir haben für den geometrischen Unterricht der mittlern Schulstufe folgende Punkte bezeichnet und durchgeführt: 1. Die Auffassung der Raumelemente. 2. Das Messen von Linien. 3. Die Betrachtung der Winkel. 4. Die Konstruktion von drei- und mehreckigen Figuren und hieraus folgende Auffassung ihrer nächsten und praktisch wichtigsten Eigenthümlichkeiten. 5. Die Bildung der Quadratmaße, d. i. der Flächenmaße, und Ausmessung der mit ihnen am meisten verwandten Flächenstücke, nämlich der Rechtecke. 6. Ausmessung des Dreiecks und der aus beliebigen Dreiecken zusammengesetzten Vier- und Vielecke mit entsprechenden praktischen Anwendungen.

Man wird, was die allgemeine Stoffbegränzung anbelangt, kaum je einen dieser Punkte weglassen können, so lange man wenigstens noch geometrischen Unterricht in der Realabtheilung der Volksschule ertheilen will. Dagegen läßt natürlich die Behandlung dieser Abschnitte stets eine größere oder geringere Ausführlichkeit zu. Wir wollten hier im Handbuche absichtlich

nicht zu wenig einläßlich verfahren, um theils den Gegenstand doch möglichst hinreichend zu beleuchten, theils die nöthige Auswahl und Abwechslung zu bieten.

Um nun aber auch diejenigen Lehrer, deren Schulverhältnisse für einen gedeihlichen Unterricht noch am ungünstigsten gestaltet sind, nicht unberücksichtigt zu lassen, wollen wir hier kurz andeuten, worauf sich ihre Lektionen im geometrischen Unterricht etwa beschränken und in welcher Weise sie neben denselben die geometrische Aufgabensammlung am zweckmäßigsten benutzen könnten.

Wir stellen uns z. B. eine ungetheilte Primarschule von 6 starken Jahresklassen vor und denken uns, der Lehrer beschäftige sich persönlich mit jeder der drei Oberklassen nur eine halbe Stunde wöchentlich in dem genannten Unterrichtsfache; dieß würde nach Abzug von 8 Wochen Ferien im Jahr 44 halbe Stunden ausmachen.

Nun sind höchstens bloß 18 bis 20 halbstündige Lektionen für die frische Stoffentwicklung nothwendig; dazwischen fallen die übrigen 24 bis 26 halbe Stunden, die der Lehrer für Wiederholungen, Uebungen, Lösung und Durchsicht von Aufgaben mit den Schülern verwenden kann.

Nehmen wir jetzt das I. Heft der Aufgabensammlung. Der Lehrer hält eine Lektion (die Schüler haben hiezu das Heft nicht vor) über „Körper und Flächen", „ebene und unebene Flächen" ungefähr in dem Sinne, vielleicht nur etwas kürzer, als es in § 12, Nr. 1 dargestellt ist. Dann läßt er, indem er zu einer andern Klasse übergeht, die Schüler auf ihrer Schiefertafel aus Uebung 1 etwa die 1ste, 3te, 5te und 7te Aufgabe lösen (die hier abgebildeten Körper werden den Schülern wirklich vorgelegt). Die bezeichneten Aufgaben können die Schüler etwa mit einem Punkt oder mit einem Kreuzchen anmerken. Wer sie gelöst hat, kann auch noch die übrigen versuchen. Nach Hause können z. B. die Aufgaben 1, 3, 4, 5, 7 der Uebung 2 gegeben werden.

Die Durchsicht dieser Aufgaben hält der Lehrer in der Weise, wie ers auch bei den übrigen Fächern zu thun pflegt; auch vorgerücktere Schüler können hiezu verwendet werden. In der folgenden Woche ist eine Lektion zur weiteren Stoffentwicklung noch nicht nöthig. Da verwendet der Lehrer die halbe Stunde zu Examinatorien über die erste Lektion, die sich auf die Uebung 1 und 2 bezog; insbesondere aber nimmt er nun mit den Schülern die Uebung 3 mündlich durch; dann wieder Bezeichnung von Aufgaben nach Hause. So geht es im Wesentlichen auch bei

dem Folgenden fort. Der eine Lehrer wird etwas mehr, der andere etwas weniger Aufgaben lösen lassen können.

Die Meinung, daß durchaus alle Aufgaben der Hefte in allen Schulen gelöst werden müßten, wenn etwas Ordentliches bei diesem Unterrichte herauskommen solle, beruht auf übertriebener Aengstlichkeit oder auf Unkenntniß der Sache, oder noch irgend einem andern Grunde. Das Lehrmittel besteht deßwegen aus einer Aufgabensammlung, damit man, wie beim Rechnungslehrmittel, Aufgaben auswählen kann je nach den Umständen; der Lehrer, der einer oder zwei Klassen vorsteht, bedarf mehr Aufgaben und Uebungsstoff, als derjenige, der sechs Klassen hat, und auch dieser wechselt gern etwa einmal in den Aufgaben ab.

Fahren wir noch ein wenig im I. Hefte fort. Eine frische Lektion, oder besser zwei, muß der Lehrer wieder geben, „über die Linien, gerade und krumme, und das Ziehen der Linien zur Umschließung von Flächenstücken." Dann kann er sich wieder zwei bis drei Mal in Repetitionen und Aufgaben mit den Schülern beschäftigen, der Stoff wird besonders aus den Uebungen 4, 5, 6, und 7 genommen und auch hieraus wird wieder den Schülern nach Hause zu thun gegeben. Die Uebung 8 kann der Lehrer, der nur ein Minimum des Lehrstoffs durchnehmen will, ganz weglassen.

Hinsichtlich des zweiten Abschnittes, „das Messen gerader Linien" sind wieder ungefähr zwei entwickelnde Lektionen nothwendig. In vier bis fünf andern Malen werden die hauptsächlichsten Aufgaben im Längenmessen übungsweise mit den Schülern durchgenommen. Dann folgen aus dem dritten Abschnitt die Lektionen und Uebungen „über die Winkel" wechselsweise nach einander. Entwickelnde Lektionen bedarf es hier höchstens etwa fünf bis sechs. Dazwischen fallen: die Durchsicht der von den Schülern gelösten Aufgaben, die Repetitionen und Examinatorien, die besondern Uebungen und Anweisungen zur Lösung einzelner vorzüglich wichtiger Aufgaben. Dieß nimmt auch wieder etwa 8 halbe Stunden in Anspruch. Nun hätten wir aber erst im Ganzen kaum 30 halbe Stunden; es könnte also noch mehr als 14 übrige für spezielle Aufgabenlösungen und Examinatorien verwendet werden.

Zur Abkürzung wird der zu stark beladene Lehrer die Uebung 23 und 24 weglassen können, indem er aus denselben in späteren Kursen die Hauptpunkte noch berühren kann; aus den übrigen Uebungen wird er eine Auswahl von Aufgaben lösen lassen; z. B. aus Uebung 17 die

Aufgaben 1, 2, 4, 10, 11, 15. Aus Uebung 19 die Aufgaben 1, 2, 5, 6, 9. Aus Uebung 20 die Aufgaben 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 15. Aus Uebung 21 die Aufgaben 1, 4, 6, 7, 9. Aus Uebung 22 die Aufgaben 2, 3, 6, 8, 13, 16, 18, 21, 22.

Indessen hat gerade der Lehrer mit vielen Schulklassen oft auch viele Aufgaben zur stillen Beschäftigung für die Schüler nothwendig, und so wird er nicht selten gerne noch zu mehreren weiteren Aufgaben greifen, wäre es auch nur, um den Schülern passenden Stoff zur Thätigkeit in einem praktisch so wichtigen Unterrichtsfache zu bieten.

Im zweiten und dritten Heft wird Gang und Auswahl ganz ähnlich gemacht werden können, wie oben mit Beziehung auf das erste angedeutet worden ist. Indem wir auf die spezielle Behandlung des Lehrstoffs in § 16 bis und mit §§ 21 und 22 verweisen und wiederholen, daß zur Behandlung des Lehrstoffs eines jeden Heftes höchstens 18 bis 20 Lektionen für die frische Stoffentwicklung nothwendig sind, stellen wir wieder eine Auswahl von Aufgaben zusammen, die man in einer ungetheilten Schule wohl wird zu Ende führen können.

Aus dem II. Heft Uebung 2 die Aufgaben 1, 2, 4, 5, 6, 9, 12, 13. Aus Uebung 3 die Aufgaben 7, 9, 10. Aus Uebung 4 die Aufgaben 10, 11, 12, 14, 15. Aus Uebung 5 die Aufgaben 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14. Aus Uebung 6 Aufgabe 5. Aus Uebung 7 die Aufgaben 1, 2, 4, 5. Aus Uebung 8 die Aufgaben 1, 2, 3, 5. Aus Uebung 9 die Aufgaben 1, 2, 4, 8.

Aus dem zweiten Abschnitt dieses Heftes, Uebung 10 die Aufgaben 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13. Aus Uebung 11 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 8, 9, 13, 14. Aus Uebung 12 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, Aus Uebung 13 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 13. Aus Uebung 14 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 5 c, 9. Aus Uebung 15 die Aufgaben 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Aus Uebung 16 die Aufgaben 2, 4, 6, 7, 8, 9. Aus Uebung 18 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 5, 8.

Aus dem dritten Abschnitte dieses Heftes, Uebung 19 die Aufgaben 3, 6. Aus Uebung 20 die Aufgaben 5, 7, 10, 12, 18. Aus Uebung 21 die Aufgaben 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19. Aus Uebung 22 die Aufgaben 1, 3, 6, 10, 16, 17, 21, 24, ... 28, 29. Aus Uebung 23 die Aufgaben 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14. Aus Uebung 24 die Aufgaben 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11.

Aus dem III. Hefte Uebung 1 die Aufgaben 1, 2, 3, 5, 6, 7,

10, 11, 13, 15, 16, 18. Aus Uebung 2 die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10. Aus Uebung 3 beliebige Aufgaben. Aus Uebung 4 die Aufgaben 4, 5, 6. Aus Uebung 5 die Aufgaben 1, 3, 5, 7. Aus Uebung 6 die Aufgaben 1, 3, 4, 5, 7, 10, 11.

Aus dem zweiten Abschnitt dieses Heftes. Anmerkung: Der Lehrer, der sich nur auf das Allernothwendigste beim Unterrichte beschränken will, braucht die besondern Sätze der Ausmessung des Parallelogramms, des Trapezes und unregelmäßigen Vierecks nicht zu lehren; er läßt diese Flächenstücke, wie die Vielecke, einfach nach einzelnen Dreiecken berechnen; der Schüler rechnet dann zwar etwas weitläufiger, aber er kann sich doch helfen. In dieser Weise können dann gelöst werden: Aus Uebung 8 z. B. die Aufgaben 8, 10 ꝛc. Aus Uebung 9 die Aufgaben 10, 12. Aus Uebung 10 die Aufgabe 10. Aus Uebung 11 die Aufgaben 2, 3, 5 b. Aus Uebung 12 und 13 beliebige.

Mit Beziehung auf die „Vermessungen im Freien" zeigt der Lehrer, der sich vorderhand bloß auf ein Minimum des Unterrichtsstoffes beschränken will, den Schülern einfach, wie man z. B. ein Gartenbeet, den ganzen Garten, ein Ackerland, ein Wiesenstück ꝛc. ausmißt und hiezu eine einfache entsprechende Verzeichnung entwirft. Aus dem 3. Abschnitt des III. Heftes wählt er daher zur Behandlung, was ihm bei seinen Verhältnissen am passendsten scheint.

Dieß wäre nun ein Beispiel zur Beschränkung des geometrischen Lehrstoffes an einer ungetheilten Schule von sehr starker Schülerzahl. Natürlich wird auch hier noch vorausgesetzt, daß dem Lehrer die nothwendigen Hülfsmittel zum Unterricht, wie die Modelle zu den Veranschaulichungen, besonders aber auch Zirkel zum Zeichnen für die Schüler ꝛc. nicht mangeln. So aber werden die Schüler auch bei diesem Plane immer noch ganz Befriedigendes in diesem Fache leisten, namentlich wenn der Lehrer im Stande ist, anregende und einleuchtende Lektionen über die Hauptpunkte des Unterrichts zu ertheilen und hierauf die Thätigkeit der Schüler im Aufgabenlösen zweckmäßig zu überwachen. Denn in letzterer Hinsicht ist's immer besser, die Schüler lösen etwas weniger Aufgaben, aber sorgfältig und genau, als daß sie eine Masse von Aufgaben überhudeln, woraus weder Einsicht noch Fertigkeit, noch rechte Kenntnisse sich ergeben.

Wenn endlich bei jeder Lektion, die der Lehrer in schlichter Wirksamkeit in seiner Schule ertheilt, nur halb so viel herauskommt als bei den

oft glänzenden Probelektionen in den Kapitelsversammlungen, so darf man um den Erfolg nicht bangen, und die Zweifel über die Möglichkeit dieses Unterrichts in der Volksschule würden dann von selbst weichen.

Wir sind überzeugt, daß der Lehrer bei gutem und ernstlichem Willen auch unter sehr ungünstigen Verhältnissen dennoch in diesem Fache so viel Schönes zu leisten im Stande ist, daß sich hieraus für die Schüler in geistiger Hinsicht wie mit Beziehung auf ihre Befähigung fürs praktische Leben wahrhaft segensreiche Früchte ergeben können.

Das rechte Gelingen wird also besonders vom einzelnen Lehrer abhangen, und da wünschen wir demjenigen, der bisher wegen anderer Lieblingsneigungen nicht zur Behandlung dieses Faches kam, daß er auch diesem Unterrichte in Zukunft einige Gunst zuwenden möchte; demjenigen aber, der aus irgend welchem Vorurtheil bisher den geometrischen Unterricht überging, möge die nöthige Unbefangenheit und Sachkenntniß zu Theil werden; dem älteren, noch weniger mit dem Fache vertrauten Lehrer wünschen wir ein frisches, muthiges Beginnen mit dem Streben nach möglichster Einfachheit, dem jüngern Amtsgenossen dagegen ein fleißiges Studiren und Einhalten des Lehrplanes, und endlich Allen, die in ihrem Schulamte sonst schon eine schwere Bürde zu tragen haben, eine gesunde und feste Kraft und die Freude, für ihren Fleiß und ihre Sachkenntniß aus dem Unterrichte schöne Früchte ersprießen zu sehen.

Vierte Abtheilung.

Schluß des geometrischen Unterrichts

auf der dritten Schulstufe, oder der zweiten Realabtheilung (Realergänzungsschule).

Vom zurückgelegten 12. bis und mit dem 15. Altersjahre.

I. Siebentes Schuljahr.

(Vom zurückgelegten 12. bis 13. Altersjahre.)

§ 24.

Aufgabe.

Bildung der einfachern von Ebenen begränzten geometrischen Körper aus gegebenen Bestimmungsstücken und nähere Betrachtung dieser Körper hinsichtlich ihrer allgemeinsten Eigenschaften. Darstellung und Ausmessung ihrer Oberflächen. Geometrische Zeichnung dieser Körper in Parallelperspektive (isometrische Zeichnungsart). Einleitung zum Körpermessen: die Körpermaße und Gewichte; praktische Aufgaben.

§ 25.

Bildung einfacher von Ebenen begränzter geometrischer Körper und Darstellung und Ausmessung ihrer Oberflächen.

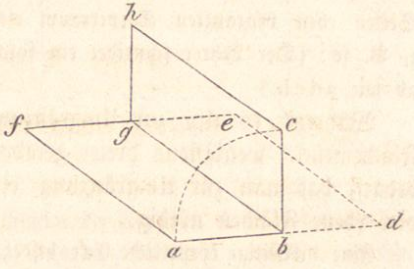
Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen.

A. Lehrer: Ganz in ähnlicher Weise, wie man mit Linien Flächen einschließen kann, so kann man auch mit Flächen Körper oder körperliche Räume einschließen. Wir wollen dieß zunächst mit ebenen Flächen versuchen; und da nehmen wir, wie bei der Bildung des Winkels und des Dreiecks, wieder die Drehung zu Hülfe.

Eine Ebene kann nämlich um eine gerade Linie so umgedreht werden, wie wir früher die gerade Linie um einen Punkt drehten. Wenn ich ein Blatt in einem Buche umwende, so kann dieß die Drehung einer

Ebene (des ebenen Blattes) um eine gerade Linie (die Falte) darstellen. (Der Lehrer zeigt dieß am Buche, sowie etwa noch durch ein ebenes Blatt Papier, das er folgendermaßen umfaltet):

Sind die beiden Blattstücke auf einandergelegt, so kann ich das eine vom andern beliebig stark wegdrehen, z. B. eine Viertelsumdrehung, eine halbe Umdrehung ꝛc. — Seht so! — Der Abstand des einen Blattes vom andern um eine beliebige Drehung bildet einen Flächenwinkel.



Dieser wird gemessen durch zwei Linien ab und bc, die auf der Drehungslinie gb senkrecht stehen. Er ist ein rechter und die Ebenen heißen senkrecht aufeinander, wenn die Drehung eine Viertelsumdrehung beträgt, oder wenn die Schenkel ab und bc senkrecht aufeinander stehen. Fallen aber diese Schenkel wieder in eine gerade Linie, so fallen auch die Ebenen wieder in eine Ebene u. s. f.

Wer kann mir nun mit diesen Blättern einen spitzen, — einen stumpfen Flächenwinkel darstellen? — Wie müssen die beiden Schenkel ab und bc zu einander stehen, wenn der Flächenwinkel 60^0 betragen soll? — Antwort: Diese Schenkel müssen ebenfalls einen Winkel von 60^0 mit einander bilden. — Sucht stumpfe, rechte, spitze Flächenwinkel an Gegenständen in der Schulstube auf! — Welche kommen am meisten vor?

Auf ähnliche Weise kann der Lehrer zeigen, daß zwei Ebenen mit einander parallel laufen, wenn sie mit einer dritten Ebene parallele Durchschnitte und gleiche Winkel nach der gleichen Seite hin bilden.

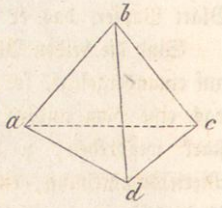
Fortsetzung:

Mit zwei Ebenen kann man noch keinen körperlichen Raum ganz einschließen, und auch mit dreien sogar noch nicht; seht nur!

(In ein zusammengefaltetes Blatt macht der Lehrer von der Falte an einen Schnitt und schiebt, indem er die beiden Blatttheile von einander dreht, ein drittes Blatt durch die Schnitte. Damit zeigt er den Schülern eine dreiseitige körperliche Ecke. Oder er kann z. B. ein Stück von einer Rübe nach zwei zusammenstoßenden ebenen Flächen beschneiden; macht er dann durch einen neuen Abschnitt eine dritte ebene Fläche, die eben-

falls noch mit der Kante der beiden ersten zusammentrifft, so bilden die drei ebenen Flächen wieder eine dreiseitige körperliche Ecke.)

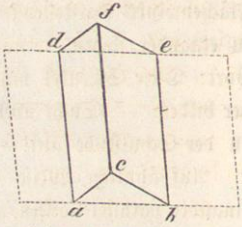
Von einer dreiseitigen körperlichen Ecke läßt sich erst durch eine vierte Ebene einen nach allen Seiten eben begränzten Körperraum einschließen, z. B. so: (Der Lehrer schneidet ein solches Stück ab wie adcb.)



Während es also zur Umgränzung eines Flächenstücks wenigstens dreier gerader Linien bedarf, hat man zur Umgränzung eines Körperraumes wenigstens vier ebene Flächen nöthig.

Eine dreiseitige körperliche Ecke bildet einen dreiseitigen Gipfelraum (Pyramidalraum). Wird ein solcher der Spitze (b) gegenüber durch eine Ebene geschlossen (wie oben durch acd), so heißt der hiedurch entstehende Körper ein dreiseitiger Gipfel oder dreiseitige Pyramide.

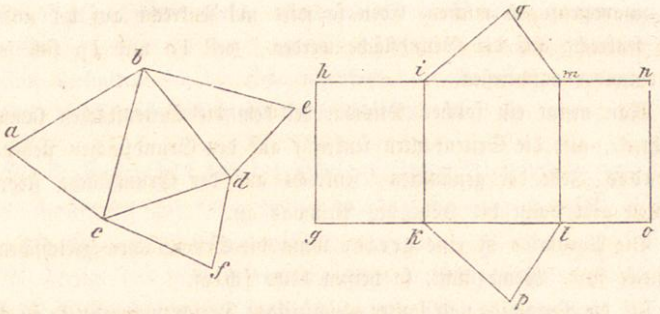
Man kann auch zwei zusammenstoßende ebene Flächen durch eine dritte so durchschneiden, daß sämmtliche Durchschnittslinien oder Kanten mit einander parallel werden. (Der Lehrer zeigt dieß, indem er an einem geeigneten Körperstück wirklich drei solche Schnitte macht, oder indem er einfach ein Blatt Papier nach drei parallelen Streifen in folgender Weise zusammenlegt):



Der Raum zwischen diesen Flächen, der nach oben und unten offen ist, wird ein dreiseitiger Säulenraum (prismatischer Raum) genannt. Wird derselbe oben und unten durch zwei parallele Ebenen, wie abc und def, geschlossen, so heißt dieser nach allen Seiten von Flächen eingeschlossene Raum oder dieser geometrische Körper ein dreiseitiges Prisma oder eine dreiseitige Säule.

Pyramiden und Prismen sind die gewöhnlichsten von Ebenen begränzten Körper.

Denkt man sich sowohl bei der dreiseitigen Pyramide als beim dreiseitigen Prisma die Gränzflächen um die entsprechenden Kanten in eine Ebene umgelegt, so bildet dieser Zusammenhang der einzelnen Flächen von einem jeden Körper das Netz. Netz und Oberfläche eines Körpers, wenn dieselbe entwickelt ist, bilden also das Gleiche; z. B. so:



Der Lehrer hat aus festem Papier die Netze zu einer dreiseitigen Pyramide und zu einem dreiseitigen Prisma geschnitten, ungefähr wie hier. Dann biegt er die einzelnen Flächen um die gemeinschaftlichen Seiten gegen einander und stellt so die Pyramide und das Prisma dar. Hierauf Fragen, Aufgaben und Erläuterungen, die sich an diese Körperbildung anschließen.

Z. B. Wie viele ebene Flächen sind zur Begränzung eines dreiseitigen Prismas, einer dreiseitigen Pyramide nothwendig?

Könnte man auch mit weniger als 4 ebenen Flächen einen Körper begränzen?

Ist jeder Körper, der von 4 ebenen Flächen eingeschlossen ist, eine Pyramide?

Wie müssen beim Netz der Pyramide die zwei äußern Seitenkanten **ab** und **be** sich zu einander verhalten, damit sie sich bei der Umbiegung zu einer gemeinschaftlichen Kante zusammenfügen können? Antwort. Sie müssen einander gleich sein.

Wie muß das Dreieck **cfd**, das die Grundfläche der Pyramide bilden soll, beschaffen sein? Antw. Es muß ac = cf, fd = de ꝛc. sein.

Im Uebrigen können die drei zusammenhängenden Seitendreiecke **abc**, **cbd** und **dbe** beliebig sein, nur müssen je zwei der Winkel bei b zusammen mehr betragen als der dritte, sonst könnten sich ab und be nicht zu einer körperlichen Ecke zusammenschließen. (Der Lehrer kann dieß leicht zeigen.)

Wenn bei dem Netz des Prismas die drei zusammenhängenden Seitenflächen Rechtecke sind, wie kommen dann die Seitenkanten **ik**, **ml** ꝛc. zur Boden- und Deckfläche zu stehen?

Antw. **ik** wird senkrecht stehen auf **kl** und **kp**, weil sich **gk** und

kp zusammenfügen müssen. Eben so wird ml senkrecht auf kl und lp, also senkrecht auf die Grundfläche werden, weil lo und lp sich wieder an einander anschließen.

Man nennt ein solches Prisma, bei dem die Seitenflächen sämmtlich Rechtecke, also die Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen, ein gerades. Jede der genannten, senkrecht auf der Grundfläche stehenden Kanten gibt dann die Höhe des Prismas an.

Die Pyramide ist eine gerade wenn die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind. Wenn nicht, so heißen beide schief.

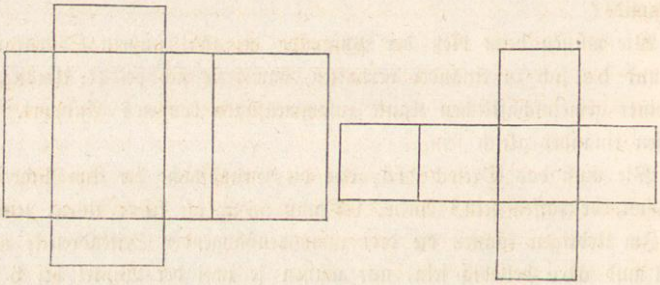
Ist die Pyramide von lauter gleichseitigen Dreiecken begränzt, so ist sie ein ganz regelmäßiger Körper (Tetraeder). Seht diesen. Der Lehrer weist einen solchen vor.

Man kann nun auch leicht die Netze zu vier- und mehrseitigen Pyramiden und Prismen bilden; der Lehrer mag solche vorweisen.

Am meisten Wichtigkeit hat die rechtwinklige (rechteckige) Säule, bei der sowohl die Seitenflächen als die Grundflächen Rechtecke sind. (Der Lehrer weist ein Modell hievon vor.)

Wären alle diese Rechtecke (nämlich die Seitenflächen und Grundflächen) Quadrate; was wäre dieß dann für eine Säule? — Antwort. Ein Würfel (Kubus).

Hier sind die Netze zu diesen beiden Körpern.



Beschreibet diese beiden Säulen nach den Eigenschaften, die ihr aus deren Bildung durch die Netze findet; z. B.

Wie verhalten sich je zwei einander gegenüberstehende Seitenflächen, — je zwei einander gegenüberstehende Kanten? — Antwort. Je zwei solche Flächen sind gleich und parallel, je zwei solche Kanten ebenfalls.

Wie viele Diagonalen gehen durch eine dieser Säulen? — Wie verhalten sich diese Diagonalen? — Antwort. Es gibt in jeder der

beiden Säulen zwei gleiche Diagonalen durch den ganzen Körper hindurch.

Wie verhalten sich die Flächenwinkel? — Antwort. Es sind alle einander gleich, jeder ist gleich einem Rechten. U. s. f.

Nr. 2. Aufgaben für die Schüler (theils bei Hause zu lösen.)

1. Konstruirt auf festem Papier das Netz zu einem Würfel und biegt dann die einzelnen Quadrate passend zusammen.

2. Fertigt das Netz zu einem geraden dreiseitigen Prisma, bei welchem die Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind.

3. Zwei gleiche derartige Prisma lassen sich zu einem vierseitigen Prisma zusammenfügen, bei welchem die Grundflächen Rechtecke sind. Bildet zwei solche Körper; man wird sie bei der Ausmessung des körperlichen Inhaltes benutzen.

4. Bildet auf ähnliche Weise eine rechtwinklige Säule, die $1/2'$ lang, $1/3'$ breit und $1/3'$ hoch ist. (Die Schüler werden später dieses Gefäß zur Darstellung der Einheit des Hohlmaßes = 1 Immi (Mäßli) oder 1 Maß benutzen.)

5. Bildet einen eben solchen Hohlraum der $1/3'$ lang, $1/3'$ breit und $1/6'$ hoch ist. (Dieses Gefäß wird später zur Darstellung der Menge Wassers, deren Gewicht die Gewichtseinheit „Pfund" darstellt, benutzt werden. *

6. Wie groß ist die Oberfläche eines Kubikfußes?

7. Wie groß ist die Oberfläche einer geraden Säule, bei der jede Grundfläche ein 3′ langes und 2′ breites Rechteck bildet und eine Höhenkante 8′ beträgt?

8. Wie groß ist die Oberfläche einer vierseitigen geraden Pyramide, bei welcher die Grundfläche ein Quadrat von 4′ Seite bildet und die Spitze von jeder Seite des Quadrates um 6′ 3″ absteht?

9. Eine rechtwinklig säulenförmige Kiste soll inwendig mit Blech ausgelegt werden. Die Bodenfläche ist (im Innern) 4′ 3″ lang und $3\,1/2'$ breit, jede der Seitenflächen dazu 3′ hoch, die Deckfläche soll nicht belegt

---

* Hier findet sich auch die geeignete Veranlassung für den Lehrer, auf die Verfertigung einfacher Papparbeiten (wie z. B. verschiedenartiger Schachteln ꝛc.) aus Netzen hinzuweisen, was viele Schüler auf eine angenehme und nützliche Beschäftigung in Mußestunden bei Hause führen kann.

werden. Wie viele □′ und □″ Blech sind zur Auslegung nothwendig und wie viel kostet dieselbe, wenn man auf den □′ 82 Rappen zu zahlen hat?

10. Ein einfacher Schrank, dessen Boden- und Deckfläche (wieder im Innern) Rechtecke von 6′ Länge und 2′ Breite sind, soll inwendig nach allen Seiten mit Tuch ausgeschlagen werden; wie viele □′ sind nothwendig, wenn die Höhe gerade 9′ beträgt? — Wie viele Ellen ellenbreites Tuch macht dieß, und wie hoch kommt das nothwendige Tuch zu stehen, wenn die Elle $3^1/_3$ Franken kostet?

11. Wie groß ist die Oberfläche eines rechtwinklig säulenförmigen Quadersteins, dessen Grundfläche ein Quadrat von $3^1/_2$′ Seite bildet und bei dem eine Höhenkante 6′ mißt?

12. Ein Thurm trägt eine sechsseitige gerade Pyramide, welche mit Kupferblech bedeckt werden soll. Wenn nun jede Seitenfläche ein gleichschenkliges Dreieck von 5′ Grundlinie und 50′ Höhe bildet, wie viele Quadratfuß Kupferblech decken die sechs Dreiecke dieser Pyramide?

§ 26.

Zeichnung der einfachern geometrischen Körper.

(Nach isometrischer Darstellungsweise.)

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen und Aufgaben.

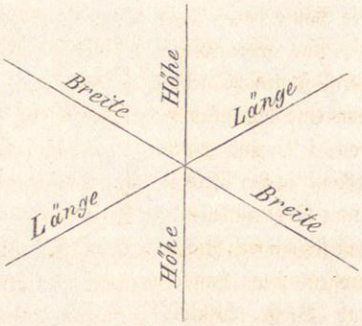
A. Lehrer: Wir wollen nun einfache Körper nach einem bestimmten Verfahren zu zeichnen suchen und zwar so, daß wir aus der Zeichnung die wirkliche Gestalt und Größe des dargestellten Körpers, so wie aller seiner Theile entnehmen können.

Da ergibt sich nun zunächst eine Schwierigkeit: Wir können auf das Zeichnungsblatt wohl eine Fläche zeichnen; wie soll aber die dritte Ausdehnung des Körpers, die über diese Fläche hinausgeht, auf dem Blatte dargestellt werden?

Um hier zu helfen, wollen wir ganz ähnlich verfahren, wie man bei der Darstellung der drei Ausdehnungen eines Körpers verfährt. Wir wissen, daß die Länge senkrecht auf der Breite und die Höhe senkrecht auf Länge und Breite zugleich steht; es bilden also diese drei Abmessungen an Körpern (oder im Raume) lauter gleiche, nämlich rechte Winkel mit einander.

Wenn wir nun diese drei Abmessungen auf der Zeichnungsfläche verzeichnen wollen und zwar auch so, daß sie mit einander in dieser Fläche

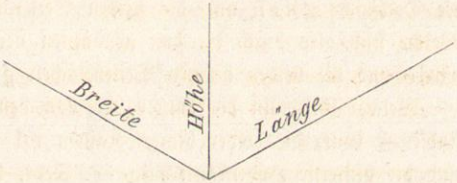
gleiche Winkel bilden, wie würde dann der Winkelraum um den Durchschnittspunkt herum getheilt? — Gut, es müßte einer dieser Winkel $360^0 : 3$ oder 120^0, und jeder Nebenwinkel 60^0 betragen; sie würden sich also folgendermaßen darstellen:



Hier bildet die Länge mit der Breite den Winkel von 120^0 und 60^0, ebenso die Länge und Breite mit der Höhe.

Der Lehrer läßt 3 Stäbchen aus einem Punkte so gehen, daß jedes auf dem andern senkrecht steht und läßt dann die Schüler nochmals vergleichend wiederholen, daß während diese drei Richtungen im Raume lauter rechte Winkel mit einander bilden, sie nach der angenommenen Verzeichnungsweise auf dem Blatte lauter Winkel von 120^0 oder 60^0 mit einander bilden.

Er wähle fernere Beispiele zur Vergleichung. Z. B. beim Bauen bezeichnet man vorerst Länge und Breite des Fundamentes und errichtet dann in die Durchschnittspunkte oder Eckpunkte die Stangen (das Lehrgespann), welche die Höhen angeben sollen. Bei der angedeuteten Verzeichnungsweise würde man aber die Breite an die Länge unter dem Winkel von 120^0 antragen und alsdann diesen Winkel halbirend die Höhe ziehen, so daß also z. B. eine Hausecke sich folgendermaßen darstellen würde:

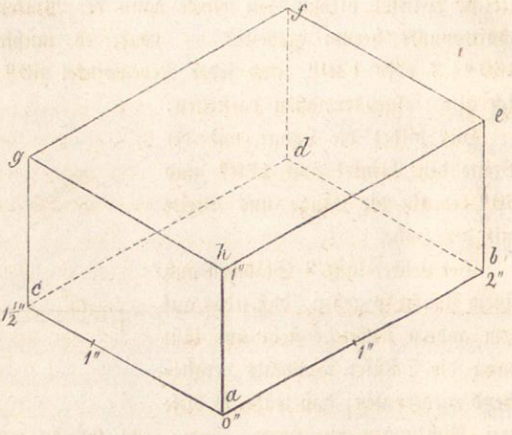


Man gibt nun auch ferner den Linien, welche Länge, Breite und Höhe andeuten, stets die Anzahl Maßtheile, die sie in Wirklichkeit haben müssen.

B. Wir wollen nun sofort eine bestimmte Zeichnungsaufgabe lösen. Hier ist eine rechtwinklige Säule von 2″ Länge, $1\frac{1}{2}$″ Breite und 1″ Höhe. Zeichnen wir zuerst deren Bodenfläche.

Die Linie ab machen wir 2″ lang; sie muß die Länge vorstellen. Daran zeichnen wir unter dem Winkel von 120^0 eine zweite Linie ac $= 1\frac{1}{2}$″, diese gibt die Breite an. Hierauf muß die Seite cd als zweite Längenrichtung mit ab parallel gezogen werden, ebenso bd als

Breitenrichtung mit ac. Es stellt sonach abcd die Bodenfläche der Säule dar.



Aus jeder Ecke der Bodenfläche geht nun eine Höhenkante von 1", und eine jede ist in der Zeichnung so darzustellen, daß sie mit den Richtungen der Länge und Breite Winkel von 120° und 60° bildet.

Wir ziehen also ah so, daß Winkel cah = 60° und Winkel hab = 60° wird und hierauf die übrigen Höhenkanten gc, df und be mit ah parallel und machen jede = 1". Endlich sind die Endpunkte hef und g bloß noch entsprechend mit einander zu verbinden, um durch die obere Deckfläche ghef das Ganze zu schließen.

Wenn wir nun die Zeichnung näher betrachten, so bemerken wir, daß sie uns drei Flächen des Körpers unserm Auge ganz zuwendet, während die übrigen von den erstern ganz verdeckt sind?

Welches sind die drei unserm Auge zugekehrten Flächen? — Gut, die Deckfläche ghef und die beiden Seitenflächen ghac und heba. Welche sind also durch die drei genannten verdeckt? — Die Bodenfläche abdc und die beiden hintern Seitenflächen gfdc und fdbe.

Welches sind nun die Kanten, die von den sichtbaren Flächen verdeckt sind? — Gut, die beiden hintern Kanten cd und db an der Bodenfläche und die hinterste Höhenkante fd. — Seht, darum sollen dieselben auch nicht ganz ausgezogen werden, ich will sie jetzt bloß punktiren. — Wie viele Kanten sind dagegen sichtbar? — Gut, neun. Nennet sie! ꝛc. — Wie viele Eckpunkte sind sichtbar und wie mancher ist verdeckt! — Sieben sichtbare, nämlich a, h, g, c, b, e und f, und ein einziger, nämlich d, ist ganz verdeckt; dieß ist der entfernteste. Welcher scheint unserm Auge am nächsten? — Gut, der Eckpunkt h, darum werden die Kanten gegen ihn laufend etwas stärker ausgezogen.

Nun wollen wir über die Größe der einzelnen Linien noch etwas näher eintreten. Welche haben wir in bestimmter Größe abgetragen? — Gut, die Kanten ab, ah und ac. — Welche werden die nämliche Größe haben wie ab? — Richtig, die mit ihr parallelen he, gf und cd, nämlich eine jede = 2″. — Ebenso ist jede von den mit ac parallelen, nämlich db, ef und gh gleich $1\frac{1}{2}$″, während jede Höhenkante gc, df, eb und ah gleich 1″ mißt. Es haben also alle Linien, die mit den drei Dimensionen parallel sind, das wahre Maß.

Von den Diagonalen dagegen weichen alle mehr oder weniger vom wirklichen Maße ab. Am kleinsten erscheint die durch den Körper hindurch gehende Diagonale hd, während sie doch im Körper die gleiche Größe hat wie af oder gb oder ce. Ebenso haben die Diagonalen der einzelnen Flächen, die den Körper begränzen, nicht das wirkliche Maß.

Der Lehrer zeigt nun, wie durch einfache Konstruktion die wahre Größe einer solchen mit den Dimensionen des Körpers nicht parallelen Linie gefunden werden kann. Um z. B. die wahre Größe der Diagonale ch zu finden, zeichnet er ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete ca = $1\frac{1}{2}$″, und dessen andere ah = 1″ mißt; die Hypothenuse dieses Dreiecks gibt dann die wahre Größe der Diagonale ch an. Die Erklärung ist leicht: die wirkliche Seitenfläche ahgc ist ein Rechteck, also macht dessen Diagonale ch mit den zwei anstoßenden Seiten ac und ah ein rechtwinkliges Dreieck.

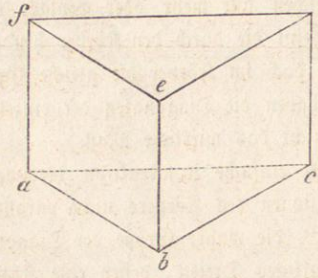
So ähnlich werden die Diagonalen hb, ad, ge ꝛc. durch rechtwinklige Dreiecke gefunden.

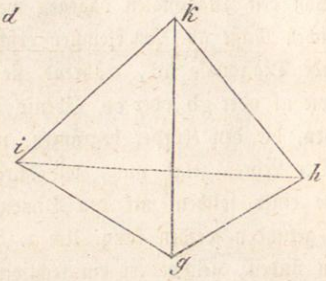
Wie findet man aber die Größe einer Diagonale durch den Körper, z. B. gb? — Die Diagonalen ge und cb bilden in ihrer wirklichen Größe mit den Kanten gc und eb ein Rechteck, dessen Diagonale gb die verlangte Linie ist. Man suche also die wahre Größe von ge durch ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gh und he sind und nehme alsdann he und die wahre Größe von ge als Katheten zu einem neuen rechtwinkligen Dreieck, so wird die Hypothenuse dieses letztern die verlangte Größe von gb angeben.

Wir können also aus dieser Zeichnung alles entnehmen, was sich auf die Form- und Größenverhältnisse des dargestellten Körpers bezieht. Wir werden nun nach und nach lernen, nicht nur geometrische Körper, sondern auch verschiedenartige Gegenstände und Vorrichtungen des praktischen Berufslebens durch dieses Zeichnungsverfahren darzustellen.

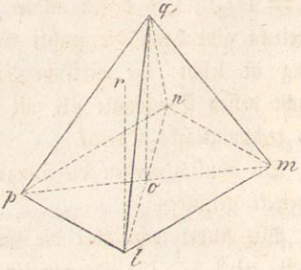
Aufgaben: Versucht nun selbst einen Würfel, ferner eine rechtwinklige Säule, die einen Steinblock von 4′ Länge, 2′ Breite und 7′ Höhe darstellen soll, dann eine Platte von 10′ Länge, 4′ Breite und 1′ Höhe (oder Dicke), endlich einen Balken von 30′ Länge, 1′ Breite und 1′ Dicke (oder Höhe) nach dieser Weise zu zeichnen. Die Maße werden natürlich nach verkleinertem (verjüngtem) Maßstabe abgetragen.

C. Ganz ähnlich führt der Lehrer die Schüler zum Verständniß folgender Zeichnungen:





Die erste stellt eine dreiseitige Säule dar, die der Lehrer den Schülern vorführt, indem er etwa eine rechtwinklige Säule wie die in voriger Nummer B. betrachtete durch zwei einander gegenüberstehende parallele Kanten entzweischneidet. Länge, Breite und Höhe sind durch die Kanten bc, ba und eb bezeichnet. Wie die wahre Länge von ac oder fd zu finden ist, wurde in dem Vorigen gezeigt.



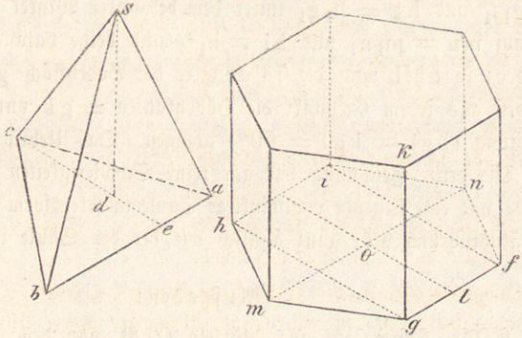
Die zweite stellt eine dreiseitige Pyramide dar, bei welcher Länge, Breite und Höhe durch die Kanten gh, ig und gk bezeichnet sind. Der Lehrer zeigt den Schülern, wie eine solche Pyramide von einer rechtwinkligen Säule abgeschnitten werden kann (z. B. auch von der vorigen, indem der Schnitt durch ace geführt wird). Die wahre Länge der Kanten ih, ik und kh lassen sich wie früher durch rechtwinklige Dreiecke finden; es bildet z. B. ik, da die Höhe kg auf der Breite ig in Wirklichkeit senkrecht sein muß, die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten ig und kg sind. U. s. f.

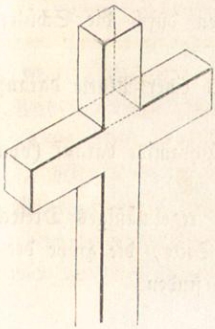
Die dritte Zeichnung zeigt uns eine gerade Pyramide, deren Grund-

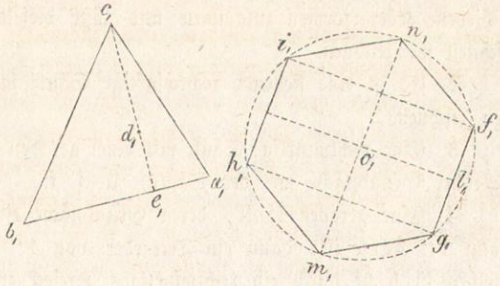
fläche ein Rechteck von der Länge lm und der Breite pl und deren Höhe qo ist. Die Ausführung ist leicht; die Länge lm und Breite pl müssen nach unserer ersten Bestimmung mit der Höhenrichtung rl Winkel von 60^0 bilden; aus dem Durchschnittspunkt der Diagonalen (o) wird die wahre Höhe qo parallel mit rl abgetragen und alsdann der Endpunkt q als Spitze der Pyramide mit den vier Ecken l, m, n, p durch gerade Linien verbunden.

In wirklichem Größenverhältnisse sind also hier einzig die Kanten lm, pl, pn und nm und die Höhe qo gezeichnet; die übrigen Kanten lassen sich leicht durch rechtwinklige Dreiecke finden. Man bestimme z. B. die wahre Größe der Diagonale pm, vereinige die Hälfte derselben mit der Höhe qo zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dann wird dessen Hypothenuse die wahre Größe von pq angeben. Wie fallen die übrigen Kanten aus? Wie kann man eine der Seitenflächen in wahrer Größe zeichnen? ꝛc.

D. Zeichnung einiger anderer Körper durch Abtragung der gegebenen Längen-, Breiten- und Höhenstücke.







Es ist zuerst eine Pyramide zu zeichnen, deren Grundfläche das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ist. Die Längenrichtung der Pyramide soll $a_1 b_1$, die Breite $e_1 c_1$ angeben und in den Punkt d_1 soll auch das Höhenperpendikel ds fallen, das in den Scheitel s der Pyramide führt. Die Zeichnung ist nun sehr leicht: Man ziehe eine Gerade $ab = a_1 b_1$ und alsdann aus dem Punkt e im Abstande $ae = a_1 e_1$ die Breitenrichtung $ec = e_1 c_1$ so, daß $\sphericalangle cea = 120^0$ und $ceb = 60^0$ ist. Endlich nehme man den Abstand $de = d_1 e_1$ und ziehe die Höhe ds so, daß sie mit der Längen- und Breitenrichtung ebenfalls die genannten Winkel (z. B. $\sphericalangle cds = 60^0$) bildet. Zum Schluß wird der Scheitel s noch mit den Eckpunkten a und b und c verbunden, um die Seitenkanten der Pyramide darzustellen. Wie die wahre Länge einer mit den drei Dimensionen nicht parallelen Kante zu finden ist, wurde im Frühern gezeigt.

Durch die zweite Zeichnung soll ein sechsseitiges gerades Prisma dargestellt werden, dessen Grundfläche das regelmäßige Sechseck $m_1 g_1 f_1 n_1 i_1 h_1$ bildet. Es ist nun zunächst sehr leicht, die Längen- und Breitenstücke nach unserer angenommenen Regel gehörig zu verzeichnen: es muß $gf = g_1 f_1$ und $hg = h_1 g_1$ unter dem bekannten Winkel und $ol = o_1 l_1$, hierauf $mn = m_1 n_1$ und $hi = h_1 i_1$ und beide parallel zu gf gezogen werden; so erhält man die 6 Eckpunkte der Bodenfläche gfnihm. Zuletzt werden aus jedem Eckpunkt die Höhenkanten $= gk$ unter der bekannten Richtung ($hgk = kgf = 60^0$) gezogen. Das Uebrige wie früher.

Die dritte Zeichnung hat gar keine Schwierigkeiten. Es ist eine stehende und eine liegende rechtwinklige Säule in Kreuzform zu zeichnen; und die Ausführung geht ganz ähnlich wie bei der Säule in B.

Aufgaben:

1. Der Lehrer setzt aus Würfeln (z. B. von dem Zählrahmen) verschiedene Körperformen zusammen und läßt dieselben durch die Schüler schnell nachzeichnen.

2. Es ist eine stehende rechtwinklige Säule mit einer Platte darauf zu zeichnen.

3. Eine rechtwinklige Säule mit einer geraden Pyramide darauf (von gleicher Grundfläche mit der Säule). U. s. f.

4. Eine gerade Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Dreieck von 1″ Kante ist; dann ein Tetraeder von 1″ Seite, die Höhe desselben ist leicht durch ein rechtwinkliges Dreieck zu finden.

§ 27.

Einleitung zur Ausmessung geometrischer Körper. (Die Körpermaße und Gewichte.)

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen und Aufgaben.

A. Bildung des Kubikmaßes.

Lehrer: Einen geometrischen Körper ausmessen heißt untersuchen, wie oft in ihm ein anderer von bestimmter Größe enthalten sei. Ich lege euch hier z. B. eine gerade rechtwinklige Säule vor, die ich aus sechs gleichen Würfeln zusammengesetzt habe. Wie oft ist also einer dieser Würfel in der Säule enthalten? — Gerade 6 mal, oder die Säule ist gleich 6 solchen Würfeln. — Hier habe ich eine rechtwinklige Säule aus zwei gleichen dreiseitigen Säulen zusammengesetzt, eine der letztern ist also in der ganzen zweimal enthalten.

Das erste Mal haben wir durch einen Würfel gemessen, das zweite Mal durch eine dreiseitige Säule. Wenn man nun ein bestimmtes Maß zum Ausmessen aller Körper annehmen will, so muß man wieder wie früher beim Flächenmessen sowohl die Gestalt als Größe dieses Maßes festsetzen. Das Flächenmaß wählte man aber in Form des Quadrates und in Uebereinstimmung hiemit nimmt man den Würfel als Form des Körpermaßes an.

Seine Größe wird mit dem Längen- und Flächenmaß in folgenden Zusammenhang gebracht: Fängt man bei der Grundeinheit, dem Fuß, an, so stellt das über demselben errichtete Quadrat den Quadratfuß als Flächeneinheit dar. Ein Würfel von sechs solchen Quadraten eingeschlossen, bildet nun als entsprechende Körpereinheit (Körpermaß) den Würfel- oder Kubikfuß (Kb.'). (Der Lehrer weist dessen Größe wirklich vor; Kubus von Holz, siehe auch I. Theil, Rechnungsunterricht.)

Wie man entsprechend dem Fuß und Quadratfuß den Kubikfuß bildet, so bildet man auch zum Zoll und Quadratzoll den Kubikzoll (Kb."), das ist ein Würfel, dessen Flächen Quadratzolle darstellen. — Was wäre nun eine Kubiklinie (Kb.'")? — eine Kubikruthe? — ein Kubikklafter? — eine Kubikelle? (Versinnlichung dieser Maße.)

Wie groß ist eine Kante beim Kubikzoll, beim Kubikklafter ꝛc.? — Wie groß eine Gränzfläche der Kubikruthe, der Kubiklinie? — Bei jedem dieser Würfelmaße bildet also eine Kante das entsprechende Längenmaß und eine Seitenfläche das entsprechende Quadratmaß.

B. Verhältniß der Kubikmaße zu einander.

Da die Bodenfläche eines Kubikfußes einen Quadratfuß bildet, dieser aber aus 100 □″ besteht, so erhält man, wenn über jeden dieser □″ ein Kubikzoll gestellt wird, eine zollhohe Platte von 100 Kb.″. Zehn solche Platten über einandergelegt bilden aber den Kubikfuß; daher ist 1 Kb.′ = 100 . 10 Kb.″ = 1000 Kb.″.

Aehnlich läßt sich aus 10 Plättchen, von denen jedes 100 Kb.‴ enthält, ein Kb.″ zusammensetzen; daher ist 1 Kb.″ = 100 . 10 Kb.‴ = 1000 Kb.‴.

Ein □ Klafter enthält 36 □′, eine fußhohe Platte darüber 36 Kb.′; also sind 6 solche Platten, oder ein Kubikklafter = 36 . 6 Kb.′ = 216 Kb.′.

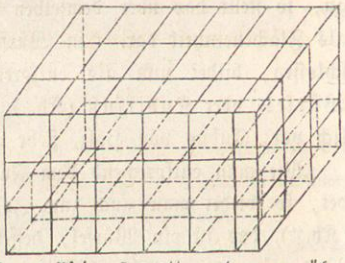
Ebenso findet man: 1 Kubikelle = 4 Kb.′; 1 Kubikruthe = 1000 Kb.′. (Eine Schachtruthe dagegen ist 10′ lang und 10′ breit und 1′ tief.)

Aus diesen Beispielen ergibt sich die Regel:

Wenn ein Längenmaß irgend eine Anzahl gleicher Theile enthält, so hat das entsprechende Kubikmaß diese Zahl mal diese Zahl, mal diese Zahl Kubiktheile.

Für einzelne praktische Rechnungen hat sich der Schüler noch folgende Maße zu merken: 1. Das Holzklafter = $^1/_2$ Kubikklafter; 2. Der Kohlenkorb = 12 Kb.′; 3. Der Torfkorb = 6 Kb.′. (Aufgaben hierüber später.)

C. Ausmessung rechtwinkliger Säulen.



Es ist leicht einzusehen, daß diejenigen Körper am leichtesten auszumessen sind, deren Gestalt wie diejenige des Kubikmaßes rechtwinklig säulenförmig ist.

Mißt man zunächst die rechtwinklige Bodenfläche aus und findet z. B. die Länge = $5^1/_2$″, die Breite = 3″, so hält die ganze Bodenfläche wie bekannt $5^1/_2$. 3 □″, und wenn über jeden ganzen □″ 1 Kb.″ und über jeden halben □″ auch $^1/_2$ Kb.″ gestellt wird, so hat man eine zollhohe Schichte von $5^1/_2$. 3 Kb.″ = $16^1/_2$ Kb.″. Da nun die Säule 3″ hoch ist, so haben gerade drei solche Schichten in derselben Platz, und daher faßt sie $16^1/_2$. 3 Kb.″ = $49^1/_2$ Kb.″.

Also läßt sich auch der Inhalt einer rechtwinkligen Säule stets in Form eines (zusammengesetzten) Dreisatzes berechnen, wie etwa:

Eine Säule von 1″ Länge, 1″ Breite und 1″ Höhe hält 1 Kb.″
= = = $5^1/_2$″ = 3″ = = 3″ = = ? =

Die Ausrechnung dieses Dreisatzes führt im Ganzen wieder auf eine gleiche Rechnungsweise wie die obige, nämlich:

Bei 1″ Breite, 1″ Höhe, aber $5^1/_2$″ Länge hält eine Säule $5^1/_2$ Kb.″
= 3″ = 1″ = und $5^1/_2$″ = = = = $5^1/_2 . 3$ =
= 3″ = 3″ = = $5^1/_2$″ = = = = $16^1/_2 . 3$ =
$= 49^1/_2$ Kb.″.

Hieraus ergibt sich dann auch die nach gehöriger Uebung später anzuwendende Regel:

Der Kubikinhalt einer rechtwinkligen Säule ist gleich der Messungszahl der Länge mal der der Breite, mal der der Höhe bezogen auf den Würfel, durch dessen Kante als Längenmaß man die drei Ausdehnungen gemessen hat. Kurz: Kubikinhalt = dem Produkt der drei Abmessungen.

Noch zwei Berechnungsbeispiele:

1. Wie groß ist eine 5′ lange, 4′ 2″ breite und $8^1/_2$′ hohe Säule?

Lösung: Eine fußhohe Platte über der Grundfläche hält $4^1/_5 . 5$ Kb.′ = 21 Kb.′. Die Säule faßt aber $8^1/_2$ solche Platten und diese fassen $21 . 8$ Kb.′ + $^{21}/_2$ Kb.′ = $178^1/_2$ Kb.′.

2. Wie hoch muß man eine rechtwinklige Säule von $3^1/_4$′ Länge und 5′ Breite machen, damit sie 80 Kb.′ hält? Lösung in Dreisatzform: Eine Säule von 1′ Länge, 1′ Breite und 1 Kb.′ Inhalt muß 1′ hoch sein.
= = = $3^1/_4$′ = 5′ = = 80 = = = ? = =

Wenn die Säule nur $^1/_4$′ Länge, aber 1′ Breite und 1 Kb.′ Inhalt haben sollte, so müsse sie 4′ hoch sein, bei $^{13}/_4$′ Länge aber 13 mal weniger hoch, also $^4/_{13}$′ hoch. Bei derselben Länge und Breite aber bei 80 Kb.′ Inhalt müßte die Säule 80 mal höher, also $\frac{4 . 80}{13}$′, dagegen bei 5′ Breite 5 mal weniger hoch, d. i. $\frac{4 . 80}{13 . 5}$′ hoch sein. Die fragliche Höhe beträgt daher $\frac{4 . 80}{13\ 5}$′ = $\frac{4 . 16}{13}$′ = $4^{12}/_{13}$′.

D. Die übrigen Körpermaße, Hohlmaße. — (Gewichte, Münzen.)

Nimmt man von 1 Kb.′ den 18ten Theil (indem man z. B. im Kistchen des Kubikfußes vom Boden um $^1/_{18}$′ in die Höhe steigt, oder indem man etwa ein Kistchen von $^1/_3$′ Länge, $^1/_3$′ Breite und $^1/_2$′

Höhe bildet, oder noch in anderer Form), so stellt der Raum von diesem 18tel Kb.' 1 Immi oder 1 Maß dar. Dieß ist die gesetzlich bestimmte Einheit unserer Hohlmaße. Man hat ferner:

1 Viertel (Sester) = 10 Immi oder $^{10}/_{18}$ Kb.',

1 Malter = 10 Viertel = $^{100}/_{18}$ Kb.',

1 Saum = 100 Maß = $^{100}/_{18}$ Kb.' (1 Schoppen = $^1/_4$ Maß).

Wie unsere Maße überhaupt von dem französischen oder metrischen Systeme abgeleitet sind, so stehen auch unsere Hohlmaße mit den französischen im Zusammenhange. Wir wissen, daß 1' = $^3/_{10}$ Meter*, also $^1/_3$' = $^1/_{10}$ Meter ist. Nun macht im französischen Maße ein Würfel von $^1/_{10}$ Meter, d. i. $^1/_3$' Kante ein Hohlmaß, das man Liter nennt; also ist 1 Liter = $^1/_{1000}$ Kubikmeter oder = $^1/_{27}$ Kb.'. Da nun 1 Maß oder 1 Immi = $^1/_{18}$ Kb.' ausmacht, so sind 2 Maß = $^2/_{18}$ Kb.' oder $^1/_9$ Kb.', da aber auch 3 Liter = $^3/_{27}$ Kb.' = $^1/_9$ Kb.' sind, so hat man also 2 Maß = 3 Liter.

Nun aber nennt man auch das Gewicht von 1 Liter (oder Würfel von $^1/_3$' Kante) reinem Wasser** ein Kilogramm, oder 1000 Gramm, oder 2 Pfund; also ist 1 Pfund die Hälfte des Gewichts von $^1/_{27}$ Kb.' oder $^1/_{1000}$ Kubikmeter reinem Wasser; daher wiegt 1 Kb.' reines Wasser 27 . 2 Pfund oder 54 Pfund. 1 Gramm ist demnach das Gewicht von 1 Würfel reinem Wasser, der eine Kante von $^1/_{100}$ Meter, d. i. $^1/_{30}$' oder $^1/_3$'' Länge hat. Das Pfund ist die Einheit unserer Gewichte und wir haben bekanntlich 1 Zentner = 100 Pfund = 500 Gramm = 32 Loth (für den Verkehr).

Endlich ist als Einheit des Geldes der Franken aufzuführen; derselbe wiegt 5 Gramm und enthält $^9/_{10}$ feines Silber und $^1/_{10}$ Zusatz.

Zusammenhang unserer Maße, Gewichte und Münzen.

1' = $^3/_{10}$ Meter; 1 □'; 1 Kb.'

$^1/_{18}$ Kb.' = 1 Immi = 1 Maß = $^3/_2$ Liter

Gewicht von $^1/_{54}$ Kb.' reinem Wasser = 1 Pfund = 500 Gramme;

der Franken = $^1/_{100}$ Pfund oder 5 Gramme Silber, wovon $^9/_{10}$ fein und $^1/_{10}$ Zusatz.

Diese Maße und Gewichte werden in Wirklichkeit vorgeführt und

---

* Ein Meter ist der zehnmillionte Theil des Bogenabstandes eines Erdpols vom Erdäquator.

** Bei 3,5 ° C.

nach ihrem Zusammenhange verglichen und geprüft. Insbesondere wird das Immi oder die Maß als Hohlraum von $^1/_2$′ Länge, $^1/_3$′ Breite und $^1/_3$′ Höhe darstellt; ebenso das Gefäßchen von $^1/_3$′ Länge, $^1/_3$′ Breite, und $^1/_6$′ Höhe, welches eben nach dem Gesagten genau 1 Pfund reines Wasser faßt.

Aufgaben:

1. Eine Mauer ist 3^0 5′ lang, 26′ hoch und 2′ dick, wie viel Kubikinhalt hat sie?

2. Ein behauener Stein, der genau eine rechtwinklige Säule darstellt, ist 4′ lang, 3′ breit und $8^1/_2$′ hoch, welches ist sein Kubikinhalt?

3. Wie viele Kb.′ Steine bedarf es, das Bindemittel nicht gerechnet, zu einer Mauer, die 26′ lang, 34′ hoch und 2′ $2^1/_2$″ dick sein soll?

4. Wie viele Kubikfuß Wasser enthält ein rechtwinkliger, säulenförmiger Trog, der im Innern $8^1/_5$′ lang, 4′ breit und $6^1/_2$′ hoch ist?

5. Aus einem rechteckigen Stück Land, das 36^0 7′ lang und 20^0 $3^1/_2$′ breit ist, wird durchweg 6′ tief die Erde weggeschafft. Wenn man hiebei für jedes Kubikklafter 3 Fr. 50 Rp. zu bezahlen hat, wie hoch belaufen sich dann die Kosten im Ganzen?

6. Wie viele Klafter enthält eine Schichte Holz (Kaufscheiter), die $34^1/_2$′ lang, 3′ breit und 7′ 4″ hoch ist?

7. Wie viele Fuhren Sand kann man aus einer 25′ langen, 16′ breiten und $7^1/_4$′ tiefen Grube fahren, wenn der rechtwinklige Wagenkasten, in welchem der Sand weggeführt wird, 8′ lang, 2′ breit und $1^1/_2$′ hoch ist?

8. Wie groß ist ein Würfel, dessen Kante 2′ 7″ mißt?

9. Wie viele Klafter Holz haben in einem Holzschoppen Platz, dessen innerer Raum 20′ lang, 18′ breit und $8^1/_2$′ hoch ist?

10. Wie viele Immi, dann wie viele Saum halten 521 Kb.′? — 9701 Kb.′ = ? Malter, = ? Saum; $307^1/_2$ Kb.′ = ? Viertel; Gew. v. $309^1/_7$ Kb.′ Wasser = ? ℔; Gew. von $15^1/_2$ Saum Wasser = ? Zentner.

11. Wie viele Viertel Getreide faßt ein liegender, rechteckiger Kasten von 7′ Länge, $4^1/_2$′ Breite und 5′ Höhe? Antw. $283^1/_2$ Vrtl.

12. Ein Stock Heu ist $20^1/_2$′ lang, 12′ breit und 10′ tief. Wie viele Zentner enthält er, wenn durchschnittlich das Kubikklafter 600 ℔ wiegt? Antw. $(20^1/_2 . 12 . 10)$ Zentner : 6 . 6 = $68^1/_3$ Zentner.

13. Wie viele Klafter geben 14 viereckige, durchweg ungefähr gleich starke Blöcke Holz, wenn ihre Länge 12′ die Breite 1′ und die Dicke $1\frac{1}{2}$′ beträgt?

14. Wie viele Malter Getreide faßt ein liegender Kasten von 12′ Länge, $3\frac{1}{2}$′ Breite und 4′ Höhe?

15. Ein rechteckiges Stück Torfland, das eine Länge von 645′ und eine Breite von 89′ hat, ist durchweg ungefähr 7′ tief, wie viele Kubikklafter Torf hält es?

16. Wie viele Körbe Torf, den Abgang nicht gerechnet, ließen sich also hieraus ziehen und welches wäre der Ertrag im Ganzen, wenn jedes Dutzend Körbe mit 8 Franken bezahlt würde?

17. Wie hoch wird ein Trog von 10′ Länge und 7′ Breite durch 50 Saum Wasser angefüllt?

18. In einem Keller liegt in einem vierseitig eingeschlossenen Raume, der 14′ lang, $4\frac{1}{2}$′ breit und 5′ hoch ist, ein Quantum Kartoffeln. Wie viele bloß bestrichene Viertel sind es?

II. Achtes Schuljahr.

Vom zurückgelegten 13. bis 14. Altersjahre.

§ 28.

Aufgabe.

Bildung der gewöhnlichen von krummen Flächen begränzten Körper, namentlich des (geraden) Zylinders und Kegels und der Kugel. — Ihre Oberflächen. — Ausmessungen, gestützt auf die hier anzubringende Messung der Kreislinie und Kreisfläche. Geometrische (isometrische) Zeichnung dieser Körper und Bestimmung des körperlichen Inhalts verschiedenartiger Körperräume, hauptsächlich mit Rücksicht auf praktische Nützlichkeit.

§. 29.

Bildung geometrischer Körper mit krummen Gränzflächen.

Wir werden nun die gewöhnlichern von krummen Flächen begränzten Körper näher betrachten.

(Indem der Lehrer den Schülern Modelle von Zylinder, Kegel und Kugel vorweist): Diese drei runden Körper kann man sich in der Vorstellung auf ähnliche Weise durch Umdrehung bilden wie früher den Kreis.

a. Denkt man sich z. B. ein Rechteck um eine seiner Seiten (als Drehungslinie, Axe) herumgedreht, wie man die Thüre um ihre Angeln

dreht, so beschreibt das Rechteck bei einer ganzen Umdrehung einen Körperraum, den man (geraden) Zylinder oder Walze nennt. Die mit der Axe parallele Seite beschreibt die krumme Oberfläche, die beiden andern, auf der Axe senkrechten Seiten beschreiben als Radien die beiden Kreisgrundflächen des Zylinders.

Beispiele: In eine weiche Masse wird ein rechteckiges Metallplättchen, das z. B. in einer Ecke eine Spitze als Drehungspunkt hat, wie ein Bohrer senkrecht eingedreht. Die untere eindringende Seite schneidet nach und nach den Zylinderraum aus. Bohren von zylindrischen Röhren. Nähere Betrachtung des Zylinders an Modellen: Welche Eigenschaft findet ihr nach der genannten Entstehungsweise der krummen Zylinderfläche in jedem ihrer Punkte? — Wenn man einen Zylinder durch eine Ebene senkrecht zur Axe entzweischneidet, wie muß die Schnittfläche ausfallen? — Wenn man aber einen ebenen Schnitt längs durch die Axe führt?

b. Denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten, oder auch ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck um seine auf die Grundlinie gezogene Halbirungslinie herumgedreht, so beschreibt das Dreieck einen Körperraum, den man Kegel (Konus) nennt. Die Seitenlinie aus der Spitze beschreibt die krumme Kegelfläche, die Grundlinie aber die kreisförmige Grundfläche des Kegels. Beispiel: In ein geeignetes Material wird ein Metallplättchen von genannter Dreiecksform eingebohrt, der ausgehöhlte Raum ist der Kegelraum. Wenn man den Kegel durch eine Ebene senkrecht zur Axe entzweischneidet, was bildet die Schnittfläche? Und wenn man den Schnitt der Länge nach durch die Axe führt?

c. Denkt man sich endlich einen Halbkreis (oder auch einen ganzen Kreis) um den Durchmesser umgedreht, so beschreibt die gedrehte Fläche einen körperlichen Raum, den man Kugel nennt. Die krumme Fläche, welche von der Kreislinie durchlaufen wird, heißt Kugelfläche, der Durchmesser, um den man den Kreis gedreht hat, heißt Axe der Kugel. Die Endpunkte der Axe nennt man Pole. Derjenige Radius des gedrehten Kreises, der senkrecht auf der Axe ist, beschreibt einen Kreis, den man Aequator der Kugel nennt. Irgend ein anderer Perpendikel vom Kreisumfang bis auf die Axe beschreibt einen Parallelkreis. Der Streifen der Kugelfläche zwischen zwei Parallelkreisen heißt Zone. Der gedrehte Kreis in einer beliebigen Lage bildet einen Meridian der Kugel. Anwendung auf die Geographie. Der Lehrer veranschaulicht diese Entstehungsweise der Kugel durch passende Reife.

Nähere Betrachtung der Kugel an einem Modell und Ziehung der wichtigern Kreislinien auf der Kugelfläche durch den Lehrer. — Fragen: Welche Eigenschaft haben sämmtliche Punkte der Kugeloberfläche gemäß der Entstehung der Kugel? — Wenn man also die Kugel durch den Mittelpunkt (nach einem ebenen Schnitte) entzweischneidet, was ist dann die Schnittlinie? — Wie verhalten sich alle Kreislinien auf der Kugelfläche, wenn die Ebenen derselben durch den Mittelpunkt der Kugel gehen? — Wie theilt der Aequator, — wie ein Meridian, die Kugel? — Wie groß ist der Meridiansbogen von einem Pol bis zum Aequator? Antwort: $^1/_4$ der ganzen Kreislinie. Bei der Erde macht diese Bogenlänge 10 Millionen Meter. Ein Grad = 15 Meilen = $15 \cdot 7420{,}44$ Meter.

§ 30.

Nachholung der Messung des Kreises und Anwendung auf die drei runden Körper.

I. Ueber den Kreis.

Wir haben früher gesehen, daß, wenn man ein gleichseitiges Dreieck um einen Punkt herum sechsmal Seite an Seite konstruirt, der Winkelraum um den Punkt herum dadurch genau erfüllt wird; d. h. 6 mal der Winkel des gleichseitigen Dreiecks oder $6 \cdot 60^0$ macht gerade 360^0 und die 6 Dreiecke bilden zusammen ein regelmäßiges Sechseck. Wird hierauf aus dem Punkt in der Mitte mit einem Radius, der gleich einer der Seiten des gleichseitigen Dreiecks ist, eine Kreislinie gezogen, so geht dieselbe durch sämmtliche Eckpunke des regelmäßigen Sechsecks, woraus man sieht, daß der Radius gerade 6 mal als fortlaufende Sehne in die Kreislinie geht. Die Kreislinie ist also etwas mehr als 6 mal so groß als die Sehne oder der Radius, denn jeder Bogen ist noch etwas größer als die Sehne. Diesen Ueberschuß haben die Geometer berechnet; er beträgt ungefähr $^{28}/_{100}$ vom Halbmesser. Daraus folgt also: Die Kreislinie ist gleich $6^{28}/_{100}$ mal dem Halbmesser oder gleich dem Durchmesser mal $3{,}14$ oder ungefähr mal $3^1/_7$.

Nun können wir auch die Kreisfläche ausmessen:

Theilt man nämlich die Kreislinie in lauter sehr kleine Theile und zieht vom Mittelpunkt aus nach allen Theilungspunkten Halbmesser, so zerfällt der Kreis in viele sehr schmale Ausschnitte, die man als gleichschenklige Dreiecke betrachten kann. Die Höhe eines jeden ist daher so groß wie der Halbmesser. (Der Lehrer zeigt dieß durch Zeichnung an der

Wandtafel.) Da nun, um den Flächeninhalt dieser Dreiecke zu bekommen, jede der kleinen Grundlinien mit der nämlichen halben Höhe, d. i. dem halben Radius multiplizirt werden muß, so kann man gleich die Summe dieser Grundlinien, d. i. die ganze Kreislinie, mit dem halben Radius multipliziren. Daher der Satz:

Der Inhalt des Kreises ist gleich der Kreislinie mal der Hälfte des Halbmessers.

Nimmt man hierin statt der Kreislinie das ihr gleiche Ergebniß aus dem Halbmesser mal $6{,}28$, so kommt die gleichgeltende Regel:

Die Kreisfläche ist gleich dem Halbmesser mal $6{,}28$ mal dem halben Halbmesser; oder gleich dem Halbmesser mal dem Halbmesser mal $3{,}14$ oder $3\frac{1}{7}$.

Beispiele:

1. Wenn der Halbmesser eines Kreises $9'$ mißt, wie groß ist dann die Kreislinie? Antwort: $(6{,}28 \,.\, 9)' = 56{,}52'$ oder nach dem gemeinen Bruch $= 2 \,.\, 9 \,.\, 3\frac{1}{7}' = 56\frac{4}{7}'$. Welches der beiden Resultate ist etwas größer als das andere und warum?

2. Wenn der Umfang eines Kreises $= 205'$ ist, wie groß wird dessen Durchmesser sein? Antwort: $205' : 3{,}14 = 65{,}3'$.
16, 6

3. Welches ist der Inhalt eines Kreises, dessen Habmesser $1'\ 4''$ mißt? Antwort: $(14 \,.\, 14 \,.\, 3{,}14)\ \square'' = 196 \,.\, 3{,}14\ \square' = 615,\ \square''$ (mit Weglassung des ungenauen Dezimalbruchs), oder mit Benutzung der Zahl $3\frac{1}{7}$ oder $\frac{22}{7}$; Kreis $= \frac{14 \,.\, 14 \,.\, 22}{7}\ \square'' = 616\ \square''$.

Für genauere Rechnungen nehme man $3{,}14159$ statt $3{,}14$.

4. Wie groß ist der Umfang eines Mühlsteines, dessen Halbmesser $2'$ lang ist?

5. Wie groß ist ein Wasserrad, dessen Halbmesser $10\frac{1}{2}'$ beträgt, im Umkreise; und wie viele Schaufeln bedarf es, wenn alle $2'$ auf dem Umfange eine solche angebracht werden soll?

6. Wenn ein Rad von $6'$ Durchmesser sich auf einer Straße 450 mal umgedreht hat, welcher Weg ist dann von ihm zurückgelegt worden?

7. Wie viel mißt ein runder Baumstamm von $4'$ Umkreis im Durchmesser?

8. Wie groß ist der Durchmesser eines runden, eisernen Kamins, das $6\frac{1}{2}'$ im Umfange hat?

9. Wie groß hat der Schreiner den Halbmesser eines runden Tisches

für 10 Personen anzunehmen, wenn für jede 2′ 4″ am Umfange gerechnet werden soll?

10. Man hat einen runden Tisch von 5′ Durchmesser, der für 7 Personen paßt; wie groß müßte der Durchmesser eines andern für 11 Personen berechneten Tisches sein?

11. Wie groß hat der Küfer den Radius eines Faßbodens anzunehmen, wenn der Umfang gerade 11,1 Fuß beträgt? — Der Radius kann auch als 6 mal in den Umfang passende Sehne gefunden werden.

12. Eine runde Fläche von 8′ Durchmesser soll mit $^3/_4$ Ellen breitem Tuche belegt werden, wie viele Ellen bedarf es?

13. Um wie viel ist ein runder Deckel von 3′ 4″ Durchmesser größer, als ein solcher von 13″ Durchmesser?

14. Wie viel Platz nimmt ein runder Ofen von 12′ Umkreis am Boden ein?

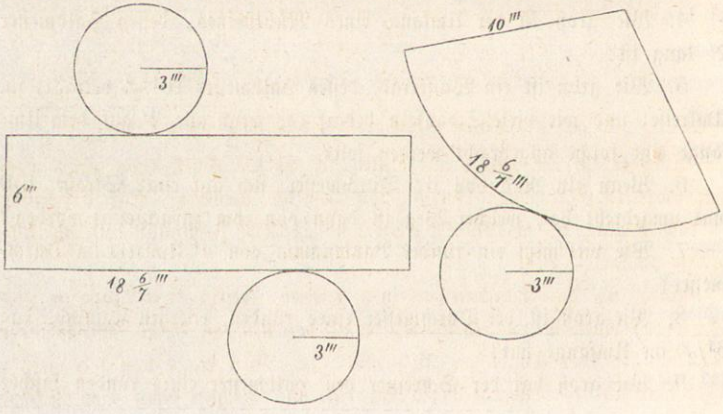
15. Wie groß ist der Kreisdurchschnitt eines Baumes, wenn der Umfang 6′ beträgt?

16. Wie groß ist die Durchschnittsfläche des Erdäquators?

17. Wenn man von einem Orte aus nach allen Seiten in die Runde 20 Stunden weit sieht, wie groß ist dann die überschaute Kreisfläche?

II. Anwendung der Kreismessung auf die runden Körper.

Nun ist auch nicht schwer, die Oberfläche von Zylinder und Kegel zu berechnen und die Netze dieser Körper darzustellen. Ist z. B. der Radius der Grundfläche eines Zylinders $= 3'''$, die Höhe $= 6'''$, so ist der Umfang $= 6 \cdot 3^1/_7''' = 18^6/_7'''$. Wie man nun um die krumme



Zylinderfläche genau ein Rechteck wickeln kann, das $18^6/_7$''' lang und 6''' hoch ist (der Lehrer zeigt dieß mit einem Rechteck aus Papier), so kann man sich auch umgekehrt im Rechteck die abgewickelte oder abgerollte Zylinderfläche vorstellen.

Ist ferner die Grundfläche eines Kegels von gleicher Größe wie in vorigem Beispiel die Grundfläche des Zylinders, die Seitenlinie des umgedrehten oder erzeugenden Dreiecks aber = 10''', so ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius 10''' und dessen Bogenlänge $18^6/_7$''' mißt, gleich der krummen Kegelfläche und kann passend um dieselbe gewickelt werden. Nach diesen Angaben sind die vorigen Netze zu Zylinder und Kegel gezeichnet. Der Radius von 3''' ist angenähert mit dem Zirkel $6^2/_7$ mal auf die Bogenlänge des Kreisausschnittes gebracht. Die berührenden Kreise von 3''' Halbmesser müssen die Grundflächen der beiden Körper bilden und sind im Netze an beliebigen Punkten der Grundlinien anzubringen.

Die Oberflächen dieser beiden Körper sind nun leicht zu berechnen. Die krumme Oberfläche des Zylinders als abgewickeltes Rechteck betrachtet, mißt: $(2.3.3^1/_7.6)\square''' = 18^6/_7.6\ \square''' = 113^1/_7\square'''$

die beiden Grundfl. $= (2.3.3.3^1/_7)\square''' = 18.3^1/_7\square''' = 56^4/_7\square'''$

also Gesammtoberfläche des Zylinders $= 169^5/_7\square'''$

Aus gleichen Gründen, warum der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist der Kreislinie mal dem halben Radius, ist auch ein Kreisausschnitt gleich seiner Bogenlänge mal dem halben Radius. Also ist die krumme Kegelfläche oder der Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge gleich dem Umfang der Grundfläche und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels, gleich der Bodenlänge mal dem halben Radius, hier also

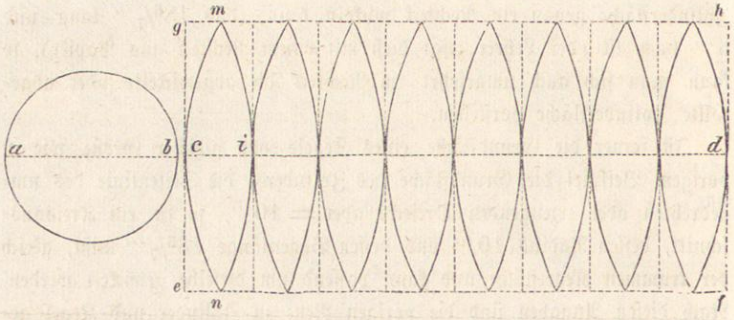
$= (2\ .\ 3\ .\ 3^1/_7\ .\ 5)\square''' = (18^6/_7\ .\ 5)\square''' = 94^2/_7\square'''$

und die Grundfläche $= (3\ .\ 3\ .\ 3^1/_7)\square''' = 28^2/_7\square'''$

daher Gesammtoberfläche des Kegels $= 122^4/_7\square'''$.

Was zuletzt die Kugel anbetrifft, so ist die Darstellung eines auch nur angenähert richtigen Netzes schon ziemlich schwierig. Wir überlassen es dem Lehrer, ob er den Schülern eine ähnliche Zeichnung wie die folgende mittheilen will.

Wenn ab den Durchmesser eines größten Kreises (wie Aequator und Meridian) einer Kugel bezeichnet, so ist der Umfang dieses Kreises oder der Aequator der Kugel $= 3^1/_7$ mal ab. Man trage nun ab gerade $3^1/_7$ mal auf eine gerade Linie wie cd und zeichne dann ein Rechteck



efhg so, daß gc = ec = 1/4 von cd ist. Dann ließe sich das Rechteck so um die Kugel herumwinden, daß cd gerade den Aequator der Kugel bilden könnte. Allein nun müssen aus dem Rechteck solche Stücke ausgeschnitten werden, die sich möglichst genau auf die Kugelzweiecke herablegen lassen, die je zwischen zwei Meridianen liegen. Es ist hier cd in 8 gleiche Theile getheilt, eine größere Anzahl wäre aber noch entsprechender. Durch die Theilungspunkte werden nun lauter gleiche Kreisbogen gezogen und zwar so wie mcn und min (m und n fallen in die Mittelrichtung zwischen c und i). Der Zirkel wird nämlich in einem Punkte der Richtung cd so eingesetzt, daß die andere Zirkelspitze sich durch m und c und n bewegen kann. (Diese Zirkelöffnung wird am schnellsten durch Versuch gefunden, man kann indessen auch die bekannte Konstruktion durch die Perpendikel aus den Mitten der Sehne von mc und cn anwenden.) Dadurch erhält man 8 Zweiecke, die so um die Kugel gewunden, daß cd zu einem größten Kreise wird, annähernd dann auch die Kugelfläche decken können. (Da ge = 1/2 von cd, so umschließt jede Gerade wie mn einen halben Meridian und die Spitzen der Zweiecke vereinigen sich in den beiden Polen.)

Der Inhalt der Kugeloberfläche ist noch schwieriger zu finden. Wir können hier wie früher bei der Kreislinie mit Sicherheit nur einen angenäherten Werth angeben, von dem wir sagen können, daß er jedenfalls zu klein ist. Nehmen wir nämlich die halben Zweiecke wie cmi, cni u. s. f. als Dreiecke an, so erhalten wir jedenfalls etwas zu wenig, weil durch die Sehnen cm, im ꝛc. etwas vom Zweieck abgeschnitten wird. Die Dreiecke sind aber zusammen gleich der Summe der Grundlinien, (d. i. cd) mal der Hälfte ge, also mal gc; dieß ist aber auch = 3 1/7 mal ab mal 1/4 von ab mal 3 1/7. Dieses Ergebniß ist, wie schon gesagt, etwas zu klein, es ist

nach dem genauen Ergebniß der Geometrie so zu verbessern, daß es heißt 4 mal ab mal $^1/_4$ von ab mal $3^1/_7$ oder vereinfacht (indem 4 gegen 4 aufgehoben wird) = ab mal ab mal $3^1/_7$, d. h. gleich dem Quadrat über ab mal $3^1/_7$. Die Oberfläche einer Kugel ist daher = dem Quadrat über dem Durchmesser mal $3^1/_7$ oder = dem 4fachen Quadrat des Radius mal $3^1/_7$.

Beispiele.

1. Wie viele Quadratfuß Eisenblech braucht es, um daraus ein zylindrisches Rohr von 10′ Länge und 5″ Durchmesser zu formen?

2. Wie groß ist die krumme Fläche einer kegelförmigen Säule, deren Grundfläche einen Durchmesser von 3′ hat und deren schiefe Seitenlinie 10′ mißt?

3. Wenn ein Grad des Aequators der Erde = 15 Meilen ist, wie groß ist dann der ganze Aequator, wie groß also ein Durchmesser und wie groß die ganze Oberfläche der Erde, wenn sie als Kugel von diesem Durchmesser betrachtet wird?

Ausrechnung: Der Aequator = 360 . 15 Meilen = 5400 Meilen, der Durchmesser = (5400 : 3,14) Meilen = zirka 1719 Meilen. Also die Oberfläche = (1719 . 1719 . 3,14) □ Meilen = zirka 9·280000 □ Meilen (nach abgekürzter Dezimalrechnung).

§ 31.

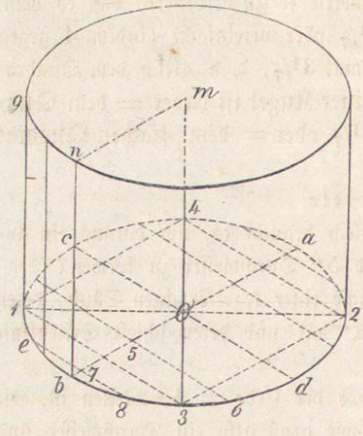
Geometrische Zeichnung von Zylinder und Kegel.

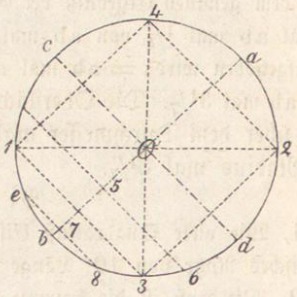
Um die Zeichnung auszuführen unterscheiden wir in diesen Körpern wieder die drei Ausdehnungen und tragen dieselben unter den bekannten Winkeln und in wirklichem Größenverhältniß zu einander ab.

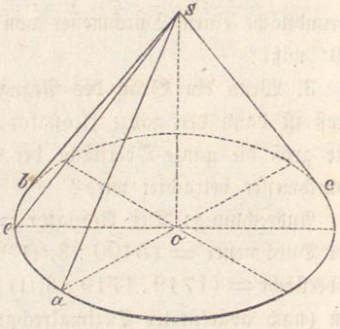
Da wollen wir zuerst die kreisförmigen Grundflächen nach unserem Verfahren zeichnen.

1. Zylinder.

Wir stellen als Grundlage den Kreis in seiner wirklichen Größe dar und bezeichnen darin durch zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser ab und cd seine Länge und Breite, und nun haben wir nur eine hinreichende Anzahl Längen- und Breitenstücke abzutragen, die zu Punkten der Kreislinie führen. Man zeichne hierauf in einer neuen Figur ab und cd (sich gegenseitig halbirend) unter den bestimmten Winkeln von 60° und 120° aneinander, dann trage man O 5 als Längenstück und 5 6 als Breitenstück, das letztere parallel mit Od ab, ebenso die Stücke O 7







und 7 8 u. s. f. auch in der Verlängerung z. B. 7 e ꝛc. und ebenso auf der entgegengesetzten Seite gegen O a.

Noch etwas besser geht es, wenn man im Kreise mittelst zwei senkrechten Durchmessern, welche die Winkel von Länge und Breite halbiren, das Quadrat 1 3 2 4 einzeichnet, dessen Seiten also mit Länge und Breite parallel sind. Zeichnet man dieses Quadrat nach unserm angenommenen Verfahren (isometrisch), so hat man die Raute 1 3 2 4, wobei die zwei weitest auseinander stehenden Punkte 1 und 2, und die zwei nahesten 4 und 3 sind. Das Uebrige dann gleich wie oben.

Die Reihe Punkte 1 e b 8 3 6 d u. s. f., die man so von der Kreislinie abgetragen hat, werden nun durch eine möglichst stetige, (nicht eckige) krumme Linie mit einander verbunden, und diese ist dann die isometrische Zeichnung der Kreislinie. Trägt man hierauf aus O die Höhe O m so ab, daß sie mit Länge und Breite wieder die nämlichen Winkel von 60° und 120° bildet und alsdann aus den Punkten 1 e b 8 3 6 u. s. f. Parallellinien mit O m und von gleicher Höhe wie O m z. B. 1 9, b n u. s. f., so darf man nur die Endpunkte wie 9, n u. s. f. gleich verbinden wie unten und das Ganze stellt die Zeichnung des Zylinders dar.

Anmerkung. Eine länglich gebogene Linie (wie 1 b 3 d 2 a 4 c), welche die isometrische Zeichnung der Kreislinie ist, nennt man in der Geometrie

Ellypse, 1 2 und 3 4 bezeichnen die große und kleine Axe derselben. Wenn man einen Kreis schief vor sich stellt, so ist das Bild desselben, wie man es sieht, eine Ellypse. Die Astronomen beweisen, daß die Planeten in ellyptischen Bahnen um die Sonne kreisen. Die Ellypse gehört zu einer Gattung Linien von den merkwürdigsten Eigenschaften. Diejenigen Schüler, welche Lust haben, hierüber noch mehr zu vernehmen, mögen später noch weiter führende Anleitungen zur Geometrie nachlesen.

Wenn man die Zeichnung des Zylinders betrachtet, so sieht man, daß das Rechteck, durch dessen Umdrehung der wirkliche Zylinder erzeugt würde, zur Grundlinie bO (also den Radius der Bodenfläche) und zur Höhe Om hat. Die Seite Om bildet alsdann die Axe des Zylinders, mn beschreibt dessen obere Grundfläche und nb als Seitenlinie dessen krumme Oberfläche. Man richtet die Zeichnung natürlich so ein, daß die Höhe auf dem Zeichnungsblatte vertikal zu stehen kommt. Diejenigen Linien in der Zeichnung geben (wie früher) nur allein die wirkliche Größe an, welche entweder mit der Höhe oder mit der Länge oder mit der Breite parallel gehen. Wenn man die Größe einer andern schiefen Linie z. B. na finden will, so muß man zuerst ein Rechteck von der Grundlinie ba und der Höhe bn zeichnen, in diesem Rechteck gibt dann die Diagonale von n bis a die wahre Größe der gesuchten Linie an, die man dann auch etwa durch einen angezeigten Maßstab messen kann.

Die Größe einer Grundfläche wäre hier gemäß Früherem = Ob mal Ob mal 3,14 und die Größe der krummen Zylinderfläche = ab mal bn mal 3,14.

2. Kegel.

Die Grundfläche des Kegels wird ganz gleich gezeichnet, wie diejenige des Zylinders, ebenso die Höhe os. Vom Scheitel s aber gehen nun Seitenlinien nach jedem Punkte des Umfangs der Grundfläche; die beiden äußersten Seitenlinien sind diejenigen, die den Umfang bloß berühren, diese sind sb und sc. Keine von allen diesen Seitenlinien kommt hier in wahrer Größe vor. Man findet die wahre Größe der Seitenlinie in der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete ao und dessen andere os ist. Wird dieses rechtwinklige Dreieck um os als Axe umgedreht, so beschreibt es den körperlichen Raum des Kegels; as (in der wahren Größe) beschreibt dann die Kegelfläche, ao die Grundfläche und der Punkt a den Umfang derselben.

Wollte man einen abgestumpften Kegel zeichnen, so müßte man von dem ganzen Kegel nur einen kleinern abschneiden. Um die Grundfläche

desselben zu zeichnen, könnte man nur von einem Punkte von as eine Parallele mit ao bis nach os ziehen; diese Linie wäre der Radius der Grundfläche. Gemäß Früherm ist der Umfang der Grundfläche des Kegels = 2ao mal 3,14; — also die krumme Kegelfläche = ao mal 3,14 mal as.

Die Kugel mag man bloß als Kreis zeichnen mit krummer Schraffirung.

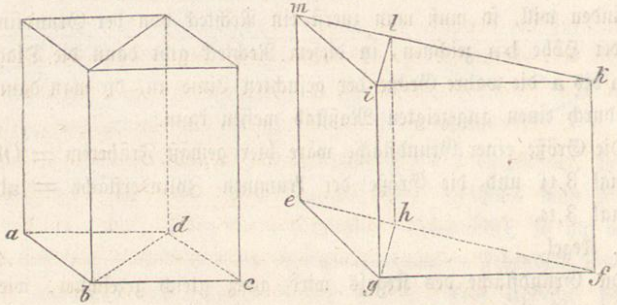
Aufgaben:

1. Einen liegenden Zylinder zu zeichnen, d. h. so, daß die Axe des Zylinders die Länge ist. 2. Ebenso einen Kegel. 3. Einen abgestumpften Kegel zu zeichnen. 4. Mitten durch einen Würfel parallel mit der Länge einen Zylinder zu zeichnen. U. s. f. beliebige Zusammensetzungen.

§ 32.

Ausmessung beliebig geformter Körperräume.

Wenn man eine rechtwinklige Säule diagonal entzweischneidet, so entstehen zwei gleich große dreiseitige Säulen, deren Grundflächen (abd



und bcd) gleiche, rechtwinklige Dreiecke sind. (Der Lehrer zeigt eine auf diese Weise in zwei Theile zerschnittene Säule vor und indem er den einen Theil in der Verlängerung des andern ansetzt, läßt er die Schüler erkennen, daß beide gleich groß sind.) Da nun jede dieser dreiseitigen Säulen gleich der Hälfte der ganzen ist, so folgt:

Der Kubikinhalt einer geraden Säule, die zur Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck hat, ist gleich der Länge mal der Breite, mal der Höhe, getheilt durch 2. Da aber das Produkt aus Länge und Breite getheilt durch 2 gleich ist dem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche, so hat man kürzer:

Der Kubikinhalt einer solchen Säule ist gleich der Grundfläche mal der Höhe.

Aus zwei gleich hohen geraden Säulen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke (egh und fgh) mit einer gleichen Kathete (gh), läßt sich eine gerade dreiseitige Säule (efgmik) zusammensetzen, deren Grundfläche eine beliebiges Dreieck (efg) ist. Nach dem Obigen ist aber der Inhalt jeder der beiden Säulen gleich der Grundfläche mal der Höhe, daher ihre Summe auch gleich der Summe der beiden Grundflächen mal der Höhe. Beide Grundflächen (egh und gfh) zusammen geben die Grundfläche efg der ganzen Säule; daraus folgt:

Der Kubikinhalt jeder geraden dreiseitigen Säule ist gleich der Grundfläche mal der Höhe.

Da jede gerade vielseitige Säule in lauter gleichhohe dreiseitige zerlegt werden kann (der Lehrer zeigt dieß), so folgt ähnlich wie vorhin:

Der Inhalt jeder geraden vielseitigen Säule ist gleich der Grundfläche mal der Höhe.

Deßwegen ist auch ein gerader Zylinder, als Säule mit sehr vielen Seitenflächen betrachtet, gleich dem Produkt aus der Grundfläche mal der Höhe.

In der wissenschaftlichen Geometrie wird endlich bewiesen, daß Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich groß sind. Nun kann z. B. eine dreiseitige gerade Säule in drei Pyramiden zerlegt werden, von denen zwei mit einander gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, die dritte hat aber mit einer der beiden ebenfalls eine gleiche Fläche und die gegenüberliegende Spitze gemeinsam, also sind alle drei gleich groß. (Der Lehrer zeigt 3 solche Pyramiden aus Holz oder Karton, die zusammen eine gerade dreiseitige Säule bilden.) Hieraus folgt:

Der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Inhalts einer Säule von derselben Grundfläche und Höhe. Und durch Zusammensetzung wie oben:

Der körperliche Inhalt einer beliebigen Pyramide ist gleich der Grundfläche mal der Höhe getheilt durch 3.

Deßwegen ist auch ein Kegel, als Pyramide mit sehr vielen Seitenflächen betrachtet, gleich einem Drittel des Produkts aus der Grundfläche mal der Höhe.

Da endlich eine Kugel aus sehr vielen schmalen Pyramiden bestehend gedacht werden kann, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkt der Kugel liegen und deren Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche bilden, so folgt hieraus:

Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich ihrer Oberfläche mal dem Radius getheilt durch 3. Oder da ihre Oberfläche gleich ist 4 mal Radius mal Radius mal 3,14, so hat man auch:

Die Kugel ist = $^4/_3$ mal Radius, mal Radius, mal Radius, mal 3,14.

Alle übrigen regelmäßigen oder unregelmäßigen Körperräume kann man, um sie auszumessen, entweder in Säulen, Pyramiden ꝛc. oder in Theile beider Art zerlegen, damit man sodann jedes einzelne Stück ausmessen und berechnen und hernach alles in eine Summe bringen kann; oder man sucht auch einen leichter meßbaren Körperraum anzunehmen, von dem der zu messende nicht stark abweicht, um sodann ein annäherndes Messungsresultat zu finden.

Aufgaben.

1. Eine 5′ hohe Säule hat zur Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete 2′ die andere $3^1/_4$′ mißt. Welchen Inhalt hat diese Säule? Antw. $\frac{3^1/_4 . 2}{2}$. 5 Kb.′ = $3^1/_4$. 5 Kb.′ = $16^1/_4$ Kb.′.

2. Irgend ein gerader säulenförmiger $18^1/_3$′ hoher Körper hat zur Grundfläche ein Vieleck, das 120 □′ hält, wie groß ist er? Antw. ($18^1/_3$. 120) Kb.′ = 2200 Kb.′.

3. Welchen körperlichen Inhalt hat eine zylindrische Stange von 4″ Durchmesser und 20′ Länge, und wie schwer wäre dieselbe, wenn sie aus Eisen besteht, wovon ein Kb.′ 420 Pfund wiegt? Der Inhalt ist = $0{,}2 . 0{,}2 . ^{22}/_7 . 20$ Kb.′ = $0{,}^8 . ^{22}/_7$ Kb.′ = (17,6 : 7) Kb.′ = 2,5 Kb.′, also das Gewicht = $10^1/_2$ Zentner oder 1050 Pfund (annähernd).

4. Ein Steinhauer verfertigt einen Grabstein aus Marmor, genau in Form eines Tetraeders von 2′ Kante; wie viel Masse enthält dieser Stein und welches ist ihr Gewicht, wenn 1 Kb.′ Marmor 146 Pfund wiegt?

Ausführung: Man zeichne (nach einem genauen Maßstabe mit Unterabtheilungen) ein gleichseitiges Dreieck, dessen jede Seite 2 Längentheile (2′ darstellend) mißt; dann konstruire man in diesem Dreieck die Höhe (alle drei Höhenperpendikel sind gleich groß und vereinigen sich im Mittelpunkt des Dreiecks). Durch genaue Messung dieser Höhe nach dem Maßstabe wird man dieselbe = zirka 1′,7 finden. Der Mittelpunkt der Grundfläche wird nach dem Maßstabe um $^1/_3$ von 1′,7 von einer Seite entfernt sein, und da die Höhe des Tetraeders genau in den Mittelpunkt

der Grundfläche fallen muß, so bildet diese Höhe mit der Höhe einer Seitenfläche und der Entfernung der Mitte der Grundfläche von einer ihrer Seiten ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse 1',7 und dessen eine Kathete $^1/_3$ von 1',7 beträgt. Konstruirt man dasselbe und mißt die zu suchende Höhe nach dem Maßstabe, so wird man dieselbe = zirka 1',6 finden. Nun ist der Inhalt des Tetraeders = $\frac{2 . 1,7 . 1,6}{2 . 3}$ Kb.' = $\frac{2,7}{3}$ Kb.' = 0,9 Kb.' (nur bis auf 10tel gerechnet). Also das Gewicht des Marmorkörpers = 146 . 0,9 ℔ = zirka 131,4 ℔.

5. Ein Trog hat eine Grundfläche von 120$^1/_2$ □' und ist 4' hoch mit Wasser angefüllt; wie viele Kb.', wie viele Saum, oder wie viele Tansen à 40 Maß hält er? Wie groß ist das Gewicht der ganzen Wassermasse? Antw. Der Inhalt ist = (120$^1/_2$. 4) Kb.' = 482 Kb.' = (4,82 . 18) Saum = 86,76 Saum = 216,9 Tansen. Das Gewicht der Wassermasse = 482 . 54 ℔ = 260,28 Zentner.

III. Neuntes Schuljahr.

Vom zurückgelegten 14. bis 15. Altersjahre.

§ 33.

Aufgabe.

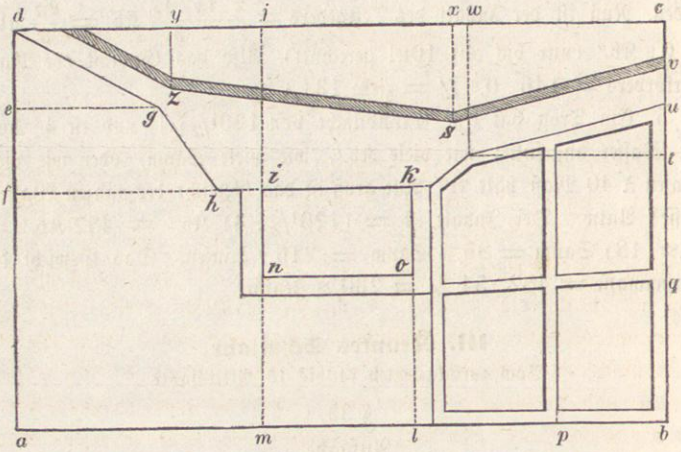
Nachholung der schwierigern Längen-, Flächen- und Körpermessungen, die für das gewöhnliche Leben von Bedeutung und Vortheil sind. (Hauptsächlich Messungen im Freien.) Grundpläne in gesteigerter Fortsetzung der frühern Uebungen; Durchschnitte. Grund- und Aufrisse einfacher Baugegenstände. Damit verbundene Rechnungen. Geometrische Darstellung technischer Gegenstände und Vorrichtungen, die für den volkswirthschaftlichen Verkehr von Bedeutung sind.

§ 34.

Schlußmessungen im Freien.

1. Nach dem bis jetzt verfolgten Gange ist vorausgesetzt worden, daß nur die allereinfachsten Anfänge in Messungen im Freien schon im 6ten Schuljahre gemacht werden. Der Lehrer wird aber diese Uebungen in den Klassen der Ergänzungsschule so fortsetzen, daß er von Zeit zu Zeit, gerade wie es die Verhältnisse erlauben, mit einer Klasse oder auch mit zweien, im Freien verschiedenartige, in der Schwierigkeit sich steigernde Vermessungen macht, Plänchen (siehe die Beispiele auf Seite 190 und 191) von einzelnen Grundstücken, so wie allmälig von Complexen, wenn auch nur

geringern Umfangs, aufnimmt, diese Pläne zeichnen und daran die Bestimmung des Flächeninhalts der einzelnen Grundstücke knüpfen läßt. Folgende Zeichnung z. B. stellt das Grundplänchen eines Schulhauses sammt der Umgebung dar. Die Absteckung so wie die Einfassung sind sämmtlich rechtwinklig.

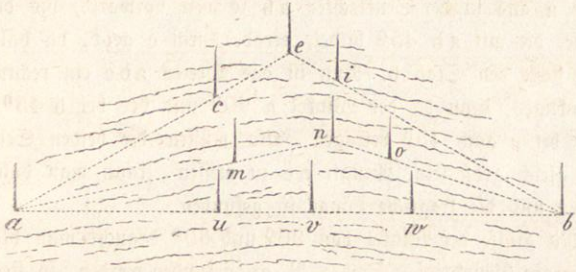


Die Hülfsmittel sind die schon bekannten: Maßstab (Meßkette) und Winkelkreuz (Kreuzscheibe). Die Aufnahme geschieht, wie früher gezeigt wurde, nach Dreiecken, gewöhnlich rechtwinkligen, und Trapezen, deren parallele Seiten Perpendikel auf die Grundlinie bilden. Soll bei der Planaufnahme noch der Flächeninhalt der einzelnen Grundstücke bestimmt werden, so wird schon zum Voraus so viel als möglich nach dieser Rücksicht das Ganze abgetheilt. Aeltere Schüler, z. B. diejenigen, deren Eltern Landwirthschaft treiben, werden aufgemuntert, von ihrem Heimwesen einen eigenen Grundplan aufzunehmen, zu zeichnen und mit den nöthigen Berechnungen zu versehen. Dieser Grundplan wird in vielen Fällen bei der Bewirthung des Heimwesens ꝛc. mit Vortheil benutzt werden können. (Vergleiche hiemit Bewirthungs-, Ertrags- und Kaufs- oder Verkaufsrechnungen.)

2. Eine nicht unwichtige Uebung ist nun besonders die, horizontale oder vertikale Distanzen (wagrechte Abstände und Höhen), die nicht zugänglich sind, zu messen.

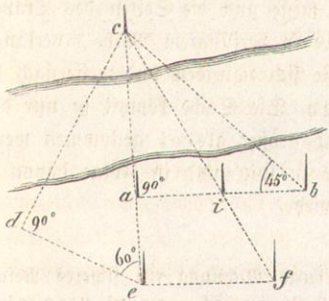
Zuerst wollen wir aber noch ein Verfahren andeuten, auf welche Weise sich eine gerade Linie von einem Punkte zum andern abstecken

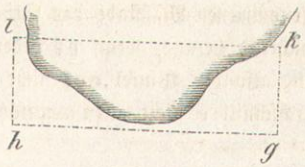
läßt, im Falle man wegen ansteigendem und sich wieder senkendem Boden vom ersten Punkte bis zum zweiten nicht sehen (visiren) kann. Es seien a und b die beiden bezeichneten Punkte und zwischen a und b hebe sich der Boden so, daß man von a nicht bis b zu sehen vermag.



Man gehe in die erhöhte Lage von e, n, v, wo es möglich ist, sowohl nach a als b hinzublicken. Stellt man z. B. in e einen Stab auf und bringt alsdann in die Richtung ea den neuen Stab bei c, und in die Richtung eb denjenigen bei i, so müßten alsdann die Stäbe cei in einer und derselben Richtung liegen, wenn e auch in der Richtung von ab sich befände. Man rücke nun weiter vor, z. B. bis n und mache hier das Gleiche. Befinden sich dann mno noch nicht in derselben Richtung, so gehe man weiter, bis man eine Stelle v findet, bei welcher, wenn u in die Richtung von av und w in diejenige von bv gebracht wird, auch die Punkte uvw in derselben Richtung liegen.

3. Es sei die wagrechte Entfernung des Punktes a von c (siehe die nächste Figur) zu bestimmen, unter der Annahme, daß sich zwischen den beiden Punkten ein Teich oder ein Fluß ꝛc., jedoch nicht von gar zu großer Ausdehnung befinde.





α. Man kann hier je nach den Umständen verschiedenartig verfahren. Wenn sich um a genug Platz längs ab befindet, so kann man aus a mittelst der Kreuzscheibe eine Senkrechte auf ac abstecken; hat man dann auf der Kreuzscheibe auch noch den Winkel von 45° bezeichnet, so gehe man von a aus in der Senkrechten ab so weit vorwärts, bis die Richtungslinie, die mit ab 45° bildet, gerade durch c geht, da halte man still und stecke den Stab b. Nun ist das Dreieck abc ein rechtwinklig-gleichschenkliges, denn da der Winkel a 90° und der bei b 45° ist, so muß der bei c auch 45° betragen, also müssen die beiden Seiten ac und ab gleich groß sein. Anstatt ac zu messen, kann man daher nun ab messen und die fragliche Länge ist gefunden.

β. Mit Hülfe der Winkel von 90° und 60° braucht man bloß eine halb so große Grundlinie. Soll z. B. ec gefunden werden, so stecke man (mittelst der Kreuzscheibe, auf der auch der Winkel von 60° bezeichnet ist) von e aus die Richtung ed ab, die mit ec 60° bildet; in dieser Richtung gehe man mit der Kreuzscheibe vor, bis der Perpendikel auf de durch c geht, so hat man ein Dreieck dec, in welchem die Winkel 90°, 60° und der dritte also 30° betragen. Ein solches Dreieck ist, wie wir früher gesehen, die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, in welchem dc die Höhe und de die halbe Grundlinie, also auch gleich der Hälfte von ce ist. Man messe also nur de und verdopple das Ergebniß, so gibt dieß die Länge von ec.

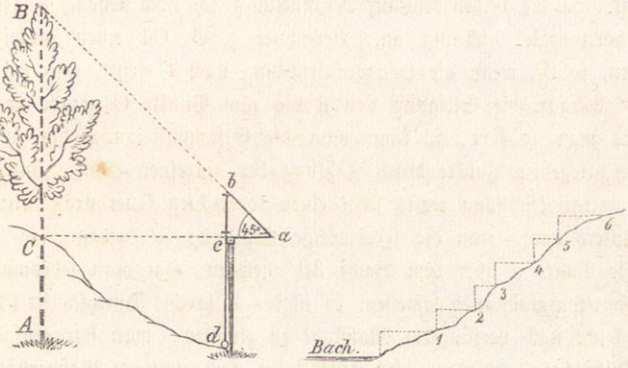
γ. Ein drittes Verfahren: durch Absteckung, Messung und Zeichnung ist nur dann anzuwenden, wenn man mit der nöthigen Genauigkeit verfahren kann. Man stecke in a und e die beiden Perpendikel ab und ef auf ec aus; alsdann visire man in einem beliebigen Punkte von ef, z. B. von f gegen c und lasse im Durchschnitt mit der Richtung ab, d. i. in i, einen Stab stecken. Man messe nun die Seiten des Trapezes aefi genau aus und zeichne dasselbe in verjüngtem Maße, verlängere alsdann die Seiten ea und fi bis sie sich schneiden und messe nach dem angenommenen Maßstabe das Stück ac. Die Sache kommt so nur dann annähernd heraus, wenn ef bedeutend größer als ai genommen werden kann, also der Winkel ecf nicht gar zu spitz und in Folge davon der Durchschnitt c nicht allzu ungefähr wird.*

---

* Der Lehrer aber wird für sich durch Rechnung ein sicheres Resultat finden. Er hat ac : (ac + ae) = ai : ef, also ac . ef = ac . ai + ae . ai oder

δ. Durch Absteckung eines Rechtecks kann in manchen Fällen eine nicht zugängliche Distanz, z. B. über Teiche ꝛc. gefunden werden. Man stecke z. B. auf die Richtung 1k in den Punkten l und k die beiden gleich langen Perpendikel 1h und kg ab und messe die Länge von hg, so ist dieß dann gerade auch die von 1k (nach der Eigenschaft eines Rechtecks).

4. *α.* Es sei der lothrechte Abstand AB (Höhe eines Baumes, eines Hauses, Thurmes ꝛc.) zu bestimmen.



Man kann hiezu wieder das auf ein ebenes Brettchen konstruirte Meßkreuz, oder dann einfach ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck benutzen, das auf ein geeignetes Brettchen konstruirt und in den Eckpunkten a, b und c mit feinen Visirstiftchen versehen ist. Wird dieses Dreieck bei c lothrecht an einen Stab befestigt und alsdann bei b ein Loth bd angebracht, so kann man leicht dafür sorgen, daß das Instrumentchen eine Stellung habe, in welcher die Linie bc mit der Linie bd zusammenfällt. — Sieht man nun über die Richtung ab hin, so wird man finden, ob dieselbe verlängert durch den Gipfel des Baumes geht. Ist dieses nicht der Fall, so wird man die Stellung so verändern, bis es zutrifft.

Alsdann wird man sich den Punkt C merken, wo die Visirlinie ac verlängert auf den Stamm des Baumes trifft und dann sind die Stücke AC und Ca in dem Bereiche, wo man sie wirklich messen kann.

---

ac (ef — ai) = ae . ai, folglich ac = $\frac{ae \cdot ai}{ef - ai}$. Hat er nun ae, ai und ef auf dem Felde gemessen, so setze er die erhaltenen Zahlen in die letzte Formel und er wird nach der Ausrechnung den rechten Längenwerth für ac bekommen.

Gesetzt, man fände $AC = 5^1/_2'$, $Ca = 27'$, so wäre alsdann die Höhe des Baumes $= (5^1/_2 + 27)' = 32^1/_2'$, weil eben $BC = Ca$ sein muß, im Falle AB lothrecht ist.

β. Man kann das gleiche Instrumentchen auch benutzen, um die allmälige Steigung des Bodens nach einer gewissen Richtung zu finden. Man nennt diese Messung nivelliren und kann hiezu auch statt des genannten Instrumentchens eine gekrümmte, mit den beiden Enden nach oben gerichtete Glasröhre benutzen, in die man irgend eine Flüssigkeit bringt. Da die beiden Niveaux bekanntlich gleich hoch stehen, so geben sie die horizontale Richtung an. Bezeichnet z. B. Cd einen ansteigenden Boden, so ist, wenn die Horizontalrichtung nach C trifft, und cd z. B. $5^1/_2'$ beträgt, die Steigung von d bis zum Punkte C gerade $= 5^1/_2'$. Fährt man so fort, so kann man die Gesammtsteigung bis zu einem höher gelegenen Punkte durch Zählung der einzelnen Höhen finden. —. Die vorige Zeichnung rechts stellt einen lothrechten Querdurchschnitt eines Bachufers dar; wenn die jedesmalige Erhebung $5'$ beträgt, so ist der höchste Punkt 6 über dem Bache $30'$ gelegen. Hat man jedesmal noch die Horizontalabstände gemessen, so ist der lothrechte Durchschnitt (Profil) sehr leicht nach verjüngtem Maßstabe zu zeichnen, man hat einfach nur die lothrechten und wagrechten Hülfslinien nach richtigen Maßverhältnissen unter rechten Winkeln auf einander folgend abzutragen und 0, 1, 2, 3 ꝛc. zu verbinden.

γ. Einige Aufgaben. 1. Gesetzt man hätte nach der unter 4, *α.* beschriebenen Weise die Höhe eines geraden lothrechten Baumstammes, von $3^1/_2'$ Umfang unten, gleich $69'$ gefunden, wie viel Kb.' Holz würde der Stamm halten?

Ausrechnung: Der Baumstamm ist annähernd gleich einem Kegel, dessen Grundfläche $3^1/_2'$ Umfang hat und dessen Höhe $65'$ beträgt. Nun ist nach Früherem:

der Halbmesser der Grundfläche $= 3^1/_2' : 6^2/_7 = {}^{49}/_{88}'$,

also die Grundfläche $= \frac{49 \cdot 49 \cdot 22}{88 \cdot 88 \cdot 7} \square'$,

also der Kubikinhalt des Stamms $= \frac{49 \cdot 49 \cdot 22 \cdot 65}{88 \cdot 88 \cdot 7 \cdot 3}$ Kb.' $= \frac{49 \cdot 7 \cdot 65}{88 \cdot 12}$ Kb.' $= 22295$ Kb.' $: 1056 = 21^{119}/_{1056}$ Kb.'.

2. Wie viele Kb.' und wie viele Klftr. würden annähernd 40 Tannen (ohne Aeste und Reisholz) abwerfen, wenn durchschnittlich jede am Fuß $4'$ Umfang hat und die mittlere Höhe zirka $70'$ beträgt?

3. Die Steigung eines ausgesteckten Weges zu messen.

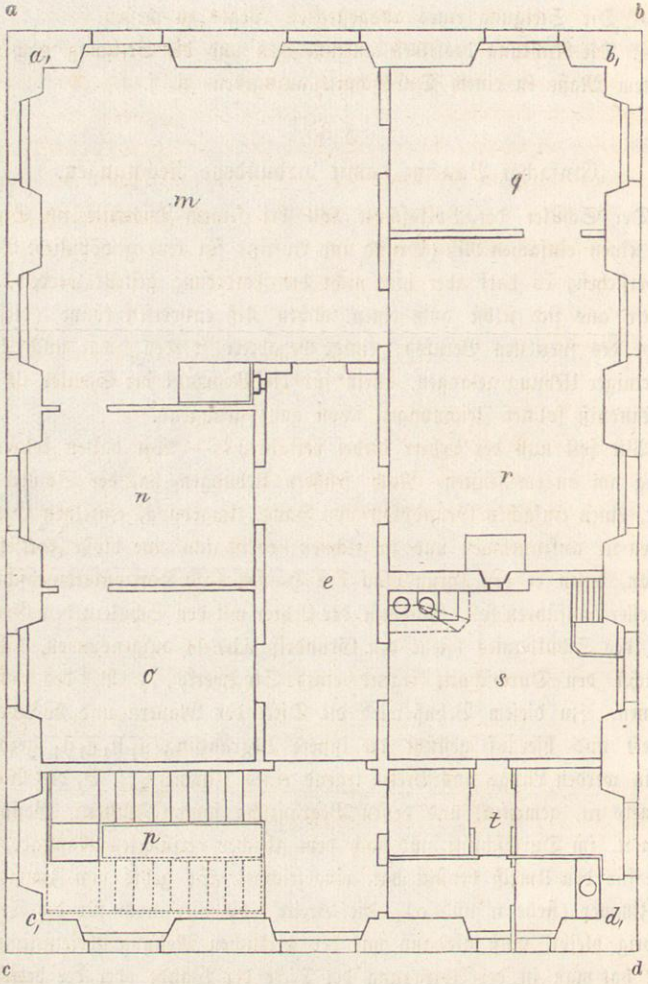
4. Die Richtung desselben aufzunehmen und die Steigung nach verjüngtem Maße in einem Durchschnitt anzugeben. U. s. f.

§ 35.

Einfacher Bauriß; damit verbundene Rechnungen.

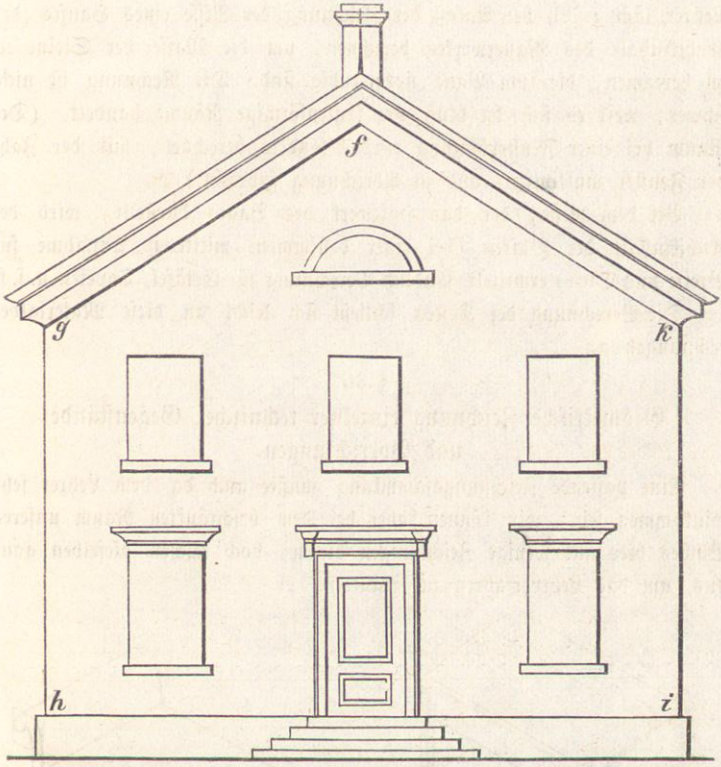
Der Schüler der Volksschule soll bei seinem Austritte im Stande sein, einen einfachen Riß (Grund und Aufriß) für eine gewöhnliche Baute zu verstehen; es darf aber hier nicht die Forderung gestellt werden, daß jeder aus sich selbst auch einen solchen Riß entwerfen könne (dieß ist Sache des speziellen Berufs); einige begabtere werden zwar auch hiezu bei einiger Uebung gelangen, allein für die Mehrzahl der Schüler ist das Verständniß solcher Zeichnungen schon ganz genügend.

Wie soll nun der Lehrer hiebei verfahren? — Wir halten folgenden Gang am angemessensten. Nach frühern Uebungen hat der Schüler gelernt, einen einfachen Grundplan von Haus, Umgebung, einzelnen Grundstücken ꝛc. aufzunehmen und zu zeichnen; es ist nun eine bloße Fortsetzung hievon, wenn er den Grundplan des Hauses (als Horizontaldurchschnitt) spezieller ausführen soll. Nachdem der Lehrer mit den Schülern den Grundplan des Schulhauses (siehe den Grundriß abcd) aufgenommen, läßt er zunächst den Durchschnitt irgend eines Stockwerks, z. B. des ersten, zeichnen. Zu diesem Behuf wird die Dicke der Mauern und Wände ermittelt und hierauf gestützt die innere Begränzung $a_1 b_1 c_1 d_1$ gezogen. Dann werden Länge und Breite irgend eines Zimmers, z. B. des Wohnzimmers m, gemessen, und dessen Begränzung sammt Fenstern, Gesimsen, Ofen ꝛc. im Durchschnitt und nach dem gleichen verjüngten Maßstabe, den man für den Umriß benützt hat, eingezeichnet. So gehts von Zimmer zu zu Zimmer (siehe n und o), die Breite, die hier noch für die Treppe p übrig bleibt, muß alsdann mit der wirklichen Messung übereinstimmen, sonst hat man in der Abtragung der Dicke der Wände oder der betreffenden Ausdehnung der Zimmer gefehlt. In gleicher Weise werden der durch eine Thüre geschlossene Gang e, die Zimmer q und r und die Küche s gezeichnet. Der Lehrer muß hier die Art, wie Einzelnes zu zeichnen ist, besonders erläutern, z. B. bedeuten die punktirten Linien bei p den Theil der Treppe, der ins Erdgeschoß hinabführt, während der andere Theil, durch den man gerade ins erste Stockwerk hinaufgelangt, durch ausgezogene Linien dargestellt ist; ferner bedeuten die punktirten Linien beim



Herd in der Küche den nach oben sich verengenden Rauchfang, bei welchem der oberste Durchschnitt durch das Rechteckchen mit der punktirten Linie angedeutet ist. Aehnlich die Zeichnung des Gießsteins mit dem Rinnbrett, die Zeichnung der Ofenöffnungen und Einmündungen. Zuletzt folgt die Zeichnung der kleinern Räumlichkeiten bei t, und so ist der Riß des ersten Stockwerks fertig. Auf eine ganz ähnliche Weise würde das Erdgeschoß u. s. f. gezeichnet.

Noch leichter ist die Zeichnung einer Seitenansicht (siehe z. B. die vordere Façade **fghik**). Nachdem die Höhe vom Giebel bis zum Boden, sowie diejenige von den Punkten **g** und **k** bis zum Boden gemessen sind (diese Messung mag direkte mit der Meßlatte oder Meßkette oder auf die in § 34, 4 angegebene Weise gemacht werden), wird zuerst das Fünfeck **fghik** und alsdann in dasselbe jeder der übrigen Theile wie Fenster, Thüren ꝛc. nach richtigem Maße gezeichnet. Das Uebrige ist hier noch leichter als beim Grundriß.



Die Darstellung einer Längen-Façade macht sich eben so leicht; um den Raum zu sparen, unterlassen wir es, die betreffende Zeichnung, die der Lehrer ganz aus dem Grundriß und der Vorder-Façade entnehmen kann, mitzugeben.

Der Fortgang wäre nun der, daß der Lehrer schon entworfene Risse den Schülern vorlegt. Hier wäre eine Sammlung solcher Zeichnungsvor-

lagen am Platze. Der Lehrer kann sich indessen auch eine Anzahl passender Risse bei einem Baumeister erbeten. Dieselben werden alsdann prüfend durchgangen, z. B. Was ist durch die Zeichnung bei p dargestellt; wie muß man sich dieß denken u. s. f. Wenn sich der Lehrer auf diesem Wege überzeugt hat, daß die Schüler einen vorgelegten Riß richtig verstehen, dann lasse er sie denselben nach irgend einem veränderten Maßstabe richtig zeichnen. U. s. f.

Endlich werden hieran verschiedene Rechnungsaufgaben geknüpft. Der Lehrer läßt z. B. bei Anlaß der Zeichnung der Risse eines Hauses den Kubikinhalt des Mauerwerkes berechnen, um die Masse der Steine ꝛc. zu berechnen, die zum Baue nothwendig sind. Die Rechnung ist nicht schwer, weil es sich da bloß um säulenförmige Räume handelt. (Der Raum bei einer Fensteröffnung wird besonders berechnet, mit der Zahl der Fenster multiplizirt und in Abrechnung gebracht.)

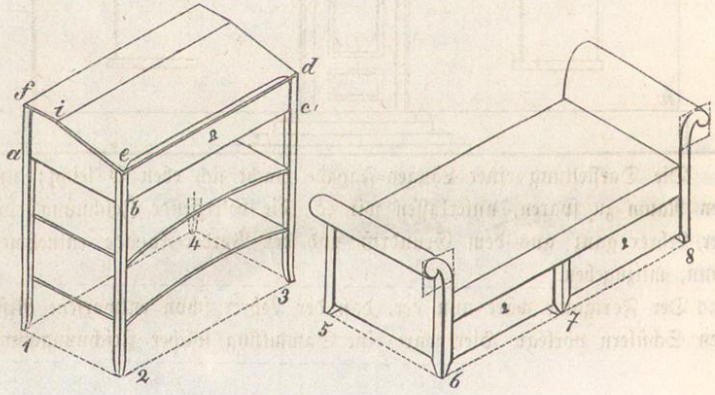
Bei dem Risse, der das Holzwerk des Baues darstellt, wird der Kubikinhalt der Balken (bei einer bestimmten mittleren Annahme für Breite und Dicke) ermittelt. Endlich Berechnung für Getäfel, Tapeten u. s. f.

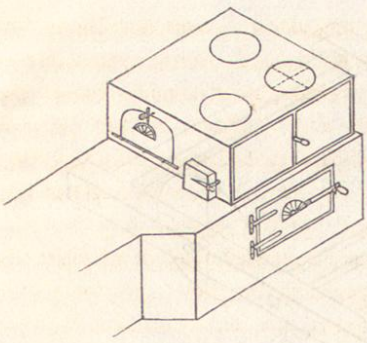
Die Berechnung der Kosten schließt sich leicht an diese Materialberechnungen an.

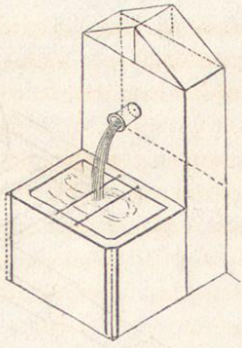
§ 36.

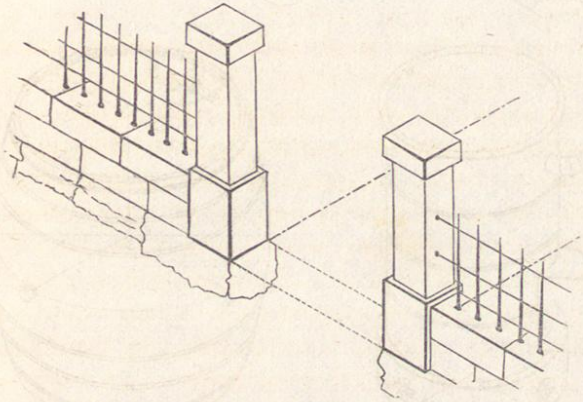
Geometrische Zeichnung einzelner technischer Gegenstände und Vorrichtungen.

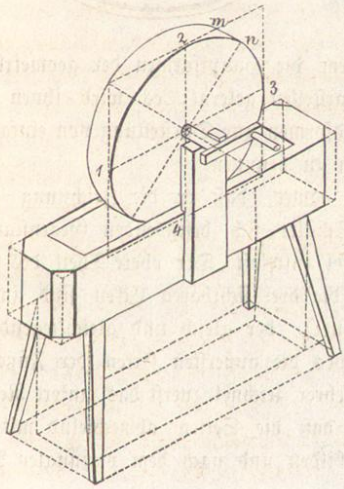
Eine passende Zeichnungssammlung müßte auch da dem Lehrer sehr willkommen sein; wir können aber bei dem beschränkten Raum unseres Buches hier nur wenige Zeichnungen bieten, doch reichen dieselben ganz aus, um das Lehrverfahren zu erläutern.

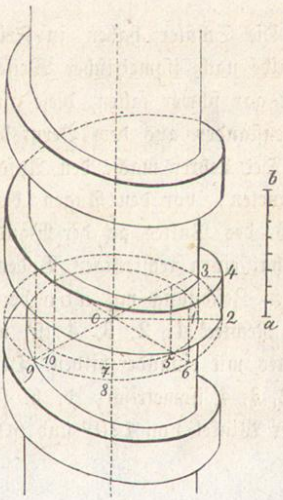


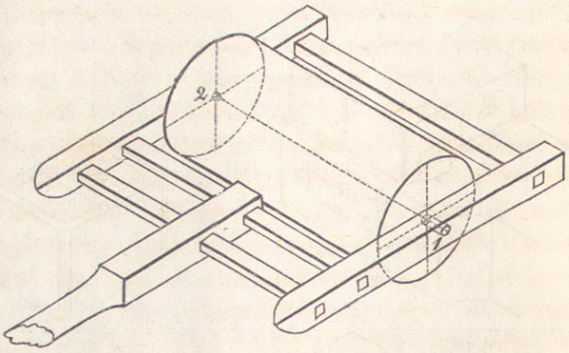


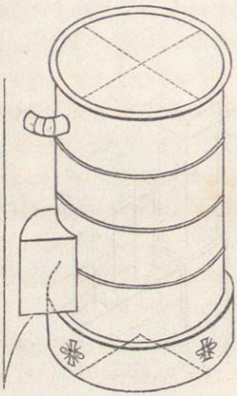


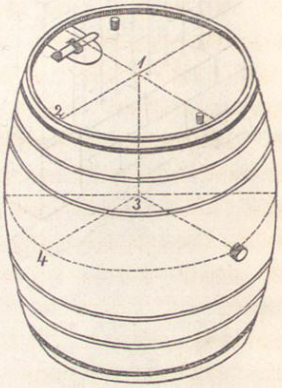



m
2
n
3
1
4


b
a
3
4
2
1
10
5
9
7
6
8







Die Schüler haben in Früherm die Hauptformen der geometrischen Gebilde nach isometrischer Weise darstellen gelernt; es wird ihnen nun nicht gar schwer fallen, diese Grundformen zur Darstellung von einfachern Gegenständen aus dem Berufsleben zu benutzen.

Der Lehrer mache den Anfang damit, daß er die Zeichnung eines geeigneten, vor den Augen der Schüler sich befindenden Gegenstandes, z. B. des Pultes an der Wandtafel entwirft. Der obere Theil des Pultes hat einen rechteckigen Boden (die drei sichtbaren Ecken sind in der obigen Zeichnung mit a b c bezeichnet), der gleich und gleichliegend mit dem Rechteck 1, 2, 3, 4 ist, welches die äußersten Ecken der Füße des Pultes mit einander bilden. Der Lehrer zeichnet zuerst das untere Rechteck 1, 2, 3, 4 isometrisch, d. h. so, daß die Seiten abwechselnd mit einander Winkel von 120^0 und 60^0 bilden und nach dem verjüngten Maß-

stabe so viel messen als in Wirklichkeit. Diese Seiten werden also wirklich gemessen und dann abgetragen. Der verjüngte Maßstab wird beigezeichnet; hier ist er bei allen diesen Zeichnungen nur um Platz zu ersparen weggelassen. Aus den Punkten 1, 2 und 3 werden nun die Richtungen 1 a, 2 b und 3 c so gezogen, daß sie mit den punktirten Linien, welche Länge und Breite vorstellen, die entsprechenden Winkel von 60° bilden. Zuletzt werden noch die Stücke be, cd und af gemessen und als entsprechende Verlängerung abgetragen. Die Breite fi des oberen Randes wird in der richtigen Größe parallel mit der Breite ab gezogen. Die übrigen begränzenden Linien können nun leicht gefunden werden, da je eine derselben mit einer schon bestimmten parallel geht. Endlich ergibt sich eben so leicht, wie die Kanten der Füße (Beine) sowie die parallel mit dem Boden eingeschobenen Bretter zu zeichnen sind. Die fertige Zeichnung stellt dann unser Pult so dar, daß Längen-, Breiten- und Höhenrichtungen desselben gleiche Winkel (von 60° und 120°) mit einander bilden, wobei die einzelnen Linien dieser Richtungen nach dem verjüngten Maßstabe so viel messen, als in Wirklichkeit. Es kann also aus der vorliegenden Zeichnung alles entnommen werden, was sich auf Gestalt und Größe des dargestellten Gegenstandes bezieht.

Die Schüler zeichnen hierauf in gleicher Weise Tisch- und Schulbänke 2c.

Das Sopha (siehe 5, 6, 7, 8) ist ebenfalls nicht gar schwer zu zeichnen. Die bestimmende Grundlage bildet wieder ein Rechteck (siehe 5, 6, 8), das zuerst ganz auszuzeichnen ist. Die geraden Höhen-, Längen- und Breitenlinien sind nun leicht zu ziehen. Wie die ausgeschweiften Seitenränder zu zeichnen sind, zeigen die isometrisch gezeichneten Quadrätchen. (Die wirkliche Krümmung könnte z. B. der Schreiner finden, wenn er diese Ausbiegungen in die wirklichen Quadrätchen statt in die verschobenen einzeichnete.)

Nach diesem Beispiel können die Schüler Sessel, Kommoden, Schränke 2c. isometrisch zeichnen.

Die drei folgenden Zeichnungen: Heerd, Brunnen und Gartenportal machen nur ganz geringe Schwierigkeiten, da außer den mehr zur Verzierung angebrachten kleineren Figuren, beinahe nur Längen-, Breiten- und Höhenrichtungen vorkommen.

Die Schüler zeichnen nach eigener Anschauung und Messung Oefen (von rechtwinklig säulenförmiger Grundform) Brunnen, Treppen, Geländer 2c.

Schon schwieriger sind die beiden folgenden Zeichnungen: Schleifstein und Schraube, wo statt der rechtwinkligen Säulenform der Zylinder vorherrscht. Man mag hier zuerst die vordere Kreisfläche des Schleifsteins zeichnen, indem man den Höhendurchmesser 2 4 und dann den Längendurchmesser 1 3 zieht, die ellyptische Form wird dann ausgeführt wie früher beim Zylinder (Seite 224). Ein umschließendes Quadrat erleichtert die Ausführung. Hierauf wird die Dicke des Steins m n und dann gleich wie die vordere, so auch die hintere Kreisfläche des Steins bestimmt, von welcher nur die halbe Begränzung sichtbar ist. Das Folgende ist nun leichter, indem die Grundform des tragenden Gestells durch punktirte Linien als rechtwinklige Säule dargestellt ist. Die Ausspreizung der Füße ist ebenfalls durch ein punktirtes Rechteck unten bestimmt.

Bei der Schraube stellt die punktirte innere Ellypse den Kreisdurchschnitt des Zylinders dar, um den sich der Schraubenkörper windet; die Schraubenweite ist durch a b dargestellt, d. h. bei einem ganzen Umgange muß jeder Punkt der Schraubenwindung um a b steigen, bei einem 8tel des Umgangs also auch um $^1/_8$ von a b. Nun wird ein Rechteckchen, dessen Grundlinie 5 6 (oder 9 10) und dessen Höhe 1 3 (oder 2 4) ist, an der Zylinderfläche so umgedreht, daß 1 3 immer in diese Fläche fällt, und die Richtung des Rechteckchens durch die Axe geht und daß zugleich für jeden Punkt des Rechteckchens eine stetige Steigung von a b auf die ganze Umdrehung Statt findet. Zu diesem Behuf theile man die Umdrehung in eine größere Anzahl gleiche Theile (hier sind deren 8 genommen) und merke die Theilungspunkte auf der isometrischen Zeichnung der innern und äußern Kreislinie an (siehe hier die Punkte 1, 5, 7 u. s. f.). Der Punkt 2 muß nun bei $^1/_8$ der Umdrehung um $^1/_8$ a b steigen, sein dießfälliger Ort wird gefunden, wenn man vom Punkte 6 um $^1/_8$ a b in der punktirten Höhenlinie aufwärts steigt, da trifft man in die vom Punkt 2 beschriebene und ausgezogene Schraubenlinie. Geht man noch um die Höhe des Rechteckchens weiter hinauf, so trifft man in die vom Punkt 4 beschriebene Schraubenlinie. Geht man von 5 an um $^1/_8$ a b mehr die Höhe des Rechteckchens aufwärts, so trifft man in die von 3 auf der Zylinderfläche beschriebene Schraubenlinie und so geht es fort: z. B. bei 8 muß man um $^2/_8$ a b steigen, um in die untere, und um $^2/_8$ a b mehr die Rechteckhöhe, um in die nächst obere Schraubenlinie zu gelangen. Bei 7 ähnlich u. s. f. Die vom Punkt 1 beschriebene Schraubenlinie ist hier verdeckt und darum nicht ausgezogen. Werden die auf die vorhin ange-

deutete Weise bestimmten Punkte der einzelnen Schraubenlinien, beschrieben von 1, 2, 3, 4, für mehrere Umgänge der Steigung gemäß verbunden, so erhält man das ganze Schraubengewinde, wie es die Zeichnung darstellt.

Die folgende Zeichnung, eine Ackerwalze (Kleerolle) darstellend, ist nun leichter auszuführen. Wenn die Walze nach der Längenrichtung gezeichnet ist, so sind an dem einfassenden Gestelle beinahe nur Richtungen auszuziehen, die mit Länge oder Breite oder Höhe parallel sind. Man hat Sorge zu tragen, daß die Zapfen bei 1 und bei 2, um welche sich die Walze drehen soll, schön in die Mitte der innern Seitenflächen der Längenbalken treffen.

Die beiden letzten Zeichnungen bieten ebenfalls nicht gar viele Schwierigkeiten. Die erste stellt einen Zylinderofen dar, der in eine Nische zu stehen kommt. Die Radien des Zylinders und der steinernen Unterlage sind durch punktirte Linien angedeutet, die Höhe kann aus der Seitenlinie entnommen werden. Die Einmündung in den Ofen von Seite der Nische links und das Ausgangsrohr ebendahin, sind nicht schwer in der Zeichnung anzubringen.

Bei der letzten Zeichnung (ein Faß) ist der Radius der beiden Boden durch 1 2, der Radius des Bauches oder die halbe Spundtiefe durch 3 4, und die halbe Entfernung der beiden Faßboden durch 1 3 angedeutet. Es ist leicht einzusehen, daß hier nur parallele, nach den Seitenlinien sich erweiternde und wieder verengernde Kreise isometrisch zu zeichnen sind, um die Hauptform des Fasses darzustellen. Man kann also zuerst die beiden parallel liegenden Kreise der Halbmesser 1 2 und 3 4 isometrisch zeichnen und alsdann durch die beiden gebogenen Seitenlinien die Bauchung des Fasses andeuten, so, wie man sie haben will; dann ist die Hälfte der Hauptform des Fasses bestimmt. Die andere Hälfte wird umgekehrt an den Kreis vom Halbmesser 3 4 angezeichnet u. s. f.

§ 37.
Vermischte praktische Schlußaufgaben.

1. Jemand will eine Landanlage am Seeufer machen, auf einem rechteckigen Stück, das 285′ lang und 93′ breit ist. Nun muß er diesen Raum durchschnittlich $4^1/_2$′ hoch mit Erde ausfüllen; wie viele Kb.′ oder Kbkklftr. Erde bedarf er? Dann hat er nach drei Seiten eine Schutzmauer zu errichten, die nach ihrer äußern mit dem Ufer parallelen Länge 285′ und auf jeder der beiden gegen das Ufer reichenden Seiten 93′ mißt;

dabei soll sie $1^3/_4$' dick, auf der längern Seite im See $5^3/_4$' hoch, auf den beiden andern Seiten im Durchschnitt $4^1/_2$' hoch sein; wie viele Kb.' Steine sind hiezu nothwendig? Jeder Schüler macht nun eine Kostenberechnung nach ihm passend scheinenden Bedingungen.

2. Jemand läßt das Fundament zu einem Hause graben und zwar für eine Länge von 95' und eine Breite von 50', die Tiefe soll 13' Fuß betragen, da ein geräumiger Keller gemacht werden soll. Wie hoch werden sich bloß die Kosten der Ausgrabung belaufen, wenn der Kb.' auf $2^1/_4$ Rappen kommt? Die Schüler können überdieß einen annähernden Plan für den Bau und die Kostenberechnung nach eigner Idee versuchen.

3. Eine Mauer ist auszuführen von 400' Länge, 10' Höhe, 18" Dicke unten und bei allmäliger Abnahme 12" Dicke oben; wie viele Steine sind hiezu erforderlich? Wie viel macht dieß in Fudern à 30 Ztr. (das Fuder für 2 Pferde berechnet), wenn das Gewicht der Steine zu 1,05 Ztr. auf den Kb.' berechnet wird?

4. Ein Sandsteinblock, durchschnittlich 4' breit, 3' dick und 10' lang, soll auf dem Wagen weggeführt werden; wie viele Pferde wären nöthig, wenn man einem zirka 15 Ztr. zumuthet? Antw. 8 Pferde.

5. Ein stehender Eichbaum (als Kelter- [Trott-] Baum zu benutzen) mißt unten im Umfang $12^1/_2$' und ist auf eine Höhe von 60' bis ans Ende einer noch sehr tragbaren Gabel zu gebrauchen. Vor der Ausgabelung mißt der Baum im Umfang noch $9^1/_2$' und da die beiden Gabeln sehr stark sind, so wollen wir zur Berechnung den Baum der Einfachheit wegen als ungetheilt und dessen obern Umfang $9^1/_2$' annehmen. Es fragt sich nun: 1) Welches Gewicht wird der Trottbaum haben (1 Kb.' zu 40 ℔ gerechnet) und wie viel Pferdekräfte braucht man, um den Baum wegzuführen (15 Ztr. auf 1 Pferd gerechnet)? 2) Welchen Druck wird er auf der Presse ausüben, wenn er 8' vom hintern Unterstützungspunkt auf die Preßblöcke zu liegen kommt, und man ihm vorn 55' vom Unterstützungspunkt entfernt, noch einen zylindrischen Stein von 5' Kreisdurchmesser und 4' Höhe anhängt? — Ausrechnung: 1) Wir nehmen für den Baum einen Mittelhalbmesser. Das Mittel der beiden Umfänge beträgt $(12^1/_2 + 9^1/_2)' : 2 = 11'$, also ist der Durchmesser des mittlern Umfangs $= 11' : {}^{22}/_7 = {}^7/_2'$ und der Halbmesser $= {}^7/_4'$, daher der Kreis desselben $= {}^7/_4 . {}^7/_4 . {}^{22}/_7 \square'$, folglich der Inhalt des Baumes $= {}^7/_4 . {}^7/_4 . {}^{22}/_7 . 60$ Kb.' und sein Gewicht $= \frac{7 . 11 . 15 . 40}{2}$ ℔ $=$ $77 . 300$ ℔ $= 231$ Ztr. Also wäre die Kraft von ungefähr 15 Pferden

nöthig, um den Baum wegzuschaffen. 2) Das Gewicht des anzuhängenden Steins beträgt $^5/_2 \cdot {}^5/_2 \cdot {}^{22}/_7 \cdot 4 \cdot 1{,}05$ Ztr. $= 5 \cdot 5 \cdot 22 \cdot 0{,}15$ Ztr. $= 22 \cdot {}^{15}/_4$ Ztr. $= 82^1/_2$ Ztr. Zur Berechnung des Drucks auf der Trotte müssen wir aus der Naturlehre eine Thatsache über die Waage oder den Hebel entlehnen. Man weiß, daß wenn die Waagbalken gleich lang sind, man auch gleich viel Gewicht an den Enden anhängen muß, um die Waage in der Schwebe zu halten. Macht man aber den einen Arm doppelt oder dreifach so lang, so muß man an dessen Ende zum Zwecke des Gleichgewichts nicht doppelt oder dreifach so viel, sondern gerade zwei- oder dreimal weniger anhängen und man sieht, daß man es in diesem Falle mit einer Dreisatzrechnung, wie man sagt, der II. Art oder von verkehrtem Verhältnisse zu thun hat. Wenn aber der Balken an einem Ende unterstützt ist, und wir in einer Entfernung z. B. von 8′ (d. h. in unserm Beispiel bei den Preßblöcken) mit einer gewissen Kraft abwärts ziehen, so werden die Blöcke mit dieser ganzen Kraft gedrückt; gehen wir aber wieder 8′ weiter und drücken da mit der nämlichen Kraft abwärts, so erleiden die Blöcke auch einen doppelt so starken Druck und man sieht, daß hier in der Wirkung dann das gerade Verhältniß (gerader Dreisatz, d. i. der I. Art) Statt findet. So viel mal 8′ wir weiter gehen, mit einer so viel mal stärkern Kraft werden die Blöcke gepreßt. Bei 55′ sind wir $^{55}/_8$ mal 8′ entfernt, also wirkt dort die Kraft von $82^1/_2$ Ztr. $^{55}/_8$ mal so stark auf die Blöcke, also mit einem Gewicht von $^{55}/_8 \cdot {}^{165}/_2$ Ztr. $= 9075$ Ztr. $: 16 = 567^3/_{16}$ Ztr. Wir können dieß auf den Trottbaum anwenden, wenn wir zuerst von seinem eigenen Gewichte absehen. Rechnen wir aber dann sein ganzes Gewicht von 231 Zentnern, das ebenfalls noch auf die Blöcke wirkt, dazu, so ergibt sich ein Gesammtdruck von $(567^3/_{16} + 231)$ Ztr. $=$ nahe an 800 Ztr., wodurch die armen Träublein, auch wenn sie nicht am besten gerathen sind, doch gewiß tüchtig zusammengepreßt werden (Da man bei dieser Rechnung nur die Hauptpunkte berührt und z. B. das Moment des Schwerpunkts unberücksichtigt läßt, so ist sie natürlich bloß eine angenäherte.)

6. Ein zirka 5 Ztr. schwerer Stein soll mit einem Hebbalken gehoben werden, der Hebel greift $1^1/_2$′ vom Unterstützungspunkt den Stein an; wie viel hat der Mann zu heben, wenn er 5′ vom Unterstützungspunkt einwirkt? Antw. $1^1/_2$ Zentner.

7. Bei einer ungleicharmigen Waage mit verschiebbarem Gewicht (Schnell- oder Bolz-Waage) ist der Aufhängepunkt der Last 4″ vom

Drehungspunkt entfernt. Wenn nun eine Last angehängt wird, welcher der 2 Pfund schwere Gewichtstein 19″ vom Drehungspunkt entfernt, das Gleichgewicht hält, wie viel wiegt dann diese Last?

8. Bei einem gemeinen Flaschenzug mit einer steigenden Rolle muß man, aus Gründen wie beim Hebel, nur die Hälfte der Last ziehen, Nebenumstände abgerechnet (wenn 2 steigende Rollen, an einer Axe, da wären, nur den 4tel, bei dreien nur den 6tel u. s. f.). Wenn nun Zimmerleute mittelst eines Flaschenzugs mit einer steigenden Rolle 3 Balken von Tannenholz auf ein Mal in die Höhe ziehen, von denen jeder 30′ lang und durchschnittlich 7″ breit und 7″ dick ist; welche Last haben sie zu heben, falls 1 Kb.′ Tannenholz 25 ℔ wiegt. — U. s. f. ähnliche Aufgaben.

9. Wie viele Saum hält ein Faß, wenn der Durchmesser jedes Bodens 5′, die Spundtiefe 6′ und die Faßlänge 8′ beträgt? (Das Faß werde als Zylinder von $^{(5+6)}/_{2}$′ Durchmesser genommen.)

Anmerkung für den Lehrer: Wenn der Hohlraum eines Fasses die Form eines beidseitig gleich und senkrecht zur Axe abgestutzten Ellypsoids hat, so kann durch eine höhere Summation der Inhalt des Fasses gleich $\frac{2b^2+r^2}{3}a\pi$ gefunden werden, wobei a die Distanz der beiden Boden von einander, b die halbe Spundtiefe, r den Radius der Faßboden und π die Zahl 3,14159 bezeichnet. Die bekannte Lambert'sche Formel ist $\left(\frac{2b+r}{3}\right)^2 a\pi$.

10. Wie viele Saum faßt eine Stande von 5′ Höhe und $^{(6+7)}/_{2}$′ Mitteldurchmesser?

11. Wie schwer ist eine gußeißerne Kugel von 7″ Durchmesser, wenn das spezif. Gewicht des Eisens 7,207 d. h. 1 Kb.′ Eisen 9,207 mal so schwer als 1 Kb.′ Wasser ist?

12. Wie viele Maß faßt ein Farbkessel, dessen zu füllender Raum eine Halbkugel von 4′ Durchmesser bildet?

13. Eine 12′ lange und 5′ breite Hürde ist 4′ hoch mit Kartoffeln angefüllt, wie viele gehäufte Viertel sind es, wenn 10 bestrichene 7 gehäufte Viertel ausmachen?

14. Wie viel muß man für die Bearbeitung einer steinernen Ackerwalze zahlen, wenn diese 8′ 8″ lang und von $3^1/_5$′ Durchmesser sein soll, und jeder □′ der Oberfläche 80 Rappen kostet? Wie schwer wäre diese Walze?

Inhalt des zweiten Theiles der Mathematik der Volksschule.

Erste Abtheilung.

Die Geometrie der Volksschule.

Seite.

§ 1. Einleitung 1
§ 2. Ueber die Nothwendigkeit des geometrischen Unterrichts in der Volksschule 1
§ 3. Umfang der Geometrie der Volksschule 17
§ 4. Ueber die Methode und die methodische Ausführung des geometrischen Unterrichts in der Volksschule 21
A. Elementarschule 25
B. Realschule 27
C. Realergänzungsschule 47
§ 5. Methodische Gliederung des geometrischen Unterrichtsstoffes nach den einzelnen Schuljahren gemäß der vorangegangenen Entwicklung des gesammten Unterrichts
I. Schulstufe, Elementarabtheilung 52
II. Schulstufe oder erste Realabtheilung 53
III. Schulstufe oder zweite Realabtheilung (Realergänzungsschule) . 54
§ 6. Gränzlinien des geometrischen Unterrichts für Töchter 55
§ 7. Das Uebungsbuch für den geometrischen Unterricht, oder die geometrische Aufgabensammlung der Volksschule 58
§ 8. Veranschaulichungsmittel und Werkzeuge für den geometrischen Unterricht in der Volksschule.
A. Veranschaulichungsmittel 66
B. Werkzeuge 68
§ 9. Vergleichende Blicke auf die verschiedenartige methodische Behandlungsweise des geometrischen Unterrichts in Volksschulen 70

Zweite Abtheilung.

Anschauungsunterricht als geometrischer Vorbereitungsunterricht auf der ersten Schulstufe; Elementarschule.

§ 10. Auffassung von Ort, Form und Größe, zur Unterstützung allgemeiner Unterrichtszwecke, wie z. B. des Schreib-, Zeichnungs- und geometrischen Vorbereitungsunterrichts 83

Seite.

Erstes Schuljahr.

A. Allgemeine Vorübungen 86
B. Uebung des Auges und der Hand in Nachbildung der Formelemente 94

Zweites Schuljahr.

Fortsetzung der Uebungen im Zeichnen 105

Drittes Schuljahr.

Fortsetzung der Uebungen im Zeichnen 106
Schlußbemerkung zur zweiten Abtheilung 108

Dritte Abtheilung.

Beginn des geometrischen Unterrichts auf der zweiten Schulstufe, oder der ersten Realabtheilung.

I. Viertes Schuljahr.

§ 11. Aufgabe 110
§ 12. Die Raumelemente 110
Nr. 1. Körper und Flächen 112
Nr. 2. Aufgaben über Körper und Flächen 115
Nr. 3. Linien, gerade und krumme; Punkt 117
Nr. 4. Aufgaben über Linien und Punkte 119
Nr. 5. Prüfende Fragen und Aufgaben über den ganzen ersten Abschnitt des geometrischen Unterrichts, d. i. über die Auffassung und abbildliche Darstellung der Raumelemente 121
§ 13. Verbindung von Linien durch Messung. Das Messen gerader Linien und die gesetzlichen Längenmaße.
Nr. 1. Kurzer Inhalt der hierüber zu gebenden Lektionen . . . 122
Nr. 2. Aufgaben übers Längenmessen 125
§ 14. Verbindung von Linien durch Umdrehung. Winkel und damit zusammenhängende Konstruktionen und Messungen.
Nr. I. Lektionen 129
Nr. II. Anmerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorige Abtheilung, betreffend die Winkel. 136

II. Fünftes Schuljahr.

§ 15. Aufgabe 140
§ 16. Das Dreieck,
Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 140
Nr. 2. Spezielle Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über das Dreieck 146
§ 17. Die Parallelen als ein Gränzfall des Dreiecks. Winkelsumme im Dreieck. Anwendung auf regelmäßige und unregelmäßige Vier- und Vielecke.
Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 149

Seite

Nr. 2. Spezielle Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorausgegangene Abtheilung . 154

§ 18. Einleitung zum Flächenmessen: Flächenmaße.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 158

Nr. 2. Bemerkungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorausgegangene Abtheilung 163

III. Sechstes Schuljahr.

§ 19. Aufgabe 168

§ 20. Ausmessung beliebiger Rechtecke, rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke (Mit Zuziehung ganz einfacher Brüche).

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 168

Nr. 2. Hierauf bezügliche Aufgaben 171

§ 21. Ausmessung der aus beliebigen Dreiecken zusammengesetzten Vier- und Vielecke.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 175

Nr. 2. Bemerkungen und Ausführungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über die vorigen Sätze . 178

§ 22. Anfänge in Vermessungen im Freien. Aufnahme und Zeichnung der leichtesten Grundplänchen 183

A. Allgemeine Erklärungen durch den Lehrer: Ueber einige geometrische Verrichtungen im Freien (auf dem Felde) 184

B. Hauptaufgaben zu Meßübungen im Freien 186

C. Bemerkungen und Ausführungen zu den in der Aufgabensammlung sich findenden Uebungen über Messungen im Freien . . 190

§ 23. Schlußbemerkung zur dritten Abtheilung mit Rücksicht auf die drei Hefte der Aufgabensammlung dieser Schulstufe 192

Vierte Abtheilung.

Schluß des geometrischen Unterrichts auf der dritten Schulstufe, oder der zweiten Realabtheilung (Realergänzungsschule.

I. Siebentes Schuljahr.

§ 24. Aufgabe 198

§ 25. Bildung einfacher von Ebenen begränzter geometrischer Körper und Darstellung und Ausmessung ihrer Oberflächen.

Nr. 1. Hauptinhalt der Lektionen 198

Nr. 2. Aufgaben für die Schüler (theils bei Hause zu lösen) . . 203

§ 26. Zeichnung der einfachern geometrischen Körper. (Nach isometrischer Darstellungsweise.)

Hauptinhalt der Lektionen und Aufgaben 204

§ 27. Einleitung zur Ausmessung geometrischer Körper. (Die Körpermaße und Gewichte.)

Hauptinhalt der Lektionen und Aufgaben 211

Seite.

II. Achtes Schuljahr.

§ 28. Aufgabe 216
§ 29. Bildung geometrischer Körper mit krummen Gränzflächen . . . 216
§ 30. Nachholung der Messung des Kreises und Anwendung auf die drei runden Körper.
I. Ueber den Kreis 218
II. Anwendung der Kreismessung auf die runden Körper . . . 220
§ 31. Geometrische Zeichnung von Zylinder und Kegel 223
§ 32. Ausmessung beliebig geformter Körperräume 226

III. Neuntes Schulsahr.

§ 33. Aufgabe 229
§ 34. Schlußmessungen im Freien 229
§ 35. Einfacher Bauriß; damit verbundene Rechnungen 235
§ 36. Geometrische Zeichnung einzelner technischer Gegenstände und Vorrichtungen 238
§ 37. Vermischte praktische Schlußaufgaben 240

Angabe einzelner Druckfehler.

Seite	31	Zeile	7	von unten	lies „triviales" statt „trivials".
"	37	"	14	" oben	" „fester" statt „festere".
"	37	"	16	" "	" „zu widmen" statt "widmen".
"	37	"	13	" unten	" „Nebenwinkeln" statt „Nebenwinkel".
"	39	"	2	" "	" „die" statt „alle".
"	58	"	11	" "	" „Volksschule" statt „Volsschule".
"	67	"	16	" oben	" „polyedrischer" statt „und polyedrische"
"	80	"	1	" unten	setze . statt ?
"	83	"	6	" oben	" „§ 10' statt „§ 9".
"	88	"	4	" unten	" ? statt .
"	94	"	9	" "	ist die Klammer gegen „Von" zu kehren.
"	114	"	9	" oben	setze „um" statt „um".
"	115	"	3	" "	statt „oder" setze „ , einen andern durch einen"
"	134	"	10	" unten	setze „BCD" statt „BCE".
"	165	"	5	" "	streiche den letzten „□'".
"	198	"	8	" "	" Buchstaben A.
"	204	"	17	" "	" „Nr. 1".
"	211	"	4	" oben	" „Nr. 1".

Zentralbibliothek Zürich
ZM03141302